École polytechnique 2009-2010

MAT 311 Analyse réelle et complexe

Feuille d'exercices 1 (Topologie)

Avertissement : Il n'est nullement question de faire tous les exercices de la feuille en une séance. On a voulu donner le choix. En revanche, on recommande fortement d'avoir réfléchi personnellement sur les 5 premiers exercices.

Exercice 1. Soit E l'espace vectoriel des fonctions C^1 de $[0,1]$ à valeurs réelles.

1) Vérifier que les applications

$$f \mapsto \sup |f|,\ f \mapsto |f(0)| + \sup |f'|, f \mapsto \int_0^1 |f|$$

sont des normes sur E.

2) Pour lesquelles de ces normes E est-il complet ?

3) Étudier l'équivalence éventuelle de ces normes.

Exercice 2. On dit qu'une application f est localement lipschitzienne si tout point possède un voisinage sur lequel f est lipschitzienne. Montrer que si (X,d) est un espace métrique compact, et f localement lipschitzienne de (X,d) dans (Y,δ) alors f est lipschitzienne.

Exercice 3. Montrer que si f est une application d'un espace métrique compact (X,d) dans lui-même, telle que $d(f(x),f(y)) < d(x,y)$ pour tout $x \neq y$, alors f possède un point fixe. Montrer que ceci est faux, en général, dans un espace complet.

Exercice 4. Soit A un fermé de $\mathbf{R}$ et K un compact. Montrer que $F + K = \{x + y \mid x \in F, y \in K\}$ est fermé. Donner un contre-exemple si on suppose simplement F et K fermés.

Exercice 5. Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une fonction continue.

1) Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

a) $\forall M > 0,\ \exists R > 0$ tel que $\|x\| > R \implies |f(x)| > M$.

b) Pour toute partie bornée B de $\mathbf{R}$, $f^{-1}(B)$ est une partie bornée de $\mathbf{R}^n$.

c) Pour toute partie compacte K de $\mathbf{R}$, $f^{-1}(K)$ est une partie compacte de $\mathbf{R}^n$.

On dit alors que f est propre.

2) Montrer que si f est propre, $\inf |f|$ est atteint.

3) Montrer qu'un polynôme non constant à une variable est propre mais que le polynôme $f(x,y) = (xy-1)^2 + y^2$ ne l'est pas.

Exercice 6. Soit (u_n) une suite réelle à valeurs ≥ 0.

1) Montrer que la série $\sum u_n$ converge dans $\bar{\mathbf{R}}$.

2) Montrer que $\sum_{n\geq 0} u_n$ est le sup des sommes finies $\sum_{n\in I} u_n$ où I parcourt les parties finies de $\mathbf{N}$.

3) Soit $u : \mathbf{R}^+ \to]0,\infty[$ une fonction.

a) Montrer qu'il existe $n > 0$ tel que $\{x \geq 0 | f(x) > 1/n\}$ est infini.

b) Montrer que le sup des sommes finies $\sum_{n\in I} u(x)$ où I parcourt les parties finies de $\mathbf{R}^+$ est infini.

c) Interpréter le résultat.

Exercice 7.

1) Montrer qu'un ouvert connexe d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs.

2) Montrer que si A est une partie connexe d'un métrique, toute partie coincée entre A et son adhérence est connexe.

3) Soit Γ l'adhérence dans $\mathbf{R}^2$ du graphe de $x \mapsto \sin(1/x)$. Montrer que Γ est connexe mais pas connexe par arcs [Montrer qu'on ne peut relier l'origine à un point du graphe par un arc continu].

Exercice 8. Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie. Soit $\varphi : E \to \mathbf{R}$ une forme linéaire non nulle et $H_\varphi := \mathrm{Ker}(\varphi)$ l'hyperplan correspondant.

1) Montrer que deux formes linéaires non nulles définissent les mêmes hyperplans si et seulement si elles sont proportionnelles.

2) Montrer que $E - H_\varphi$ est dense dans E et que H_φ est connexe.

3) Montrer que φ est continue si et seulement si H_φ est fermé dans E. Montrer dans ce cas que $E - H_\varphi$ a exactement deux composantes connexes.

3) Montrer qu'il existe toujours des formes linéaires non continues [On admettra que E admet une base algébrique].

4) Supposons φ non continue.

a) Montrer que H_φ est dense. En déduire que

$$\{x \in E \text{ tels que } \varphi(x) = 1\}$$

est dense.

b) Montrer que $E - H_\varphi$ est connexe.

Exercice 9. Soit f une application continue de $[0,1]$ dans le cercle S^1. Montrer qu'il existe une application continue $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que $f(x) = e^{i\varphi(x)}$. On appelle φ un relèvement de f. Montrer que φ est uniquement déterminée par la donnée de $\varphi(0)$.

