We recall the Young inequality for the convolution product on $\mathbf{R}^N$: if $p, q \in [1,\infty]$ and if $f \in L^p(\mathbf{R}^N)$ and $g \in L^q(\mathbf{R}^N)$, then $f \star g \in L^r(\mathbf{R}^N)$ with

$$\|f \star g\|_{L^r} \le \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$$

provided that $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ (with the usual convention $1/\infty = 0$).

Consider the Vlasov-Poisson system in space dimension 2

$$(VP) \qquad \begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + E \cdot \nabla_v f = 0\,, \quad x, v \in \mathbf{R}^2\,, \\ E = -\nabla_x \phi\,, \quad -\Delta_x \phi = \rho_f\,. \end{cases}$$

Here $f \equiv f(t,x,v)$ is the particle distribution function (density of particles with velocity v located at the position x at time t), $E \equiv E(t,x) \in \mathbf{R}^2$ is the electric field, and

$$\rho_f(t,x) = \int_{\mathbf{R}^2} f(t,x,v)dv\,.$$

The system (VP) is supplemented with the initial condition

$$(IC) \qquad f(0,x,v) = f^{in}(x,v)\,.$$

We henceforth assume that $0 \le f^{in} \in C^1_c(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2)$, and denote

$$M := \sup_{x,v \in \mathbf{R}^2} f^{in}(x,v)\,, \quad \mathcal{K}^{in} := \iint_{\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2} (1+|v|^2) f^{in}(x,v)dxdv < \infty\,.$$

I

1) Prove that $\rho_f(t,\cdot) \in L^2(\mathbf{R}^2)$ for all $t \ge 0$, with $\|\rho_f(t,\cdot)\|_{L^2} \le 2\sqrt{\pi M \mathcal{K}^{in}}$.
2) State and prove the analogous estimate for

$$j_f(t,x) := \int_{\mathbf{R}^2} v f(t,x,v)dv\,.$$

We recall that E is given in terms of ρ_f by the formula

$$E(t,x) = \tfrac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}^2} \frac{x-y}{|x-y|^2} \rho_f(t,y)dy\,.$$

3) Prove that $E(t,\cdot) \in L^2(\mathbf{R}^2)$ for all $t \in \mathbf{R}$, and express

$$\mathcal{E}(t) := \iint_{\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2} \tfrac{1}{2}|v|^2 f(t,x,v)dxdv + \int_{\mathbf{R}^2} \tfrac{1}{2}|E(t,x)|^2 dx$$

in terms of f^{in}. (Hint: decompose the integral giving $E(t,x)$ into the contribution of y such that $|y-x| \le R$ and the contribution of y such that $|y-x| > R$.)

II

Define

$$Q(t) := \inf\{R > 0 \text{ s.t. } f(t,x,v) = 0 \text{ for all } x \in \mathbf{R}^2 \text{ if } |v| \ge R\}\,.$$

We henceforth assume that $Q(t) < \infty$ for all $t \ge 0$ and seek to prove an a priori estimate on Q.
4) Prove that $\rho(t,\cdot) \in L^\infty(\mathbf{R}^2)$ for all $t \ge 0$, and provide an upper bound for $\|\rho(t,\cdot)\|_{L^\infty}$ in terms of M and $Q(t)$.
5) Prove that $E(t,\cdot) \in L^\infty(\mathbf{R}^2)$ for all $t \ge 0$, and provide an upper bound for $\|E(t,\cdot)\|_{L^\infty}$ in terms of M and $Q(t)$.
6) Denote by $s \mapsto (X,V)(s,t,x,v)$ the solution of the following differential system posed on $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$:

$$\frac{dX}{ds} = V\,, \quad \frac{dV}{ds} = E(s,X)\,,$$

satisfying the condition

$$(X,V)(t,t,x,v)=(x,v)\,.$$

Prove that

$$|v|<Q(t)\Rightarrow \text{ there exists } x\in\mathbf{R}^2 \text{ s.t. } |V(0,t,x,v)|\le Q(0)\,.$$

7) Prove that

$$Q(t)\le Q(0)+C\int_0^t Q(s)ds$$

for some constant C to be given in terms of M and $\mathcal{K}^{in}$.

