

---

# Arbres réels et Espaces de Valuations

---

Charles FAVRE

CNRS et Université Paris 7  
Equipe Géométrie et Dynamique  
F-75251 Paris Cedex 05 France  
[favre@math.jussieu.fr](mailto:favre@math.jussieu.fr)



## Plan du mémoire

Curriculum Vitae	4–5
Activités d'encadrement	7
Originalité des travaux	9–11
Exposé synthétique des recherches	15–92
Perspectives	94–95
Liste des travaux présentés pour l'habilitation	97
Liste complète des travaux par thèmes	99–100



# Curriculum vitae



### État civil

Charles FAVRE  
Nationalité Française.  
Né le 25/12/1973 à Saint-Cloud (92).  
Marié.

### Situation professionnelle

Depuis octobre 2000 : chargé de recherche au CNRS  
à l'Institut de Mathématiques à Paris.

#### **Adresse professionnelle :**

Université Paris 7, UFR de Mathématiques  
Équipe Géométrie et Dynamique  
Case 7012, 2 place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05  
Tel : 01 44 27 54 52  
Courriel : favre@math.jussieu.fr

### Formation

- **1999-2000** : Allocataire de Recherche à Paris 11. Enseignement en DEUG.
- **1996-1999** : Thèse en mathématiques pures sous la direction du Prof. Sibony (Paris 11-Orsay) sur la dynamique des applications birationnelles de  $\mathbf{P}^2$ . Soutenance : janvier 2000.
- **1997-1998** : Licentiat en mathématiques pures sous la direction du Prof. Benedicks (KTH-Stockholm). Soutenance : novembre 1999.
- **1995-1996** : Agrégation de mathématique (rang : 13<sup>ème</sup>).
- **1994-1995** : D.E.A de mathématiques à Paris 11-Orsay. Mémoire sur le mouvement holomorphe en dynamique complexe sous la direction de N. Sibony.
- **1993-1994** : Licence et maîtrise de mathématiques à Paris 6-Jussieu.
- **Juillet 1993** : Admission à l'Ecole Normale Supérieure de Paris.

### Séjours longs à l'étranger

- **Novembre 2004** : Université de Porto Alegre, et IMPA-Rio de Janeiro, Brésil. Dans le cadre de la coopération France-Brésil.
- **Avril-juillet 2003** : RIMS, Kyoto, Japon.
- **Février 2002** : Scuola Normale Sup., Pisa, Italie.
- **Janvier 2002** : IMPA, Rio, Brésil.
- **Février-Mars 2000** : IMPA, Rio, Brésil.
- **Septembre 1997- Décembre 1998** : KTH, Stockholm, Suède.

### Intervenant invité (extrait)

- **Mai 2005** : Univ. de Marseille I.
- **Février 2005** : Institut Fourier (Grenoble).
- **Avril 2004** : Universidad Catolica del Norte (Antofagasta), Chili.
- **Mars 2004** : Harvard Univ. (Boston), USA.

- **Mai/Juillet 2003** : Titec (Tokyo), Kyushyu Univ. (Fukuoka), Nagoya Univ., Japon.
- **Mars 2003** : Scuola Normale (Pisa), Univ. di Firenze, Italie.
- **Janvier 2003** : Univ. de Rennes.
- **Décembre 2002** : Ecole Polytechnique.
- **Septembre 2002** : Univ. of Michigan, Ann Arbor, USA.
- **Mars 2002** : Univ. of Michigan, Ann Arbor (USA).
- **Décembre 2001** : Univ. de Toulouse.
- **Novembre 2001** : Univ. de Lille.
- **Février 2001** : ENS-Lyon.

### Divers

Membre de l'ACI-jeunes chercheurs *dynamique des applications polynomiales*.

Organisateur de réunions ACI d'une semaine à Paris en Oct. 2005 et Mars 2004.

Correspondant informatique de l'équipe géométrie et dynamique.

Membre de la commission de spécialistes de Paris 7 Section 25 depuis Avril 2004.



## Activités d'encadrement



### Cours

- **Août 2005** : San Pedro de Atacama, Chili, colloque international « IV Workshop on Dynamical Systems ». Mini-cours : *trees and applications* (4 heures).
- **Février-Mai 2005** : cours de M2 à l’université Paris 7 en collaboration avec R. Dujardin sur la *dynamique des applications rationnelles* (24 heures par enseignant).
- **Avril 2004** : Université Paul Sabatier, Toulouse. Mini-cours sur *dynamique et valuations* (4 heures).
- **Avril-juillet 2003** : RIMS, Kyoto, Japon. Dans le cadre de l’année “Complex dynamics” organisée au RIMS. Série de conférences sur les propriétés ergodiques des applications rationnelles (9 heures).
- **Février 2002** : Scuola Normale Sup., Pisa, Italie. Dans le cadre du semestre “Dynamical Systems”. Mini-cours sur l’équidistribution des préimages des courbes et des points pour les applications holomorphes de  $\mathbf{P}^2$  (10 heures).
- **Janvier 2002** : IMPA, Rio, Brésil. Mini-cours sur les transformations birationnelles de  $\mathbf{P}^2$  (10 heures).



**Originalité des travaux**



Nous allons présenter dans ce mémoire une partie de nos résultats obtenus depuis Septembre 2000, principalement en collaboration avec Mattias Jonsson et Juan Rivera-Letelier. Ces travaux touchent à des questions très diverses d'analyse complexe, de dynamique et d'arithmétique, mais ont tous en commun leur lien avec les arbres réels.

Si les arbres sont des objets particulièrement simples qui apparaissent dans de nombreuses questions en mathématiques, la théorie des arbres réels a connu son véritable essor grâce aux liens profonds qui la lient à la théorie géométrique des groupes. L'étude des actions isométriques de groupes sur les arbres a mené à de nombreuses applications, et nous renvoyons aux récents textes d'exposition [Sha91, Mor92, Bes02] pour plus d'informations.

Même si certains des arbres que nous regarderons apparaissent déjà dans ce contexte de la théorie des groupes, nous en ferons ici un usage complètement différent et exploiterons d'autres interprétations de ces objets, plus adaptées à nos applications. En tous cas, il est intéressant de remarquer que les propriétés générales des arbres que nous décrirons dans ce mémoire, et les applications que nous en ferons sont en grande partie *disjointes* de celles décrites dans les références citées ci-dessus.

Nous verrons essentiellement trois arbres réels différents, mais qui possèdent une structure et des interprétations tout à fait analogues. Ce sont ainsi tous des ensembles de valuations définies sur certains anneaux : l'anneau des germes de fonctions holomorphes en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  au Chapitre 3 ; l'anneau des polynômes en deux variables  $\mathbb{C}[X, Y]$  au Chapitre 4 ; enfin  $\mathbb{C}_p[T]$  pour  $p$  premier au Chapitre 5. Nous présenterons ces espaces de valuations tour à tour au Chapitre 2, en insistant à la fois sur leurs spécificités et leurs traits communs. Les chapitres suivants contiennent les applications de cette étude des arbres valuatifs.

On commence au Chapitre 3 par des questions d'analyse complexe. Ce sont elles qui ont initialement motivé notre travail avec M. Jonsson, et qui nous ont amenés à regarder les arbres réels. Le problème général est de comprendre le comportement d'une fonction plurisousharmonique au voisinage de ses singularités. On se place ici en dimension 2 complexe, et on expliquera qu'une telle fonction  $u$  détermine une fonction  $g_u$  définie sur un espace de valuations  $\mathcal{V}$  qui s'avère être un arbre réel. On montre alors que cette fonction possède des propriétés de concavité très spéciales au sens des arbres ; on peut lui appliquer un opérateur, dit « opérateur de Laplace ». Le « Laplacien » de  $g_u$  définit alors une mesure positive sur  $\mathcal{V}$ , qui décrit très précisément les singularités de  $u$ . Afin de montrer la puissance de ce type d'analyse, on esquissera la démonstration de la conjecture de Demailly-Kollàr dite d'ouverture. Les résultats de ce chapitre sont contenus dans les deux articles [FJ05b, FJ05a], et il peut servir d'introduction à la lecture de ces articles.

Le chapitre suivant résume une partie des travaux présentés en [FJ]. On s'intéresse maintenant à l'étude dynamique d'une application polynomiale  $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ , et on cherche à décrire la suite de ses degrés  $\{\deg(F^n)\}_{n \geq 0}$ . L'idée est ici de faire agir  $F$  sur l'espace des valuations représentant les diviseurs exceptionnels apparaissant lorsqu'on éclate  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  en des points de la droite à l'infini. Cet espace

est encore une fois un arbre réel. En combinant une analyse de la dynamique de  $F$  sur cet arbre, à des propriétés fines des valuations qui le composent, on verra que l'on peut décrire en détail la suite des degrés, et en déduire de nombreuses informations sur la dynamique même de  $F$ .