Indication: montrer que si n est assez grand, $I_k = [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, pour tout a_k tel que $e^{ia_k} = f(\frac{k}{n})$, il existe un relèvement φ_k défini sur I_k tel que $\varphi_k(\frac{k}{n}) = a_k$. Définir alors par récurrence sur k l'application φ sur $[0, \frac{k}{n}]$.

Exercice 10. Soit (X, d) un espace métrique.

1) Montrer que (X, d) et $(X, \inf(1, \mathrm{d}))$ sont des espaces métriques homéomorphes.

Soit (X_n, d_n) une suite d'espaces métriques. On suppose que le diamètre de X_n est ≤ 1 (ce qui ne nuit pas aux questions de topologie d'après la question précédente). On pose $P = \prod X_n$ et

$$\delta((x_n), (y_n)) = \sum_{n \geq 0} 2^{-n} \mathrm{d}_n(x_n, y_n).$$

2) Montrer que δ est une distance sur P.

3) Montrer que si les X_n sont compacts, il en est de même de P.

Exercice 11. Soit $\varphi : X \to X$ une application continue avec X métrique complet. On suppose qu'il existe $a > 0$ tels que

$$\text{Pour tout } x, y \in X,\ \mathrm{d}(\varphi(x), \varphi(y)) \geq a\mathrm{d}(x, y).$$

1) Montrer que $\varphi(X)$ est complet. En déduire qu'il est fermé dans X.

2) Montrer que φ est injective.

On suppose désormais $X = \mathbf{R}^2$ et $\varphi((x, y)) = (x + f(y), y + f(x))$ avec f fonction réelle de classe C^1. On suppose $\sup_{\mathbf{R}} |f'(x)| < 1$.

3) Montrer que l'image de φ est ouverte dans X [Montrer d'abord que la matrice jacobienne de x est inversible en tout point]. En déduire que φ est surjective.

4) Montrer que φ est un C^1 difféomorphisme de $\mathbf{R}^2$.

Exercice 12. Soit X un métrique. Soit K_n une suite décroissante de connexes dans X.

0) Si $X = \mathbf{R}$, montrer que $\cap K_n$ est connexe.

On suppose de plus les K_n compacts.

1) Soient C_1, C_2 deux compacts disjoints dans X. Montrer qu'il existe U_1, U_2 deux ouverts disjoints de X contenant C_1, C_2.

2) Supposons $\cap_{n \geq 0} K_n$ soit réunion disjointe de deux fermés C_1, C_2. En utilisant la question précédente, montrer qu'il existe n tel que K_n est contenu dans la réunion de deux ouverts disjoints contenant respectivement C_1, C_2.

3) Montrer que $\cap K_n$ est connexe.

4) Trouver un exemple de suite décroissante de connexes de $\mathbf{R}^2$ dont l'intersection n'est pas connexe (penser à une échelle dans $\mathbf{R}^2$).

Exercice 13. Soit u_n une suite telle que

$$u_{n+m} \leq u_n + u_m$$

Montrer que si $\ell = \liminf u_n/n$ est fini, alors $(u_n/n)_{n \geq 1}$ converge. On montrera que pour tout $\varepsilon > 0$ et n assez grand $u_n/n \leq \ell + \varepsilon$.

Exercice 14. (*) Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite à valeurs dans $\mathbf{R}^d$, $d \geq 1$ telle que $\lim(x_{n+1} - x_n) = 0$.

1) On suppose ici $d = 1$.

a) Soient $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $\underline{\lim} x_n \leq a < b \leq \overline{\lim} x_n$. Montrer que l'ensemble

$$\{n \text{ tels que } x_n \in]a, b[\}$$

est infini.

b) Montrer que l'ensemble V des valeurs d'adhérence de (x_n) dans $\bar{\mathbf{R}}$ est dense dans $\bar{\mathbf{R}}$.

c) Montrer $V = [\underline{\lim} x_n, \overline{\lim} x_n]$.

2) On suppose $d \geq 2$ et de plus (x_n) bornée. Soit V l'ensemble des valeurs d'adhérence de (x_n) dans $\mathbf{R}^d$.

a) Montrer que V est compact.

Supposons que V soit la réunion disjointe de deux fermés V_1, V_2.

b) Montrer qu'on a $\mathrm{d}(V_1, V_2) > 0$. en déduire qu'il existe deux ouverts U_1, U_2 de $\mathbf{R}^d$ contenant V_1, V_2 respectivement tels que $\mathrm{d}(U_1, U_2) > 0$.

c) Montrer que pour n assez grand, $x_n \in U_1 \cup U_2$. En déduire que V_1 ou V_2 est vide.

d) Montrer que V est connexe.

e) Montrer que si (x_n) n'est plus supposée bornée, V peut n'être ni compact ni connexe.