M2 — Modèles cinétiques

Session de Mai 2011 — Durée: 3h

I

Dans toute cette partie, N désigne un entier supérieur ou égal à 2.

1) Montrer que, pour tout $S \in L^1(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$, l'équation de transport stationnaire

$$f(x,v) + v \cdot \nabla_x f(x,v) = S(x,v)\,, \qquad x, v \in \mathbf{R}^N \tag{1}$$

admet une unique solution $f \in L^1(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$, donnée par la formule

$$f(x,v) = \int_0^\infty e^{-t} S(x - tv, v)dt\,.$$

(On pourra commencer par étudier le cas où la fonction $x \mapsto S(x,v)$ appartient à $C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ pour presque tout $v \in \mathbf{R}^N$, et conclure par un argument de troncature et régularisation.)

2) Soit $f \in L^1(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$ telle que $v \cdot \nabla_x f \in L^1(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$. Montrer que

$$\|f\|_{L^1(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)} \leq \|f + v \cdot \nabla_x f\|_{L^1(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)}\,.$$

Soit $\chi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ telle que

$$\mathrm{supp}(\chi) \subset B(0,1)\,, \quad \chi(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}^N \text{ et } \int_{\mathbf{R}^N} \chi(x)dx = 1\,.$$

Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n(x,v) = n^{2N}\chi(nx)\chi(n(v - v_0))$, où v_0 est un vecteur unitaire de $\mathbf{R}^N$.

3) Pour tout $n \geq 1$, on définit $f_n \in L^1(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$ comme la solution de l'équation (1) avec second membre $S = S_n$. Montrer qu'il existe deux constantes positives C et C' que l'on précisera telles que, pour tout $n \geq 1$,

$$\|f_n\|_{L^1(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)} \leq C \quad \text{ et } \|v \cdot \nabla_x f_n\|_{L^1(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)} \leq C'\,.$$

4) Montrer que la suite ρ_n de $L^1(\mathbf{R}^N)$ définie pour tout $n \geq 1$ par

$$\rho_n(x) = \int_{\mathbf{R}^N} f_n(x,v)dv$$

converge au sens des distributions vers une limite que l'on demande de calculer.

5) Que pensez vous de l'énoncé suivant:

"Soit f_n suite bornée de $L^1(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$ telle que $v \cdot \nabla_x f_n$ soit une suite bornée de $L^1(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$. Alors, pour tout compact K de $\mathbf{R}^N$, la suite des restrictions pour $x \in K$ des intégrales

$$\int_{\mathbf{R}^N} f_n dv$$

est relativement compacte dans $L^1(K)$."

II

On considère le système de Vlasov-Poisson relativiste avec interaction gravitationnelle

$(VPRG)$

$$\begin{cases} (\partial_t + v(\xi) \cdot \nabla_x) f(t,x,\xi) - \nabla_x V(t,x) \cdot \nabla_\xi f(t,x,\xi) = 0\,,\,, \quad x, \xi \in \mathbf{R}^3\,, \\ \Delta_x V(t,x) = \displaystyle\int_{\mathbf{R}^3} f(t,x,\xi)d\xi\,, \end{cases}$$

où $v(\xi) = \nabla\sqrt{1+|\xi|^2}$. On rappelle que, pour toute fonction $\Phi \in C^2(\mathbf{R}_+^*)$

$$\Delta\Phi(|x|) = \Phi''(|x|) + \frac{2}{|x|}\Phi'(|x|)\,, \quad x \in \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}\,.$$

1) Soit (f, V) solution de classe C^2 de (VPRG) définie pour tout $t \in [0, T[$ et $x, \xi \in \mathbf{R}^3$, telle que, pour tout $t \in [0, T[$, la fonction $(x, \xi) \mapsto f(t, x, \xi)$ soit à support compact. Montrer que la quantité

$$E = \iint_{\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3} \sqrt{1+|\xi|^2} f(t,x,\xi)dxd\xi - \tfrac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^3} |\nabla_x V(t,x)|^2 dx$$

est constante sur $[0, T[$.
2) Calculer

$$\frac{d}{dt}\iint_{\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3} x\cdot\xi f(t,x,\xi)dxd\xi$$

et en déduire que

$$\iint_{\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3} x\cdot\xi f(t,x,\xi)dxd\xi \le C + tE$$

où C est une constante que l'on précisera en fonction de $f(0,\cdot,\cdot)$.
3) Montrer que

$$\frac{d}{dt}\iint_{\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3} |x|^2\sqrt{1+|\xi|^2} f(t,x,\xi)dxd\xi \le 2C + 2tE - \int_{\mathbf{R}^3} |x|^2 j(t,x)\cdot\nabla_x V(t,x)dx\,.$$

4) On suppose que le potentiel V est radial en x pour tout $t \in [0, T[$ — autrement dit, il existe une fonction U de classe C^2 sur $[0, T[\times\mathbf{R}_+$ telle que $V(t,x) = U(t,|x|)$ pour tout $t \in [0, T[$ et $x \in \mathbf{R}^3$. Soit la fonction ρ définie sur $[0, T[\times\mathbf{R}_+$ telle que

$$\rho(t,|x|) = \int_{\mathbf{R}^3} f(t,x,\xi)d\xi\,.$$

Montrer que

$$\frac{\partial U}{\partial r}(t,r) = \frac{1}{r^2}\int_0^r \rho(t,s)s^2 ds$$

et exprimer $\nabla_x V(t,x)$ en fonction de $\frac{\partial U}{\partial r}$ pour tout $t \in [0, T[$ et $x \in \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$.
5) Montrer que

$$\left|\int_{\mathbf{R}^3} |x|^2 j(t,x)\cdot\nabla_x V(t,x)dx\right| \le C'\|f(0,\cdot,\cdot)\|^2_{L^1(\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3)}$$

où C' est une constante que l'on précisera.
6) On suppose que

$$\iint_{\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3} \sqrt{1+|\xi|^2} f(t,x,\xi)dxd\xi < \tfrac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^3} |\nabla_x V(t,x)|^2 dx\,.$$

Déduire de ce qui précède une majoration sur le temps maximal d'existence d'une solution de (VPRG) dont le potentiel gravitationnel V est radial en x pour tout t.