La troisième application est décrite au Chapitre 5, et combine arithmétique et dynamique. Nous y verrons la mise en œuvre d'un principe « adélique » dans un cadre dynamique. Soit  $R \in \mathbb{Q}(T)$  une fraction rationnelle à coefficients rationnels. Pour étudier les propriétés dynamiques de  $R$  sur  $\mathbb{Q}$ , on est amené à regarder l'action de  $R$  sur toutes les complétions de  $\mathbb{Q}$ , à la fois pour la norme archimédienne et pour toutes les normes  $p$ -adiques. Il est plus commode de travailler sur des corps algébriquement clos, on s'intéresse donc à la dynamique de  $R$  sur  $\mathbb{C}$  et sur  $\mathbb{C}_p$  pour tout  $p$  premier. Si la dynamique de  $R$  sur  $\mathbb{C}$  est relativement bien comprise, la dynamique sur les corps  $p$ -adiques l'est beaucoup moins. On va tout d'abord montrer que le célèbre Théorème de Brolin reste valide sur  $\mathbb{C}_p$  pour tout  $p$  premier. Pour ce faire, il nous faudra travailler sur un arbre réel, appelé droite projective de Berkovich, qui contient l'espace projectif standard  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$  dans son bord. Pour construire des mesures invariantes adéquates, on utilisera le même type d'opérateur de Laplace qu'au Chapitre 3. On donnera enfin une application de ces études dynamiques sur  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{C}_p$  à un problème plus spécifiquement arithmétique, concernant l'équidistribution des points de petite hauteur. Tous les résultats de ce chapitre sont contenus dans les deux publications [**FRL04**, **FRL**].

Un mot sur le style que nous avons adopté pour la rédaction de ce mémoire. Celui-ci étant d'ores et déjà long, nous avons donc exclu toute preuve précise des résultats énoncés. Nous donnons cependant des références détaillées pour guider le lecteur curieux dans la littérature existante. Nous avons de plus choisi de ne pas présenter nos résultats sous leur forme la plus générale, mais plutôt de s'en servir pour illustrer notre propos, à savoir que les arbres réels sont des objets simples mais universels, apparaissant dans de nombreuses situations inattendues. Enfin si cette introduction est restée très vague sur le contenu effectif de chaque chapitre, c'est que ce contenu est détaillé avec soin au début de chacun. On trouvera de plus à la fin de chaque chapitre une liste de références sur chaque problème concerné.

C'est enfin un grand plaisir de remercier les nombreuses personnes qui ont soutenu mes projets scientifiques tout au long de ces années, à commencer par mes plus proches collaborateurs Romain Dujardin, Mattias Jonsson, et Juan Rivera-Letelier. J'aimerais aussi remercier Bernard Teissier qui m'a introduit au monde des valuations et sans lequel ce mémoire n'existerait tout simplement pas; et tous les membres de l'ACI-jeunes chercheurs "Dynamique des applications polynomiales" pour leur enthousiasme mathématique si contagieux. Enfin ces recherches se sont essentiellement déroulées à l'Institut de Mathématiques de Jussieu, qui m'a fourni un cadre de travail exceptionnel à la fois par la diversité des scientifiques présents en son sein, que par la bonne humeur et l'efficacité de son équipe administrative et informatique.



## Bibliographie

- [Bes02] Mladen Bestvina.  $\mathbb{R}$ -trees in topology, geometry, and group theory. In *Handbook of geometric topology*, pages 55–91. North-Holland, Amsterdam, 2002.
- [FJ] Charles Favre and Mattias Jonsson. Eigenvaluations. arxiv :math.ds/0410417.
- [FJ05a] Charles Favre and Mattias Jonsson. Valuations and multiplier ideals. *J. Amer. Math. Soc.*, 18(3) :655–684 (electronic), 2005.
- [FJ05b] Charles Favre and Mattias Jonsson. Valutive analysis of planar plurisubharmonic functions. *Invent. Math.*, 162(2) :271–311, 2005.
- [FRL] Charles Favre and Juan Rivera-Letelier. Equidistribution des points de petite hauteur. arxiv :math.nt/0407471.
- [FRL04] Charles Favre and Juan Rivera-Letelier. Théorème d’équidistribution de Brolin en dynamique  $p$ -adique. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 339(4) :271–276, 2004.
- [Mor92] John W. Morgan.  $\Lambda$ -trees and their applications. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 26(1) :87–112, 1992.
- [Sha91] Peter B. Shalen. Dendrology and its applications. In *Group theory from a geometrical viewpoint (Trieste, 1990)*, pages 543–616. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1991.



# Exposé synthétique des recherches



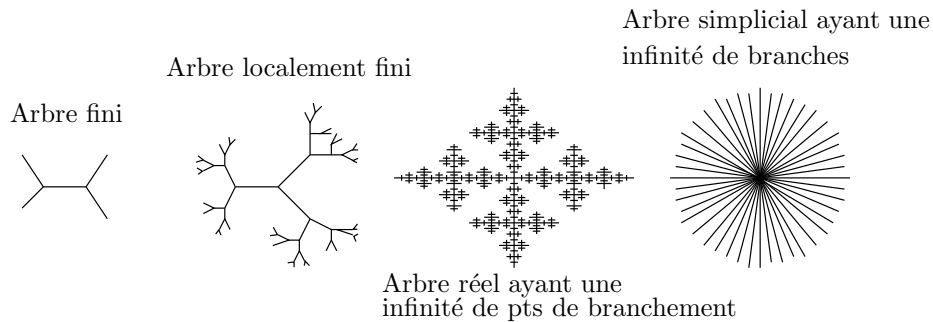
## Table des matières

Bibliographie	17
Chapitre 1. Arbres réels et opérateur de Laplace	23
1.1. Arbres	25
1.2. L'opérateur de Laplace	29
Bibliographie	37
Chapitre 2. Trois exemples d'arbres valuatifs	39
2.1. La droite projective au sens de Berkovich	39
2.2. L'arbre des valuations centrées à l'origine dans $\mathbb{C}^2$	43
2.3. Les valuations à l'infini dans $\mathbb{C}^2$	48
2.4. Comparaison entre les divers arbres valuatifs	51
Bibliographie	53
Chapitre 3. Analyse des singularités des fonctions psh	55
3.1. La trace d'une fonction psh sur $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$	57
3.2. Idéaux multiplicateurs	61
Bibliographie	67
Chapitre 4. Croissance des degrés des applications rationnelles	69
4.1. Sous-arbres de $\mathcal{V}_\infty(\mathbb{C}^2)$	71
4.2. Valuation $F$ -invariante	73
4.3. Rigidification	75
Bibliographie	81
Chapitre 5. Dynamique $p$ -adique et arithmétique	83
5.1. Dynamique des fractions rationnelles $p$ -adiques	85
5.2. Équidistribution des petits points	92
Bibliographie	99



## Arbres réels et opérateur de Laplace

Ce chapitre est consacré à l'étude générale des arbres réels. Les exemples ainsi que les applications de cette étude seront décrits aux chapitres suivants.



Un arbre réel est une réunion de segments de  $\mathbb{R}$  recollés entre eux de telle sorte qu'aucun cycle ne se forme. Ce type d'objet apparaît dans des contextes très variés en mathématiques. Les arbres réels les plus simples sont sans doute les graphes finis sans cycle, que l'on appellera par la suite *arbre fini*. En général cependant, nous n'imposerons aucune condition de finitude sur les arbres, et ceux-ci pourront donc présenter des phénomènes de ramification assez sauvages.

Les arbres réels munis de métriques, que nous appellerons *arbres métrisés*, ont été abondamment étudiés en lien avec la théorie géométrique des groupes. Nous renvoyons à [Sha91, Mor92, Bes02] pour des exposés précis sur ce type d'applications. Mentionnons simplement que dans ce contexte, le sujet principal est de comprendre la nature des actions de groupe par *isométries* sur les arbres. Nous prenons ici un chemin très différent, motivé par les applications que nous avons en tête.

Notre but est ici d'expliquer de manière assez détaillée qu'il existe sur tout arbre réel (métrisé) une « théorie du potentiel », et une « théorie de l'intersection » naturelles. Le choix de terminologie est guidé par le fait que l'on peut effectivement identifier effectivement celles-ci à des analogues de théorie du potentiel sur la droite complexe (on verra celà au Chapitre 5), et à une théorie de l'intersection sur des surfaces complexes (voir [FJ04, Chapter 8]).

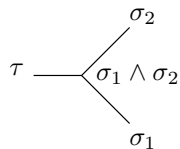
De manière vague, la théorie du potentiel consiste en les données suivantes. On fixe  $\mathcal{T}$  un arbre métrisé et on note  $\overline{\mathcal{T}}$  l'arbre obtenue en lui ajoutant ses « bouts ». Il existe alors une classe  $\mathcal{P}$  de fonctions  $g : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ , appelées *potentiels*, et une application  $\Delta$ , appelée *opérateur de Laplace*, définie sur  $\mathcal{P}$  et à valeurs dans l'espace des mesures signées sur  $\overline{\mathcal{T}}$ . Dans le cas des arbres finis,  $\mathcal{P}$  correspond aux

fonctions dont la restriction à chaque segment a pour dérivée seconde au sens des distributions une mesure (signée). Et  $\Delta$  est une combinaison du laplacien  $-\frac{d^2}{dx^2}$  sur chaque segment, et d'un opérateur de Laplace de type discret aux points de branchement.

Trois approches peuvent être envisagées pour étudier le cas général. La première promue par [BR] consiste à regarder  $\mathcal{T}$  comme réunion de ses sous-arbres finis, et de définir  $\mathcal{P}$  et  $\Delta$  par restriction à des sous-arbres finis de plus en plus grands. La seconde développée dans [Thu05] est aussi basée sur la définition de  $\Delta$  sur les sous-arbres finis, et pour une classe de fonctions dites « lisses ». L'opérateur  $\Delta$  est alors défini par dualité à la manière des distributions : l'espace des potentiels étant les fonctions dont le Laplacien est une mesure signée. Notons que les deux travaux sus-mentionnés développent en réalité une théorie du potentiel plus complète que la nôtre, analysant les fonctions harmoniques et sous-harmoniques, et définissant une version de la capacité dans le contexte des arbres.