8) Deduce from the previous questions that $\operatorname{supp}(f(t,\cdot,\cdot))\subset\overline{B(0,R(t))}\times\overline{B(0,R'(t))}$ and provide lower bounds for $R(t)$ and $R'(t)$.

9) How can the results in questions 7-8 be used to simplify the proof of propagation of regularity for all times for the solution of (VP) in space dimension 2? (No extensive details are required; describe which steps in that proof can be simplified, and how to use the results in questions 7-8.)

III

Let f_1,f_2 be two solutions of (VP)-(IC) of class C^1 with the same initial condition $0\le f^{in}\in C^1_c(\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2)$. Denote ρ_i and E_i the macroscopic charge densities and electric fields corresponding to the solution f_i for $i=1,2$, and set

$$Z(t):=\|\rho_1(t,\cdot)-\rho_2(t,\cdot)\|_{L^1(\mathbf{R}^2)}+\|\rho_1(t,\cdot)-\rho_2(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2)}\,,$$
$$W(t):=\|\nabla_x f_2(t,\cdot,\cdot)\|_{L^1(\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2)}+\|\nabla_v f_2(t,\cdot,\cdot)\|_{L^1(\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2)}$$

10) Provide an upper bound for $\|E_1(t,\cdot)-E_2(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2)}$ in terms of $Z(t)$.

11) Prove that

$$Z(t)\le\int_0^t\|E_1(s,\cdot)-E_2(s,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2)}W(s)ds$$

12) Conclude that $f_1=f_2$.

M2 “Modèles cinétiques”, 23 mai 2013

On rappelle l'inégalité de Young pour le produit de convolution sur $\mathbf{R}^N$: pour tous $p,q\in[1,\infty]$ et tout $f\in L^p(\mathbf{R}^N)$ et $g\in L^q(\mathbf{R}^N)$, alors $f\star g\in L^r(\mathbf{R}^N)$ avec

$$\|f\star g\|_{L^r}\le\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$$

pourvu que $1+\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ (avec la convention habituelle $1/\infty=0$).

On considère le système de Vlasov-Poisson en dimension 2 d'espace

$$(VP)\qquad\left\{\begin{aligned}&\partial_t f+v\cdot\nabla_x f+E\cdot\nabla_v f=0\,,\quad x,v\in\mathbf{R}^2\,,\\&E=-\nabla_x\phi\,,\quad -\Delta_x\phi=\rho_f\,.\end{aligned}\right.$$

Ici $f\equiv f(t,x,v)$ est la fonction de distribution des particules (densité de particules animées de la vitesse v situées à la position x au temps t), $E\equiv E(t,x)\in\mathbf{R}^2$ est le champ électrique, et

$$\rho_f(t,x)=\int_{\mathbf{R}^2}f(t,x,v)dv\,.$$

Le système (VP) est complété par la condition initiale

$$(IC)\qquad f(0,x,v)=f^{in}(x,v)\,.$$

On supposera dorénavant que $0\le f^{in}\in C^1_c(\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2)$, et on notera

$$M:=\sup_{x,v\in\mathbf{R}^2}f^{in}(x,v)\,,\quad \mathcal{K}^{in}:=\iint_{\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2}(1+|v|^2)f^{in}(x,v)dxdv<\infty\,.$$

I

1) Montrer que $\rho_f(t,\cdot)\in L^2(\mathbf{R}^2)$ pour tout $t\ge0$, avec $\|\rho_f(t,\cdot)\|_{L^2}\le2\sqrt{\pi M\mathcal{K}^{in}}$.
2) Enoncer et démontrer l'estimation analogue pour

$$j_f(t,x):=\int_{\mathbf{R}^2}vf(t,x,v)dv\,.$$

On rappelle que E s'exprime en fonction de ρ_f par la formule

$$E(t,x)=\tfrac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}^2}\frac{x-y}{|x-y|^2}\rho_f(t,y)dy\,.$$

