École polytechnique 2009-2010

MAT 311 Analyse réelle et complexe

Feuille d'exercices 4 (Espaces de Lebesgue, transformation de Fourier)

Exercice 1. Soit $f \in L^1(\Omega)$.

a) Montrer que

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} = \sup \left\{ \int_\Omega f(x)\phi(x)dx \,\middle|\, \phi \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et } |\phi| \leq 1 \text{ p.p. sur } \Omega \right\}.$$

b) Soient $p \in]1, +\infty[$ et $q = \frac{p}{p-1}$. Soit $f \in L^p(\Omega)$; montrer que

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \sup \left\{ \int_\Omega f(x)\phi(x)dx \,\middle|\, \phi \in L^q(\Omega) \text{ et } \|\phi\|_{L^q(\Omega)} \leq 1 \right\}.$$

Exercice 2. (Inégalité de Hardy)

Soit $p \in]1, +\infty[$. Pour tout $f \in L^p(\mathbf{R}_+^*)$, on note

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt\,, \quad x > 0\,.$$

a) Montrer que la fonction F est continue sur $\mathbf{R}_+^*$.

b) Supposons que $f \in C_c(\mathbf{R}_+^*)$ est positive. Montrer que

$$\int_{\mathbf{R}_+^*} F(x)^p dx = -p \int_{\mathbf{R}_+^*} F(x)^{p-1} x F'(x) dx$$

puis en déduire que

$$\|F\|_{L^p(\mathbf{R}_+^*)} \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_{L^p(\mathbf{R}_+^*)}\,.$$

c) Etudier le cas d'égalité dans l'inégalité obtenue au b).

d) En déduire que l'application linéaire $f \mapsto F$ est continue de $L^p(\mathbf{R}_+^*)$ dans lui-même, et qu'elle est de norme inférieure ou égale à $\frac{p}{p-1}$.

e) Montrer que la norme de l'application linéaire continue $f \mapsto F$ de $L^p(\mathbf{R}_+^*)$ dans lui-même vaut exactement $\frac{p}{p-1}$. (Indication: prendre $f_\epsilon(x) = \min(1, x^{-1/p-\epsilon})$.)

f) L'application linéaire $f \mapsto F$ envoie-t-elle $L^1(\mathbf{R}_+^*)$ dans lui-même?

Exercice 3. Construire une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions en escalier sur $]0, 1[$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_{L^1(]0,1[)} = 0 \quad \text{et} \quad \overline{\lim_{n\to+\infty}}\, f_n(x) = +\infty \text{ pour tout } x \in]0, 1[\,.$$

(Indication: considérer la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{[r2^{-k},(r+1)2^{-k}]}$pour $0 \leq r < 2^k$ lorsque $k \to +\infty$.)

Exercice 4. Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes définies sur $\mathbf{R}$:

a) $x \mapsto e^{-|x|}$, b) $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ et c) $x \mapsto xe^{-x^2/2}$.

Exercice 5. Soient $f, g \in L^1(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$. On rappelle la définition du produit de convolution $f \star g$:

$$f \star g(x) := \int_{\mathbf{R}^N} f(x-y)g(y)dy \qquad \text{p.p. en } x \in \mathbf{R}^N .$$

On admet que $f \star g \in L^1(\mathbf{R}^N)$.

a) Exprimer la transformée de Fourier $\widehat{f \star g}$ en fonction de $\hat{f}$ et $\hat{g}$.

b) Calculer la transformée de Fourier de $\mathbf{1}_{[-1,1]}$.

c) Calculer la transformée de Fourier de la fonction définie sur $\mathbf{R}^*$ par

$$x \mapsto \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 .$$

d) Pour tout $a > 0$, on pose

$$G_a(x) = \frac{1}{(2\pi a)^{N/2}} e^{-|x|^2/2a}, \quad x \in \mathbf{R}^N .$$

Calculer $G_a \star G_b$ pour tous $a, b > 0$.

Exercice 6.

a) Existe-t-il $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$ telle que $f \star g = g$ pour tout $g \in L^1(\mathbf{R}^N)$?

b) Existe-t-il $f, g \in L^1(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$ telles que $f \neq 0$ et $g \neq 0$ dans $L^1(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$, mais vérifiant $f \star g = 0$?

c) Résoudre dans $L^1(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$ l'équation $f \star f = f$ d'inconnue f.

Exercice 7.

a) Soit $f \in L^1(\mathbf{R}, \mathbf{C})$. Supposons qu'il existe $K \subset \mathbf{R}$ compact tel que $f(x) = 0$ p.p. en $x \in \mathbf{R} \setminus K$. Montrer que la transformée de Fourier $\hat{f}$ admet un prolongement à $\mathbf{C}$ qui est développable en série entière en tout point de $\mathbf{C}$.

b) Trouver toutes les fonctions f sommables sur $\mathbf{R}$ dont la transformée de Fourier est une fonction polynômiale.

Exercice 8.

a) Donner un exemple de fonction f sommable sur $\mathbf{R}^N$ telle que f et $\hat{f}$ soient p.p. positives ou nulles sur $\mathbf{R}^N$.

b) Pour toute fonction f mesurable sur $\mathbf{R}^N$ et à valeurs complexes, on note $\tilde{f}$ la fonction définie par $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$. Calculer la transformée de Fourier de $\tilde{f}$, puis de $f \star \tilde{f}$.

c) Reprendre la question a) à la lumière du résultat de la question b).

d) Soit $f \in L^1(\mathbf{R})$ vérifiant $f(x) > 0$ p.p. en $x \in \Omega$. Montrer que $|\hat{f}(\xi)| < \hat{f}(0)$ pour tout $\xi \in \mathbf{R}$.

e) Soit $f \in L^1(\mathbf{R})$ vérifiant $f(x) > 0$ p.p. en $x \in \Omega$. Montrer que, pour tout $n \geq 1$ et tous $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbf{R}$, la matrice $(\hat{f}(\xi_k - \xi_l))_{1 \leq k,l \leq n}$ a toutes ses valeurs propres dans $\mathbf{R}_+^*$.