Dans [FJ04, Chapter 7], nous avons proposé une autre approche qui consiste à définir directement l'espace des potentiels et à travailler sur l'arbre en entier sans passer par ses sous-arbres. Elle s'inspire directement de la présentation de la théorie de la mesure faite dans [Fol99]. C'est celle que nous indiquerons en §1.2. Bien qu'elle ne contienne aucune preuve, cette section reste longue, car nous avons voulu mettre en lumière les nombreux écueils techniques de notre approche. On verra au cours de l'exposition que cette théorie n'est pas seulement une extension aisée de la situation finie.

Nous nous attacherons en passant à décrire les potentiels dont le Laplacien est une mesure positive, appelées *potentiels positifs*. Ceux-ci sont caractérisés par des conditions simples, et jouent un rôle très important dans toutes les applications.



Nous avons mentionné l'existence d'une théorie de l'intersection sur un arbre réel. Celle-ci est directement reliée à la construction d'une « forme de Dirichlet » associée à l'opérateur  $\Delta$ , analogue au cas classique de la théorie du potentiel sur  $\mathbb{C}$ . La théorie de l'intersection se voit alors comme une étude des propriétés l'énergie associée à  $\Delta$ . Tout ceci intervient de façon importante dans les applications : dans notre étude des singularités des fonctions psh, voir [FJ05, Section 8] ; ainsi que dans les applications arithmétiques que nous décrirons au Chapitre 5. Mentionnons au passage que ce sont aussi ces applications arithmétiques qui ont motivé les travaux de [BR, Thu05], indépendants des nôtres sur la question.

L'objet de départ de cette théorie de l'intersection est un arbre  $\mathcal{T}$  muni d'une paramétrisation  $\alpha : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}_+$ . On peut alors définir une version du produit de Gromov sur les points en posant  $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle := \alpha(\sigma_1 \wedge \sigma_2)$ , voir figure ci-contre. Le point est que cet accouplement s'étend naturellement aux mesures positives, et qu'il induit un produit scalaire sur le sous-espace des mesures telles que  $\langle \rho, \rho \rangle < +\infty$ . De manière analogue, il existe un sous-espace des potentiels sur  $\mathcal{P}$  pour lesquels on peut définir un produit bilinéaire  $\langle g_1, g_2 \rangle := \int g_1 \Delta g_2$ . Enfin on montre



que  $\Delta$  induit une *isométrie* entre le sous-espace de  $\mathcal{P}$  des fonctions telles que  $\langle g, g \rangle < +\infty$  et le sous-espace correspondant des mesures signées.

Ce chapitre est composée de deux parties. La première contient une discussion générale sur les arbres, et permet de fixer quelques points de terminologie. La seconde contient une esquisse de la construction des potentiels et de l'opérateur  $\Delta$  sur un arbre quelconque.

## 1.1. Arbres

**1.1.1. Définitions générales.** Commençons par donner quatre définitions (non-équivalentes) d'arbre réel, que nous présentons par ordre de complexité croissante.

DEFINITION 1.1. Un *arbre réel enraciné non-métrisé* est un ensemble ordonné  $(\mathcal{T}, \leq)$  tel que

- $\mathcal{T}$  possède un unique élément minimal  $\tau_0$ , appelé la *racine* ;
- si  $\tau \in \mathcal{T}$ , l'ensemble  $\{\sigma \in \mathcal{T} ; \sigma \leq \tau\}$  est isomorphe à un intervalle réel ;
- tout ensemble totalement ordonné de  $\mathcal{T}$  est isomorphe à un sous-ensemble d'un intervalle réel.

La dernière condition est d'ordre technique, et permet d'éviter l'existence de droite longue réelle dans  $\mathcal{T}$ . Dans toute la suite, on parlera d'arbre réel enraciné pour arbre réel non-métrisé enraciné.

Pour tout couple d'éléments  $\tau_1, \tau_2$  d'un arbre, on note  $\tau_1 \wedge \tau_2 := \min\{\tau_1, \tau_2\}$ . On définit le segment reliant  $\tau_1$  à  $\tau_2$  comme l'ensemble

$$[\tau_1, \tau_2] := \{\tau \in \mathcal{T} ; \tau_1 \wedge \tau_2 \leq \tau \leq \tau_1 \text{ ou } \tau_1 \wedge \tau_2 \leq \tau \leq \tau_2\}.$$

Les morphismes d'arbres réels enracinés non-métriques sont celles qui envoient tout segment  $[\tau_0, \tau]$  sur un segment dont l'origine est la racine de l'image. On définit aussi naturellement la notion de sous-arbre d'un arbre.

Dans certaines situations (en particulier au Chapitre 5), il n'existe pas de choix naturel de racine. En oubliant la racine, on obtient la notion d'*arbre réel non-métrisé* (ou simplement arbre réel). Sans entrer dans les détails, un arbre réel (sans racine) est une classe de structures d'arbre au sens précédent qui définissent toutes les mêmes segments dans  $\mathcal{T}$ . Une telle structure est déterminée par la donnée de ses segments.

Les deux notions précédentes d'arbre admettent chacune une version métrisée.

Une *paramétrisation* d'un arbre  $\mathcal{T}$  réel enraciné est une application  $\alpha : \mathcal{T} \rightarrow [-\infty, +\infty]$  dont la restriction à chaque segment totalement ordonné induit une bijection sur son image. Un arbre enraciné muni d'une paramétrisation est appelé *arbre réel paramétré*.

Un *arbre réel métrisé* est un espace métrique dans lequel deux points arbitraires sont joints par un unique arc, et cet arc est de plus isométrique à un intervalle réel. Classiquement, ces arbres sont appelés  $\mathbb{R}$ -arbre ou simplement arbre réel dans la littérature. Cependant, nous réserverons toujours ce vocable aux arbres réels non-métrisés dans la suite, c'est-à-dire à la notion la plus faible

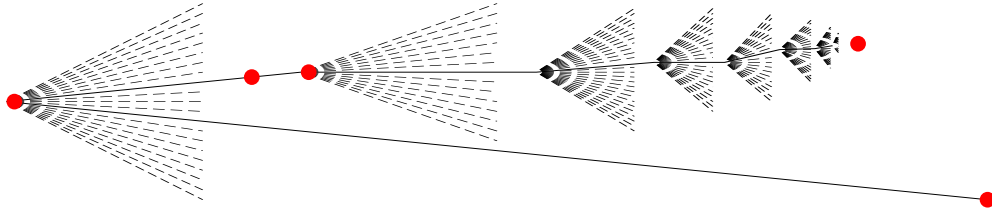


FIG. 1. Un arbre enraciné avec de gauche à droite : la racine, un point régulier, un point de branchement et deux bouts.

d'arbre. Nous renvoyons à [Sha91] pour plus d'informations et des références plus complètes sur les arbres réels métrisés.

Arbre	sans métrique	avec métrique
avec racine	arbre réel enraciné	arbre réel paramétré
sans racine	arbre réel	arbre réel métrisé

TAB. 1. Diverses notions d'arbres.

Il est facile de voir que tout arbre réel métrisé induit une structure d'arbre réel non-métrisé, dont les segments sont donnés par les arcs tracés dans  $\mathcal{T}$ .

**1.1.2. Dendrologie.** Il existe essentiellement trois types de points différents dans un arbre : les bouts, les points de branchement, et les points réguliers. Pour les définir, on va tout d'abord définir l'espace tangent en un point, ce qui correspond à l'espace des branches de l'arbre dont l'origine est ce point.

Soit donc  $\mathcal{T}$  un arbre réel (non-métrisé) et  $\tau$  un point de  $\mathcal{T}$ . On dit que deux points  $\sigma, \sigma' \in \mathcal{T} \setminus \{\tau\}$  sont équivalents ssi les deux segments  $]\tau, \sigma]$  et  $]\tau, \sigma']$  s'intersectent. Une classe d'équivalence de tels points est appelé un *vecteur tangent* en  $\tau$ , et l'ensemble des vecteurs tangents en  $\tau$  est l'*espace tangent* en  $\tau$ , noté  $T\tau$ .

- Le point  $\tau$  est un bout de  $\mathcal{T}$  si  $T\tau$  est un singleton.
- Le point  $\tau$  est un point régulier si  $T\tau$  contient exactement deux éléments.
- Le point  $\tau$  est un point de branchement si  $T\tau$  a plus de trois éléments.

La Figure 1 illustre graphiquement ces définitions. Notons qu'il serait plus convenable de parler de « direction » et de « projectivisé du cône tangent », mais nous avons préféré la terminologie plus légère et plus cohérente de vecteur et d'espace tangent.

**1.1.3. Topologie.** Tous les arbres qui nous intéresseront par la suite peuvent être munis de plusieurs topologies « naturelles » non équivalentes, chacune ayant des propriétés qui la rendent agréable pour traiter un problème spécifique, bien qu'aucune n'ait une prééminence absolue sur les autres. Afin de comprendre les enjeux autour de ces problèmes, on va maintenant décrire deux topologies différentes sur un arbre réel métrisé  $(\mathcal{T}, d)$ . Si l'on insiste sur ces définitions, c'est que leurs liens sont importants et délicats.

Soit donc  $(\mathcal{T}, d)$  un arbre réel métrisé. Muni d'une métrique, il hérite d'une topologie dont une base est donnée par l'ensemble des boules ouvertes pour  $d$ .

PROPOSITION 1.2. Supposons que l'espace tangent en  $\tau \in \mathcal{T}$  ne soit pas dénombrable. Alors le point  $\tau$  n'admet aucun voisinage compact. En particulier,  $\mathcal{T}$  n'est pas localement compact.