3) Montrer que $E(t,\cdot)\in L^2(\mathbf{R}^2)$ pour tout $t\in\mathbf{R}$, et exprimer

$$\mathcal{E}(t):=\iint_{\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2}\tfrac12|v|^2f(t,x,v)dxdv+\int_{\mathbf{R}^2}\tfrac12|E(t,x)|^2dx$$

en fonction de f^{in}. (Indication: décomposer l'integrale donnant $E(t,x)$ en la contribution des y tels que $|y-x|\le R$ et la contribution des y tels que $|y-x|>R$.)

II

Posons

$$Q(t):=\inf\{R>0\text{ s.t. }f(t,x,v)=0\text{ for all }x\in\mathbf{R}^2\text{ if }|v|\ge R\}\,.$$

On supposera dorénavant que $Q(t)<\infty$ pour tout $t\ge0$ et on va chercher une borne a priori pour Q.
4) Montrer que $\rho(t,\cdot)\in L^\infty(\mathbf{R}^2)$ pour tout $t\ge0$, et donner un majorant de $\|\rho(t,\cdot)\|_{L^\infty}$ en fonction de M et $Q(t)$.
5) Montrer que $E(t,\cdot)\in L^\infty(\mathbf{R}^2)$ pour tout $t\ge0$, et donner un majorant de $\|E(t,\cdot)\|_{L^\infty}$ en fonction de M et $Q(t)$.
6) On note $s\mapsto(X,V)(s,t,x,v)$ la solution du système différentiel posé sur $\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2$:

$$\frac{dX}{ds}=V\,,\quad\frac{dV}{ds}=E(s,X)\,,$$

vérifiant la condition

$$(X, V)(t, t, x, v) = (x, v)\,.$$

Montrer que

$$|v| < Q(t) \Rightarrow \text{ il existe } x \in \mathbf{R}^2 \text{ t.q. } |V(0, t, x, v)| \leq Q(0)\,.$$

7) Montrer que

$$Q(t) \leq Q(0) + C \int_0^t Q(s)ds$$

pour une constante C que l'on exprimera en fonction de M et $\mathcal{K}^{in}$.
8) Déduire des questions précédentes que $\operatorname{supp}(f(t,\cdot,\cdot)) \subset \overline{B(0,R(t))} \times \overline{B(0,R'(t))}$ et donner des minorants de $R(t)$ and $R'(t)$.
9) Comment peut-on utiliser les résultats des questions 7-8 pour simplifier la démonstration de la propagation de la régularité pour tout temps pour la solution de (VP) en dimension 2 d'espace? (on ne demande pas de démonstration complète, mais seulement d'indiquer quelles étapes de la preuve peuvent être simplifiées, et comment utiliser pour cela les résultats des questions 7-8).

III

Soient $f_1, f_2 \geq 0$ deux solutions de (VP)-(IC) de classe C^1 avec la même condition initiale $0 \leq f^{in} \in C_c^1(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2)$. Notons ρ_i et E_i les densités macroscopiques de charges et les champs électriques correspondant à la solution f_i pour $i = 1, 2$, et posons

$$\begin{aligned} Z(t) &:= \|\rho_1(t,\cdot) - \rho_2(t,\cdot)\|_{L^1(\mathbf{R}^2)} + \|\rho_1(t,\cdot) - \rho_2(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2)}\,, \\ W(t) &:= \|\nabla_x f_2(t,\cdot,\cdot)\|_{L^1(\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2)} + \|\nabla_v f_2(t,\cdot,\cdot)\|_{L^1(\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2)} \end{aligned}$$

10) Donner un majorant de $\|E_1(t,\cdot) - E_2(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2)}$ en fonction de $Z(t)$.
11) Montrer que

$$Z(t) \leq \int_0^t \|E_1(s,\cdot) - E_2(s,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2)} W(s)ds\,.$$

12) Conclure que $f_1 = f_2$.