École polytechnique 2009-2010

MAT 311 Analyse réelle et complexe

Feuille d'exercices 3 (Inégalités, Fubini, changement de variables, mesure)

Exercice 1. Etudier le cas d'égalité a) dans l'inégalité de Hölder; b) dans l'inégalité de Minkowski.

Exercice 2. (Inégalité de Clarkson)

Soient $p \geq 2$ et f et g, deux fonctions mesurables à valeurs réelles sur $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ouvert non vide. Montrer que

$$\int_\Omega |f(x)+g(x)|^p dx + \int_\Omega |f(x)-g(x)|^p dx \leq 2^{p-1} \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx + \int_\Omega |g(x)|^p dx \right) .$$

(On pourra commencer par étudier la fonction $x \mapsto (x^2+1)^{p/2} - x^p - 1$ sur $\mathbf{R}_+$.)

Exercice 3. Soit la fonction f définie sur $[-1,1]^2 \setminus \{(0,0)\}$ par la formule

$$f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} .$$

a) Les fonctions $f(x,\cdot)$ et $f(\cdot,y)$ sont-elles sommables sur $[-1,1]$ pour $x \neq 0$ et $y \neq 0$ respectivement? Calculer

$$\int_{-1}^1 f(x,y)dx \text{ pour tout } y \neq 0 \text{ et } \int_{-1}^1 f(x,y)dy \text{ pour tout } x \neq 0 .$$

La fonction f est-elle sommable sur $[-1,1]^2$?

b) Soit la fonction g définie sur $[0,1]^2$ par la formule

$$g(x,y) := \begin{cases} +\,2^{2n} & \text{si } 2^{-n} < x < 2^{1-n} ,\ 2^{-n} < y < 2^{1-n} , \\ -\,2^{2n+1} & \text{si } 2^{-n-1} < x < 2^{-n} ,\ 2^{-n} < y < 2^{1-n} , \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où n décrit $\mathbf{N}^*$. Calculer

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 g(x,y)dx \right) dy \quad \text{et} \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 g(x,y)dy \right) dx .$$

Expliquer le résultat.

Exercice 4. (Produit de convolution)

a) Soient $f,g \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$. Montrer que la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est sommable sur $\mathbf{R}^N$ p.p. en $x \in \mathbf{R}^N$. Montrer que la fonction $f \star g$ définie p.p. sur $\mathbf{R}^N$ par la formule

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbf{R}^N} f(x-y)g(y)dy$$

est sommable sur $\mathbf{R}^N$.

b) Vérifier que, pour tous $f,g,h \in \mathcal{L}^1(\Omega;\mathbf{C})$, l'on a

$$f \star g = g \star f , \qquad \text{et} \qquad f \star (g \star h) = (f \star g) \star h \quad \text{p.p. sur } \Omega .$$

c) Soient $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$ et g une fonction mesurable sur Ω à valeurs dans $\mathbf{C}$ telle que $|g|^p$ soit sommable, où $p > 1$. Montrer que la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est sommable sur $\mathbf{R}^N$ p.p. en $x \in \mathbf{R}^N$. Montrer que la fonction $f \star g$ définie p.p. sur $\mathbf{R}^N$ par la formule

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbf{R}^N} f(x-y)g(y)dy$$

est mesurable et vérifie

$$\left(\int_{\mathbf{R}^N} |(f\star g)(x)|^p dx\right)^{1/p} \leq \int_{\mathbf{R}^N} |f(x)|dx \left(\int_{\mathbf{R}^N} |g(x)|^p dx\right)^{1/p} .$$

Exercice 5. Soit $A \subset \mathbf{R}^3$ compact. Notons A_1 (resp. A_2, A_3) la projection orthogonale de A sur le plan d'équation $x_1 = 0$ (resp. $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.)

a) Montrer que A_1, A_2 et A_3 sont mesurables.

Notons a_1 (resp. a_2, a_3) les surfaces (mesures de Lebesgue dans le plan euclidien identifié à $\mathbf{R}^2$) de A_1 (resp. A_2, A_3.)

b) Montrer que

$$|A| \leq \sqrt{a_1 a_2 a_3}\,.$$

c) Etudier le cas d'égalité dans le b).

Exercice 6. (Lemme de Borel-Cantelli)

Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ famille dénombrable de parties mesurables de $\mathbf{R}^N$ telle que

$$\sum_{n\geq 1} |A_n| < +\infty\,.$$

Montrer que presque tout $x \in \mathbf{R}^N$ appartient à au plus un nombre fini des ensembles A_n. (Indication: une première démonstration consiste à considérer la série

$$\sum_{n\geq 1} \mathbf{1}_{A_n}\,.$$

Une deuxième démonstration consiste à vérifier que

$$\mathcal{N} = \bigcap_{m\geq 1} \bigcup_{n\geq m} A_n$$

est l'ensemble des points x appartenant à une infinité des A_n et à utiliser l'additivité dénombrable de la mesure de Lebesgue.)

Exercice 7. Soit $f \in \mathcal{L}^1(\Omega;\mathbf{C})$. Montrer qu'il existe une fonction $H : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ convexe croissante et telle que

$$\lim_{z\to+\infty} \frac{H(z)}{z} = +\infty$$

vérifiant

$$\int_\Omega H(|f(x)|)dx < \infty\,.$$

(Indication: chercher H sous la forme

$$H(z) = \int_0^z h(\zeta)d\zeta\,, \quad \text{avec } h = \sum_{n\geq 1} h_n \mathbf{1}_{[n,n+1[}$$

avec $0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \ldots \leq h_n \leq \ldots$, et appliquer le principe de Cavalieri pour choisir les coefficients h_n de façon appropriée.)