Avant de donner une esquisse de preuve, mentionnons que ce défaut de compacité entraîne de multiples conséquences fâcheuses, tout particulièrement en théorie de la mesure (qui constitue un élément central de la définition du laplacien, voir §1.2 ci-dessous).

DÉMONSTRATION. Pour chaque  $\vec{v} \in T\tau$ , notons  $d(\vec{v}) = \sup\{d(\tau, \sigma), \sigma \text{ représentant } \vec{v}\}$ . Comme  $T\tau$  est non dénombrable, pour tout  $\varepsilon > 0$  l'ensemble  $V = \{\vec{v} \in T\tau, d(\vec{v}) \geq 2\varepsilon\}$  est non-dénombrable. Soit  $\vec{v}_k$  une suite d'éléments de  $V$  deux à deux distincts, et  $\tau_k$  une suite de points de  $\mathcal{T}$  tels que à distance  $\varepsilon$  de  $\tau$ , et définissant  $\vec{v}_k$  en  $\tau$ . On a alors  $d(\tau_k, \tau_l) = 2\varepsilon$  pour tout  $k \neq l$ , ce qui empêche l'existence d'une sous-suite convergente. Ceci montre que  $\tau$  n'admet aucun voisinage compact.  $\square$

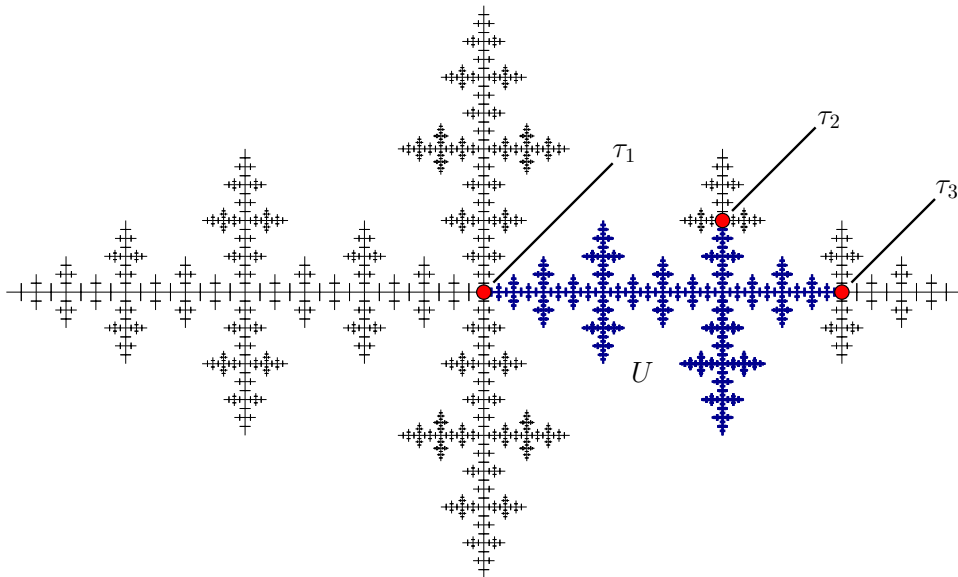


FIG. 2. Un ouvert faible  $U$  intersection de trois ensembles ouverts  $U(\vec{v}_i)$ , où  $\vec{v}_i$  est un vecteur tangent en  $\tau_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Tout ouvert faible est réunion d'ensemble de ce type.

Heureusement(!), il existe une autre topologie sur  $\mathcal{T}$  où le problème de compacité disparaît. Cette topologie que l'on appelle *topologie faible* est engendrée par les ensembles de la forme

$$U(\vec{v}) := \{\sigma \in \mathcal{T} \setminus \{\tau\} ; \sigma \text{ représente } \vec{v}\}.$$

où  $\vec{v}$  est un vecteur tangent en  $\tau$ , voir Figure 2. En d'autres termes, un ouvert faible est une union d'intersections finies de tels ensembles. On parlera d'*ouvert*

*distingué* lorsque  $U$  est une intersection finie d'ouverts du type  $U(\vec{v})$ . Remarquons ainsi que le bord de tout ouvert distingué est toujours fini. Cette topologie (bien que non métrisable en général) présente de bonnes propriétés de finitude. C'est cette topologie qui est la mieux adaptée pour l'étude des mesures sur un arbre.

Il se peut qu'un arbre métrisé ne soit pas faiblement compact, cependant l'obstruction à la compacité est relativement simple à décrire.

**DEFINITION 1.3.** Un arbre réel enraciné  $(\mathcal{T}, \leq)$  est dit *complet* au sens des arbres, si toute suite croissante admet un majorant. Un arbre réel est complet si l'un de (ou de manière équivalente tous) ses arbres réels enracinés sous-jacents est complet.

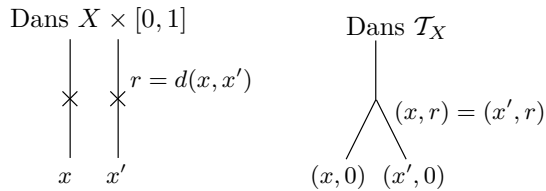
Tout arbre réel enraciné admet une complétion que l'on peut construire en ajoutant comme points idéaux les suites croissantes non bornées dans  $\mathcal{T}$  (modulo une relation d'équivalence convenable). Si l'on part d'un arbre réel, on définit sa complétion comme la complétion d'un de ses arbres réels enracinés sous-jacents. On vérifie facilement que toutes ces complétions sont isomorphes.

On peut maintenant énoncer la remarque fondamentale suivante que nous élevons au rang de théorème pour marquer son importance (plus que sa difficulté). Nous renvoyons à [FJ04, Proposition 7.13] pour une preuve.

**THÉORÈME 1.1.** *Soit  $(\mathcal{T}, d)$  un arbre réel métrisé. Alors la complétion (au sens des arbres) de  $\mathcal{T}$  est faiblement compacte.*

Il faut faire attention à ne pas confondre les deux notions de complétude : au sens métrique, et au sens des arbres définie précédemment. On peut ainsi garder en mémoire l'exemple simple suivant. Prenons  $\mathcal{T} = \mathbb{R}$  muni de la métrique (complète) standard. Sa complétion au sens des arbres est alors l'arbre  $\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  muni de la structure standard d'arbre de telle sorte que les deux points  $\pm\infty$  soient des bouts. La topologie faible sur  $\overline{\mathbb{R}}$  est induite (par exemple) par la métrique  $d(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$  et est bien compacte.

**1.1.4. Exemples.** Nous verrons plusieurs exemples d'arbres réels dans la suite, mais on peut tout de suite mentionner la construction générale suivante, qui indique immédiatement le lien entre ultra-distances et arbres, et qui réapparaîtra en §2.1.1.



Rappelons qu'une ultra-distance  $d$  sur un espace  $X$  est une distance qui vérifie l'inégalité forte du triangle  $d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(y, z)\}$  pour tout  $x, y, z \in X$ . Soit donc  $(X, d_X)$  un espace ultramétrique que l'on suppose de diamètre 1. On définit alors une relation d'équivalence  $\sim$  sur  $X \times [0, 1]$  en posant  $(x, s) \sim (y, t)$  ssi  $d(x, y) \leq s = t$ . Notons que  $(x, 1) \sim (y, 1)$  pour tout  $x, y$ . L'ensemble  $\mathcal{T}_X$

des classes d'équivalence est un arbre enraciné en  $(x, 1)$  si on le munit de l'ordre partiel  $(x, s) \leq (y, t)$  si et seulement si  $d(x, y) \leq s \leq t$ . On définit aussi la métrique  $d((x, s), (x, t)) = |s - t|$  et  $d(\sigma, \tau) = d(\sigma, \sigma \wedge \tau) + d(\tau, \sigma \wedge \tau)$  si  $\sigma, \tau \in \mathcal{T}_X$ . L'espace  $(\mathcal{T}_X, d)$  est alors un arbre métrisé, dont les bouts sont en bijection avec la réunion de  $X$  et de la racine. On peut le paramétrer en posant  $\alpha(x, t) = t$  (ou  $t^{-1}$ !).

Notons que si le diamètre de toute boule de rayon  $r$  est effectivement égal à  $r$ , alors on peut interpréter  $(x, t) \in \mathcal{T}_X$  comme la boule fermée de rayon  $t$  dans  $X$  et centrée en  $x$ .

## 1.2. L'opérateur de Laplace

Le plan de cette section est le suivant. On décrit en §1.2.1 la correspondance de base sur la droite réelle dont s'inspire la définition générale de l'opérateur de Laplace. On traite en §1.2.2 le cas des arbres réels paramétrés. Le §1.2.3 est consacré à une classe importante de potentiels, ceux dont le Laplacien est une mesure positive. Puis, on passe au cas général des arbres réels métrisés en §1.2.4. La dernière partie est consacrée à la construction d'une forme d'intersection sur les mesures et les potentiels.

**1.2.1. Le cas sans point de branchement.** C'est un fait standard que les mesures positives de masse finie sur  $\mathbb{R}$  peuvent être identifiées soit avec les fonctions décroissantes soit avec les fonctions décroissantes et concaves (modulo certaines normalisations). Plus précisément, on a

PROPOSITION 1.4. Les objets suivants sont en correspondance biunivoque naturelle les uns avec les autres :

- (i) mesures positives de masse finie  $\rho$  sur  $\mathbb{R}$ ;
- (ii) fonctions décroissantes continues à gauche  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $f(\infty) = 0$ ;
- (iii) fonctions concaves croissantes  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $g(0) = 0$  et  $g'(\infty) = 0$ .

La correspondance se fait de la manière suivante :

- à la mesure  $\rho$  est associée la fonction  $f(x) = \rho[x, \infty)$ ;
- à la fonction  $f$  est associée la fonction  $g(x) = \int_0^x f(y) dy$ ;
- à la fonction  $g$  est associée la mesure  $\rho = -d^2g/dx^2$ .

C'est cette correspondance que nous allons étendre au cas des arbres métrisés quelconques. Pour ce faire, il nous faudra tout d'abord étendre la propositions précédente au cas des mesures complexes à la place de mesures positives en (i). Les fonctions correspondantes en (ii) sont alors connues sous le nom de fonctions à variation bornée. Leurs analogues en (iii) sont caractérisés par le fait d'avoir une mesure complexe comme dérivée seconde (au sens des distributions).

Cette extension est tout à fait classique. Pour passer au cas général (et délicat) des arbres métrisés quelconques, il faut contrôler la situation aux points de branchement. Ceci est fait en redéfinissant les notions de « fonctions croissantes », « fonctions concaves » et « fonctions à variation bornée », qui prennent en compte les branchements apparaissant au sein de l'arbre.

Comme nous l'avons mentionné, aucune borne n'est imposée a priori sur le nombre de branchements de l'arbre. On verra cependant, que tous les objets qui

nous intéresseront, les mesures, les fonctions concaves, ou à variation bornée, vivent toutes sur des complétions de réunions d'arbres finis.

**1.2.2. Le Laplacien sur un arbre paramétré.** Dans cette section, on se place sous les hypothèses suivantes :  $\mathcal{T}$  est un arbre réel paramétré ; on note  $\tau_0$  sa racine et  $\leq$  l'ordre naturel sur  $\mathcal{T}$  dont  $\tau_0$  est l'unique élément minimal ;  $\alpha$  est une paramétrisation croissante de  $\mathcal{T}$  à valeurs dans  $] -\infty, +\infty]$ . On note aussi  $\overline{\mathcal{T}}$  le complété (en tant qu'arbre) de  $\mathcal{T}$ . On le munit de la topologie faible, pour lequel il est compact par le Théorème 1.1. On notera  $\mathcal{M}$  l'ensemble des mesures complexes de masse finie définies sur la tribu des boréliens (faibles) de  $\overline{\mathcal{T}}$ , et  $\mathcal{M}^+$  le sous-ensemble des mesures positives sur  $\overline{\mathcal{T}}$ .

Il est démontré dans [FJ04, Proposition 7.13] que toute mesure complexe sur un arbre est régulière. Autrement dit, par le théorème de Riesz, l'espace  $\mathcal{M}$  est en bijection avec l'ensemble des opérateurs continus sur l'espace des fonctions continues par l'application  $\rho \mapsto \int f d\rho$ . On met sur  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}^+$  la topologie de la convergence vague :  $\rho_n \rightarrow \rho$  ssi  $\int f d\rho_n \rightarrow \int f d\rho$  pour toute fonction continue  $f$  sur  $\mathcal{T}$  (ou  $\overline{\mathcal{T}}$  ce qui est équivalent). Pour cette topologie l'ensemble des mesures positives de masse 1 forme un compact.

Le Laplacien  $\Delta$  est un opérateur défini sur une certaine classe de fonctions  $\mathcal{P}$  et à valeurs dans les mesures boréliennes (complexes) de  $\mathcal{T}$ .

1.2.2.1. *Construction.* Notre premier objectif est de définir  $\mathcal{P}$ . Cela se fait en deux temps, en passant tout d'abord par une classe intermédiaire de fonctions.

DEFINITION 1.5 (Fonction à variation bornée). Soient  $f : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{C}$ , et  $F \subset \mathcal{T}$  un ensemble fini. On note  $F_{\max}$  l'ensemble des éléments maximaux de  $F$ . On écrit  $\sigma \succ \tau$  lorsque  $\sigma, \tau \in F$  et  $\sigma$  est un successeur immédiat de  $\tau$  dans  $F$ , i.e.  $\sigma > \tau$  et il n'existe aucun  $\sigma' \in F$  avec  $\tau < \sigma' < \sigma$ . On définit la variation de  $f$  sur  $F$  par

$$V(f; F) := \sum_{F \setminus F_{\max}} |f(\tau) - \sum_{\sigma \succ \tau} f(\sigma)| .$$

Si  $F = F_{\max}$ , par convention  $V(f; F) = 0$ . On pose alors  $TV(f) = \sup_F V(f; F)$ , et on dira que  $f$  est à variation bornée si  $TV(f) < +\infty$ .

Prenons maintenant une mesure complexe  $\rho$  sur  $\overline{\mathcal{T}}$  et posons  $I\rho(\tau) = \rho\{\sigma \geq \tau\}$ . Il est facile de vérifier que  $I\rho$  est toujours une fonction à variation bornée. Elle vérifie de plus la propriété de régularité suivante :  $I\rho$  est continue à gauche sur tout segment  $[\tau_0, \tau]$ .

THÉORÈME 1.2. [FJ04, Theorem 7.36] *Soit  $f : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction à variation bornée, continue à gauche. Alors il existe une unique mesure borélienne complexe  $\rho$  définie sur le complété  $\overline{\mathcal{T}}$  de  $\mathcal{T}$  en tant qu'arbre et telle que*

$$\rho\{\sigma \geq \tau\} = f(\tau) \text{ pour tout } \tau \in \mathcal{T}^0 .$$

On notera cette mesure  $df := \rho$ .

Notons que  $f(\tau_0) = \rho(\overline{\mathcal{T}})$ .

REMARQUE 1.6. Pour être tout à fait précis, on doit aussi imposer la condition technique supplémentaire :  $f \equiv 0$  sur les bouts de  $\mathcal{T}$ .

Si  $f$  est une fonction à variation bornée arbitraire, on pose  $\text{Reg}(f)(\tau) := \lim_{\sigma \uparrow \tau} f(\sigma)$ . Cette fonction est encore à variation bornée, et est de plus continue à gauche. On peut donc définir  $df := d(\text{Reg}(f))$ .

DEFINITION 1.7 (Classe  $\mathcal{P}$ ). Une fonction  $g : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$  appartient à la classe  $\mathcal{P}$  ssi il existe une constante  $C \in \mathbb{R}$  et  $f$  à variation bornée telles que

$$g(\tau) = C + \int_0^{d(\tau_0, \tau)} f(\sigma_t) dt .$$

où  $\sigma_t$  est l'unique élément de  $[\tau_0, \tau]$  avec  $\alpha(\sigma_t) = t$ . Pour simplifier, on notera  $g = C + \int f d\alpha$ , ou même  $C + \int f$  si la paramétrisation est claire de par le contexte.

Si  $g$  est donnée dans  $\mathcal{P}$ , la fonction  $f$  n'est pas déterminée uniquement. Pour toute autre fonction  $f'$  à variation bornée, telle que  $f = f'$  hors d'un ensemble dénombrable de points sur tout segment  $[\tau_0, \tau]$ , on a encore  $g = C + \int f' d\alpha$ . Réciproquement, si  $\int f' d\alpha = \int f d\alpha$  avec  $f$  et  $f'$  à variation bornée, alors  $f = f'$  hors d'un nombre dénombrable de points sur tout segment. En particulier, les deux fonctions  $\text{Reg}(f)$  et  $\text{Reg}(f')$  coïncident sur  $\mathcal{T} \setminus \{\tau_0\}$ . Sur cet ensemble, on pose  $\delta g := \text{Reg}(f)$ . On peut montrer que  $\delta g$  est égale à la dérivée à gauche de  $g$ . À la racine  $\tau_0$ , divers choix sont possibles. Par convention, on posera  $\delta g(\tau_0) := g(\tau_0)/\alpha(\tau_0)$ . Notons que lorsque  $\alpha(\tau_0) = 0$ , on a toujours  $g(\tau_0) = 0$ , et que donc la seule fonction constante appartenant à  $\mathcal{P}$  est la fonction identiquement nulle !

DEFINITION 1.8 (Opérateur de Laplace). Pour  $g \in \mathcal{P}$ , on pose  $\Delta g := d(\delta g)$ . C'est une mesure complexe sur  $\overline{\mathcal{T}}$ .

La raison principale pour le choix de notre convention à l'origine réside dans l'égalité agréable suivante.

PROPOSITION 1.9. Soit  $\rho$  une mesure signée, et posons

$$g_\rho(\tau) := \int_{\overline{\mathcal{T}}} \alpha(\tau \wedge \sigma) d\rho(\sigma) . \quad (1)$$

Alors cette fonction appartient à  $\mathcal{P}$ , et on a  $\Delta g_\rho = \rho$ .

En particulier, si  $\mathbf{1}$  est la fonction constante égale à 1, alors  $\alpha(\tau_0)\Delta\mathbf{1} = \delta_{\tau_0}$ . En général, on a  $\alpha(\tau_0)\Delta g(\mathcal{T}) = g(\tau_0)$ .

THÉORÈME 1.3. [FJ04, Theorem 7.50] *Soit  $\mathcal{T}$  un arbre réel paramétré, tel que  $\alpha(\tau_0) \neq 0$ . Alors l'application  $\Delta : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{M}$  est un isomorphisme, dont la réciproque est donnée par  $\rho \in \mathcal{M} \mapsto g_\rho \in \mathcal{P}$ .*

Ce résultat reste valide lorsque  $\alpha(\tau_0) = 0$ , si  $\mathcal{M}$  est l'espace des mesures signées ne chargeant pas la racine.

Enfin (1) permet de comprendre assez simplement l'influence du choix de la paramétrisation sur la définition de l'opérateur de Laplace. En effet, on a la

PROPOSITION 1.10. Soit  $\mathcal{T}$  un arbre réel muni d'une paramétrisation  $\alpha$  telle que  $\alpha(\tau_0) \neq 0$ . Notons  $\alpha' := C\alpha + D\alpha(\tau_0)$  une autre paramétrisation, avec  $C \in \mathbb{R}^*$

et  $D \in \mathbb{R}$ . Alors, tout potentiel  $g$  pour  $(\mathcal{T}, \alpha')$  est un potentiel pour  $(\mathcal{T}, \alpha)$ , et on a

$$\Delta'g = \frac{1}{C}\Delta'g - \frac{Dg(\tau_0)}{C\alpha'(\tau_0)}\delta_{\tau_0}$$

où  $\Delta$  (resp.  $\Delta'$ ) dénote l'opérateur de Laplace pour  $\alpha$  (resp. pour  $\alpha'$ ).

Notons que lorsque  $\alpha'(\tau_0) = 0$ , tout potentiel  $g$  vérifie  $g(\tau_0) = 0$ , et dans ce cas le second terme du membre de droite de la dernière équation disparaît.

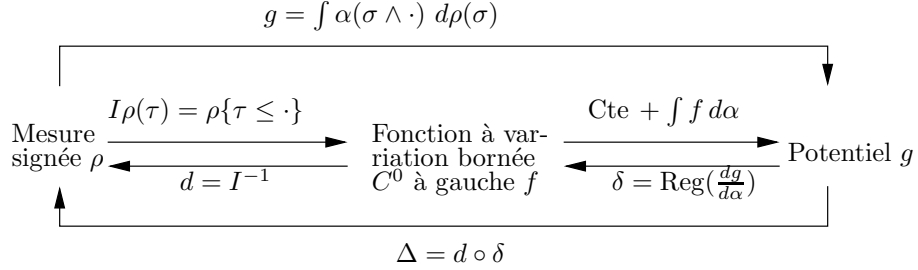


FIG. 3. Tableau récapitulatif

1.2.2.2. *Cas des arbres finis.* Afin de mieux saisir les définitions précédentes, on va décrire la situation dans le cas des arbres finis (c'est-à-dire dont le nombre de bouts est fini). Supposons tout d'abord que  $\mathcal{T}$  soit un segment, disons  $\mathcal{T} = [0, 1]$  muni de l'ordre naturel, et paramétré par  $\alpha(t) = 1+t$ . Une fonction  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  appartient à  $\mathcal{P}$  ssi sa dérivée seconde (au sens des distributions) est une mesure complexe. On a alors  $\Delta g = -\frac{d^2g}{dt^2}$ ,  $\Delta g\{0\} = g(0) - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{dg}{dt}$ ,  $\Delta g\{1\} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{dg}{dt}$ .

Si  $\mathcal{T}$  est maintenant un arbre fini, c'est une union finie disjointe de segments ouverts et de points  $\mathcal{T} = \cup I_j \cup \{\tau_j\}$ . Comme précédemment,  $g \in \mathcal{P}$  ssi sa dérivée seconde sur  $\cup I_j$  est une mesure complexe. Pour décrire  $\Delta g$ , nous aurons besoin de la définition suivante.

DEFINITION 1.11. Soit  $(\mathcal{T}, d)$  un arbre réel métrique,  $\tau \in \mathcal{T}$ ,  $\vec{v}$  un vecteur tangent en  $\tau$  et  $g : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. On définit la dérivée de  $g$  le long de  $\vec{v}$  par

$$D_{\vec{v}}g := \lim_{\sigma \rightarrow \tau, \sigma \in [\tau, \tau']} \frac{g(\sigma) - g(\tau)}{d(\sigma, \tau)},$$

où  $\tau'$  est fixé de telle sorte qu'il détermine  $\vec{v}$  en  $\tau$ .

Si  $g = C + \int f d\alpha$ , où  $f$  est à variation bornée, on vérifie que  $D_{\vec{v}}g$  existe pour tout vecteur tangent  $\vec{v}$  en tout point  $\tau \in \mathcal{T}$ .

Revenons à la situation  $\mathcal{T} = \cup I_j \cup \{\tau_j\}$ . Tout point  $\tau_j$  admet un nombre fini de vecteurs tangents, et on a

$$\Delta g|_{I_j} = -\frac{d^2g}{d\alpha^2}; \text{ et } \begin{cases} \Delta g\{\tau_j\} = -\sum_{\vec{v} \in T_{\tau_j}} D_{\vec{v}}g \text{ lorsque } j \neq 0 \\ \Delta g\{\tau_0\} = \frac{g(\tau_0)}{\alpha(\tau_0)} - \sum_{\vec{v} \in T_{\tau_0}} D_{\vec{v}}g. \end{cases}$$

On notera ici le rôle particulier joué par la racine  $\tau_0$ , qui résulte de nos conventions.



**1.2.3. Potentiels positifs.** Il existe une classe particulièrement importante de potentiels, qui sont associés aux mesures positives. Sur cet espace de potentiels,  $\Delta$  jouit de propriétés de continuité remarquables, que nous allons maintenant expliciter.

DEFINITION 1.12. Tout potentiel  $g : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $\Delta g \geq 0$  est dit *potentiel positif*. On note  $\mathcal{P}^+$  l'ensemble des potentiels positifs.

PROPOSITION 1.13. Une fonction  $g : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$  est un potentiel positif ssi

- la restriction de  $g$  à tout segment totalement ordonné est positive, croissante et concave ;
- $\sum_{\bar{v} \in T_\tau} D_{\bar{v}}g \leq 0$  pour tout élément  $\tau \neq \tau_0 \in \mathcal{T}^0$ .
- $g(\tau_0)/\alpha(\tau_0) + \sum_{\bar{v} \in T_{\tau_0}} D_{\bar{v}}g \leq 0$ .

THÉORÈME 1.4. [FJ04, Theorem 7.64] *Soit  $\mathcal{T}$  un arbre réel paramétré par  $\alpha$ , avec  $\alpha(\tau_0) \neq 0$ . Alors l'espace  $\mathcal{P}^+$  des potentiels positifs est un cône convexe strict de  $\mathcal{P}$ , fermé pour la topologie de la convergence simple. De plus, l'application  $\Delta : \mathcal{P}^+ \rightarrow \mathcal{M}^+$  est un homéomorphisme, si  $\mathcal{P}^+$  est muni de la topologie de la convergence simple, et  $\mathcal{M}^+$  de la topologie vague des mesures.*

Ce résultat est extrêmement utile, car il implique en particulier des résultats de compacité pour les potentiels positifs.

**1.2.4. Le laplacien sur un arbre métrique.** On fixe maintenant  $(\mathcal{T}, d)$  un arbre réel métrique. Notre but est de définir dans ce cadre un opérateur  $\Delta$  agissant sur une classe de fonctions  $\mathcal{P}$  et à valeurs dans l'ensemble des mesures boréliennes complexes sur  $\overline{\mathcal{T}}$ . L'idée est de se ramener à la situation précédente en fixant arbitrairement une racine  $\tau_0$ , puis de montrer que les objets ainsi définis ne dépendent pas de  $\tau_0$ , au moins dans  $\mathcal{T} \setminus \{\tau_0\}$ . Plus précisément, on va voir que la construction de  $\Delta$  se localise dans tout ouvert distingué.

Comme à la section précédente, on note  $\overline{\mathcal{T}}$  le complété de  $\mathcal{T}$  en tant qu'arbre. C'est un arbre faiblement compact.

1.2.4.1. *Construction.* Soit donc  $U \subset \overline{\mathcal{T}}$  un ouvert distingué. L'ensemble  $\partial U := \overline{U} \setminus U$  est de cardinalité finie, que l'on supposera toujours *inclus dans*  $\mathcal{T}$ . On fixe tout d'abord un élément  $\tau_0$  dans cet ensemble. On dira qu'une fonction  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  appartient à  $\mathcal{P}_0(U)$  ssi il existe une fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  à variation bornée, et  $C \in \mathbb{R}$  tels que  $g(\tau) = C + \int_0^{d(\tau_0, \tau)} f(\sigma_t^0) dt$ . Ici  $\sigma_t^0$  est l'unique point du segment  $[\tau_0, \tau]$  à distance  $t$  de  $\tau_0$ . Pour  $g$  dans  $\mathcal{P}_0(U)$ , on pose comme en §1.2.2  $\Delta_0 g := d(\text{Reg}_0(f))$ . Ici  $\text{Reg}_0(f)$  est la régularisée à gauche de  $f$ , c'est-à-dire  $\text{Reg}_0(f)(\tau) := \lim_{\sigma \rightarrow \tau, \sigma \in [\tau_0, \tau]} f(\sigma)$ .

Les indices apparaissant dans  $\text{Reg}_0, \Delta_0, \mathcal{P}_0$  se réfèrent tous à  $\tau_0$ . Le résultat suivant dit que  $\mathcal{P}_0$  et  $\Delta_0 g$  ne dépendent pas du choix de  $\tau_0$ .

PROPOSITION-DÉFINITION 1.14. Soit  $U \subset \overline{\mathcal{T}}$  un ouvert distingué, tel que  $\overline{U} \setminus U$  est inclus dans  $\mathcal{T}$ . Prenons  $\tau_0 \neq \tau_1 \in \overline{U} \setminus U$ .

Alors les espaces fonctionnels  $\mathcal{P}_0$  et  $\mathcal{P}_1$  coïncident. On les note  $\mathcal{P}(U)$ . Pour toute fonction  $g \in \mathcal{P}(U)$ , on a de plus  $\Delta_0 g = \Delta_1 g$  dans  $U$ . On notera cette mesure  $\Delta g$ .

On ne va pas démontrer cette proposition. Insistons simplement sur le fait qu'une fonction à variation bornée pour l'arbre enraciné en  $\tau_0$  n'est pas nécessairement à variation bornée lorsque l'on change la racine en  $\tau_1$ . Cependant, on montre que l'intégrale d'une fonction à variation bornée (pour la racine en  $\tau_0$ ) est aussi l'intégrale d'une (autre) fonction à variation bornée (pour la racine en  $\tau_1$ ).

Notons de plus que les mesures  $\Delta_0 g$  et  $\Delta_1 g$  sont en réalité définies sur la complétion  $\overline{U}$  qui contient les points  $\tau_0$  et  $\tau_1$ , mais que ces mesures chargent en général ces derniers points avec des poids différents. Ce que nous dit la proposition ci-dessus, c'est que leurs restrictions à  $U$  coïncident toujours.

On peut maintenant passer au cas d'un arbre réel métrique quelconque. Soit  $U \subset V$  deux ouverts distingués de  $\overline{\mathcal{T}}$ , tels que  $\partial U, \partial V \subset \mathcal{T}$ . La restriction à  $U$  d'une fonction de  $V$  à variation bornée est encore à variation bornée. Le morphisme de restriction  $g \rightarrow g|_U$  est donc bien défini de  $\mathcal{P}(V)$  dans  $\mathcal{P}(U)$ . Si maintenant  $U$  et  $V$  sont deux ouverts distingués arbitraires, leur intersection et leur union le sont encore. Prenons  $g_U \in \mathcal{P}(U)$  et  $g_V \in \mathcal{P}(V)$  coïncidant sur  $U \cap V$ . On vérifie alors que la fonction  $g$  égale à  $g_U$  sur  $U$  et  $g_V$  sur  $V$  est aussi à variation bornée. Ces propriétés nous permettent de poser la définition suivante.

**DEFINITION 1.15.** Le faisceau  $\mathcal{P}$  est par définition le faisceau dont la fibre sur un ouvert distingué  $U \subset \overline{\mathcal{T}}$  avec  $\partial U \subset \mathcal{T}$  est donnée par  $\mathcal{P}(U)$ . On notera par abus  $\mathcal{P}$  les sections globales de ce faisceau.

Pour toute fonction  $g \in \mathcal{P}$ , on définit la mesure borélienne  $\Delta g$  de telle sorte que  $\Delta g|_U = \Delta_U g$  pour tout ouvert distingué  $U$ . Ici  $\Delta_U$  est l'opérateur défini précédemment sur  $\mathcal{P}(U)$ .

La proposition suivante est une conséquence immédiate des définitions ci-dessus, et permet de faire de nombreux calculs.

**PROPOSITION 1.16.** On fixe un arbre réel métrique  $\mathcal{T}$ .

(1) Soient  $g \in \mathcal{P}$  et  $\tau \in \mathcal{T}$ . Alors

$$\Delta g\{\tau\} = - \sum_{T\tau} D_{\vec{v}} g \text{ lorsque } \tau \in \mathcal{T}; \quad (2)$$

$$\Delta g\{\tau\} = \lim_{\vec{v} \rightarrow \tau} D_{\vec{v}} g \text{ lorsque } \tau \in \overline{\mathcal{T}} \setminus \mathcal{T}. \quad (3)$$

Ici  $\vec{v} \rightarrow \tau$  signifie que  $\vec{v}$  est le vecteur tangent en  $\tau' \leq \tau$  déterminé par  $\tau$  et  $\tau'$  croît vers  $\tau$ .

(2) Soient  $g \in \mathcal{P}$  et  $\tau_0 \in \mathcal{T}$ . Notons  $\leq$  la relation d'ordre compatible avec la structure d'arbre de  $\mathcal{T}$  et dont la racine est  $\tau_0$ . Alors  $\Delta g\{\sigma \geq \tau\}$  est donnée par la dérivée à gauche de  $g$  en  $\tau$  pour tout  $\tau \neq \tau_0$ .

**1.2.4.2. Positivité et continuité.** Dans le cas des arbres métrisés sans racine, tout potentiel positif au sens de §1.2.3 est une fonction constante. Plus généralement, on a

**PROPOSITION 1.17.** Sur un arbre réel métrique  $(\mathcal{T}, d)$ . Une mesure  $\rho$  peut s'écrire  $\rho = \Delta g$  pour  $g \in \mathcal{P}$  ssi  $\rho(\overline{\mathcal{T}}) = 0$ .

Toute fonction  $g \in \mathcal{P}$  telle que  $\Delta g \equiv 0$  est constante sur  $\mathcal{T}$ . L'opérateur de Laplace donne donc une bijection entre  $\mathcal{P}$  modulo les fonctions constantes et l'ensemble des mesures  $\rho$  telles que  $\rho(\overline{\mathcal{T}}) = 0$ .

Bien qu'il n'existe pas de potentiels positifs, il est possible de montrer certaines propriétés de continuité et de compacité du même style que celles évoquées au Théorème 1.3, et ce pour des sous-classes de l'ensemble des potentiels.

Notons que le sous-espace  $\mathcal{F}$  ci-dessous jouit essentiellement des mêmes propriétés que l'espace des fonctions quasi-plurisousharmoniques (par rapport à une forme lisse fixée) définies sur une variété complexe compacte.

**THÉORÈME 1.5.** *Soit  $\mathcal{T}$  un arbre réel métrique. Fixons  $\tau_0$  un point de  $\mathcal{T}$ . Notons  $\mathcal{F}$  l'espace des fonctions  $g \in \mathcal{P}$  telle que  $\delta_{\tau_0} + \Delta g$  soit une mesure positive.*

(i) *Si  $g_n \in \mathcal{F}$  converge ponctuellement vers une fonction  $g$ , celle-ci appartient à  $\mathcal{F}$  et on a  $\Delta g_n \rightarrow \Delta g$  vaguement.*

(ii) *Soit  $\rho_n = \delta_{\tau_0} + \Delta g_n$  une suite de mesures de probabilité convergeant vaguement vers  $\rho = \delta_{\tau_0} + \Delta g$ , et supposons que  $\{g_n\}$  soit bornée inférieurement en un point de  $\mathcal{T}$ . Alors il existe une sous-suite  $g_{n_k}$  convergente ponctuellement vers  $g \neq -\infty$ .*

**1.2.5. Positivité et produit d'intersection.** On se place ici dans la situation suivante :  $\mathcal{T}$  est un arbre réel enraciné en  $\tau_0$ , muni d'une paramétrisation positive finie  $\alpha : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}_+$ . On note  $\overline{\mathcal{T}}$  le complété de  $\mathcal{T}$  en tant qu'arbre. Celui est naturellement muni d'une unique paramétrisation  $\alpha : \overline{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$  étendant  $\alpha$ . Notons qu'en général,  $\alpha$  peut prendre la valeur  $+\infty$  pour des points de  $\overline{\mathcal{T}} \setminus \mathcal{T}$ .

Si  $\sigma_1, \sigma_2 \in \overline{\mathcal{T}}$ , on définit l'accouplement

$$\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle := \alpha(\sigma_1 \wedge \sigma_2) .$$

C'est un élément de  $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ , fini si  $\sigma_1$  ou  $\sigma_2$  appartient à  $\mathcal{T}$ .

**REMARQUE 1.18.** Dans le cas où  $\alpha$  est la paramétrisation donnée par la distance à la racine, l'accouplement ainsi défini coïncide avec le produit de Gromov.

On peut étendre cet accouplement aux mesures positives en posant

$$\langle \rho_1, \rho_2 \rangle := \int \alpha(\sigma_1 \wedge \sigma_2) d\rho_1(\sigma_1) \otimes d\rho_2(\sigma_2) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} .$$

Le théorème de Fubini donne immédiatement

$$\langle \rho_1, \rho_2 \rangle = \int g_{\rho_1} d\rho_2 = \int g_{\rho_2} d\rho_1 , \quad (4)$$

avec  $g_{\rho_i} := \int \alpha(\cdot \wedge \tau) d\rho_i(\tau)$ , voir (1).

**DEFINITION 1.19.** Soient  $g_1, g_2 : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}_+$  deux potentiels positifs. On définit leur accouplement par la formule  $\langle g_1, g_2 \rangle := \int g_1 \Delta g_2$ .

L'équation (4) montre que cet accouplement est bien symétrique.

Le fait principal est qu'une extension adéquate de cet accouplement aux mesures signées et aux potentiels (non nécessairement positifs) munit des sous-espaces de ceux-ci d'une structure d'espace pré-hilbertien réel pour lesquels  $\Delta$  devient une isométrie. Tout ceci repose sur le calcul suivant.

THÉORÈME 1.6. [FJ04, Theorem 7.73] *Soient  $f_1, f_2 : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions à variation bornée telles que  $\rho_i := \delta f_i$  soient des mesures positives. Alors*

$$\langle \rho_1, \rho_2 \rangle = \alpha(\tau_0) f_1(\tau_0) f_2(\tau_0) + \int_{\overline{\mathcal{T}}} f_1 f_2 d\lambda ,$$

où  $\lambda$  est la mesure de Hausdorff 1-dimensionnelle sur  $\mathcal{T}$ .

Notons qu'en général, il peut arriver que l'intégrale  $\int_{\overline{\mathcal{T}}} f_1 f_2 d\lambda$  soit infinie. L'égalité ci-dessus dit que ceci arrive exactement lorsque  $\langle \rho_1, \rho_2 \rangle$  est aussi infini.

DEFINITION 1.20. Soit  $\mathcal{M}_0$  l'ensemble des mesures  $\rho$  signées dont la mesure trace vérifie  $\langle |\rho|, |\rho| \rangle < +\infty$ . Notons  $\mathcal{P}_0$  l'espace des potentiels dont le Laplacien appartient à  $\mathcal{M}_0$ .

THÉORÈME 1.7. [FJ04, Theorem 7.83] *Les deux espaces vectoriels  $\mathcal{M}_0, \mathcal{P}_0$  sont des espaces pré-hilbertiens réels, et l'application  $\Delta : \mathcal{P}_0 \rightarrow \mathcal{M}_0$  est une isométrie de  $\mathcal{P}_0$  sur  $\mathcal{M}_0$ .*

En dehors de son aspect fondamental, ce résultat est utile car il montre que les inégalités de Cauchy-Schwartz sont valides pour  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Ainsi, si  $\rho_n \in \mathcal{M}_0$  est une suite de mesures pour lesquelles  $\langle \rho_n, \rho_n \rangle \rightarrow 0$ , on a  $\int g d\rho_n \rightarrow 0$  pour toute fonction positive  $g \in \mathcal{P}_0$ , et en particulier,  $\rho_n \rightarrow 0$ . Nous utiliserons ce type de critère de convergence en §5.2, dans le cadre des arbres réels métrisés.

REMARQUE 1.21. Même lorsque  $\alpha$  n'est pas positive, l'accouplement défini ici est intéressant. Nous ne le détaillerons pas ici, mais cette situation se présente ainsi dans le cas de l'arbre des valuations centrées à l'infini que nous utiliserons au Chapitre 4. Dans ce cas, l'accouplement admet une interprétation géométrique naturelle en terme d'intersection dans  $\mathbb{C}^2$ .

REMARQUE 1.22. Dans le cas des arbres réels métrisés, il est possible de définir l'accouplement ci-dessus pour les mesures signées  $\rho$  vérifiant  $\rho(\overline{\mathcal{T}}) = 0$  (ainsi qu'une condition d'intégrabilité). C'est un exercice intéressant de vérifier que pour ce type de mesure, l'accouplement ne dépend pas du choix de la racine de l'arbre. Si  $\sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}$ , l'accouplement  $\langle \sigma_1 - \sigma_2, \tau_1 - \tau_2 \rangle$  n'est autre qu'une version du birapport dans les arbres.

## Bibliographie

- [Bes02] Mladen Bestvina.  $\mathbb{R}$ -trees in topology, geometry, and group theory. In *Handbook of geometric topology*, pages 55–91. North-Holland, Amsterdam, 2002.
- [BR] Matthew Baker and Robert Rumely. Equidistribution of small points, rational dynamics, and potential theory. arxiv :math.nt/0407426.
- [FJ04] Charles Favre and Mattias Jonsson. *The valuative tree*, volume 1853 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [FJ05] Charles Favre and Mattias Jonsson. Valuative analysis of planar plurisubharmonic functions. *Invent. Math.*, 162(2) :271–311, 2005.
- [Fol99] Gerald B. Folland. *Real analysis*. Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons Inc., New York, second edition, 1999. Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication.
- [Mor92] John W. Morgan.  $\Lambda$ -trees and their applications. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 26(1) :87–112, 1992.
- [Sha91] Peter B. Shalen. Dendrology and its applications. In *Group theory from a geometrical viewpoint (Trieste, 1990)*, pages 543–616. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1991.
- [Thu05] Amaury Thuillier. *Théorie du potentiel sur les courbes en géométrie analytique non-archimédienne. Applications à la théorie d’Arakelov*. PhD thesis, Université de Rennes, 2005.



## Trois exemples d'arbres valuatifs

Nous verrons par la suite comment utiliser la théorie du potentiel du chapitre précédent dans trois situations de nature très différentes. Notre objectif dans ce chapitre est de décrire les trois exemples d'arbre qui apparaîtront naturellement dans l'étude de ces problèmes. Ces arbres ont une structure extrêmement similaire, et s'interprètent tous comme des ensembles de valuations, ce qui explique le titre du chapitre. Ils admettent aussi tous une interprétation géométrique, qui s'avère importante voire cruciale pour les applications. Nous insistons cependant sur le fait que les propriétés fines de ces trois arbres sont assez différentes, ce qui explique notre choix de les présenter de manière séparée.

La section §2.1 est consacrée à la présentation de la droite projective au sens de Berkovich, qui sera utilisée au Chapitre 5. Ensuite, nous décrivons l'exemple qui nous a en tout premier lieu intéressé avec M. Jonsson, à savoir l'arbre des valuations centrées à l'origine dans  $\mathbb{C}^2$ . Celui-ci nous permettra d'analyser les singularités de fonctions psh au Chapitre 3. Nous décrivons alors l'espace des valuations sur  $\mathbb{C}[X, Y]$  centrées à l'infini, sur lequel nous ferons agir les applications polynomiales de  $\mathbb{C}^2$  pour en déduire des conséquences dynamiques au Chapitre 4. Enfin, nous donnerons brièvement des éléments de comparaison entre ces arbres.

### 2.1. La droite projective au sens de Berkovich

Bien que les définitions puissent être faites dans un contexte plus général, on va se placer dans tout ce paragraphe sur un corps  $p$ -adique.

**2.1.1. Construction comme espace des boules.** Fixons un nombre premier  $p$ . On désigne par  $|\cdot|$  la norme  $p$ -adique sur  $\mathbb{Q}$ , normalisée par  $|p| = p^{-1}$ . Elle est définie par  $|p^k a/b| = p^{-k}$ , si  $a, b \in \mathbb{Z}$  sont premiers à  $p$ . Cette norme s'étend de façon unique en une norme définie sur la complétion  $\mathbb{Q}_p$  du corps valué  $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ , puis sur une clôture algébrique  $\overline{\mathbb{Q}_p}$ . On désignera toutes ces normes par  $|\cdot|$ . On notera enfin  $\mathbb{C}_p$  la complétion de  $(\overline{\mathbb{Q}_p}, |\cdot|)$ . Le groupe

$$|\mathbb{C}_p^*| = \{|z|; z \in \mathbb{C}_p^*\}$$

appelé *groupe des valeurs* est égal à  $\{p^r; r \in \mathbb{Q}\}$ . Enfin, on notera  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$  la droite projective de  $\mathbb{C}_p$ , que l'on peut identifier naturellement à  $\mathbb{C}_p \cup \{\infty\}$ . L'espace  $\mathbb{C}_p$  muni de sa norme  $p$ -adique est totalement discontinu et non localement compact.

L'espace  $(\mathbb{C}_p, |\cdot|)$  est un espace ultra-métrique, et on peut donc lui appliquer la construction décrite en §1.1.4.

On note tout d'abord  $\mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$  l'ensemble de toutes les boules fermées de  $\mathbb{C}_p$  de rayon non nul. Un point de  $B \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$  est de la forme  $B = \{z \in \mathbb{C}_p, |z - z_0| \leq r\}$

pour un  $z_0 \in \mathbb{C}_p$ ,  $r \in ]0, +\infty[$ . Si on lui ajoute le point  $\infty$  correspondant à la boule  $B_\infty := \mathbb{C}_p$ , il devient un arbre réel enraciné en  $B_\infty$  pour la relation d'ordre partiel d'inclusion des boules.<sup>1</sup> On note sa complétion en tant qu'arbre  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$  : c'est la droite projective au sens de Berkovich.

Un point de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$  s'identifie à une suite décroissante de boules fermées  $B_k$  (modulo une relation d'équivalence naturelle). Deux cas se présentent. Soit le diamètre des boules tend vers zéro, auquel cas  $\cap B_k$  est un point de l'espace projectif standard  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ . Soit le diamètre ne tend pas vers zéro, et  $\cap B_k = \emptyset$ . Un point de ce type est appelé *point singulier*. On renvoie à [Rob00, Chapter 3] pour une construction simple de tels points. On note l'union des points singuliers et de  $\mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$  par  $\mathbb{H}_p$ . On verra plus loin que  $\mathbb{H}_p$  possède une métrique naturelle.

De part la construction même de  $\mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ , les bouts s'identifient à la réunion de l'espace projectif standard  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$  et de  $\mathbb{H}_p \setminus \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ . Les points de  $\mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$  se décomposent en deux catégories. Les points dits *rationnels* sont ceux associés aux boules  $B(z, r)$  avec  $r \in p^{\mathbb{Q}}$ . On notera l'ensemble de ces points  $\mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$ . Les autres points de  $\mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$  sont dits *irrationnels*.

Comme  $|z - z'| \in p^{\mathbb{Q}}$  pour tout couple de points  $z, z' \in \mathbb{C}_p$ , tous les points de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$  correspondant à des boules fermées de rayon  $\notin p^{\mathbb{Q}}$  sont des points réguliers de l'arbre.

La situation pour les points de  $\mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$  est plus intéressante. On va se concentrer sur le cas du point associé à  $B(0, 1)$ . La Proposition 2.4 ci-dessous montre que la situation est exactement la même en tous les autres points de  $\mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$ .

Rappelons tout d'abord que  $\mathcal{O}_p := \{z, |z| \leq 1\}$  est un anneau local d'idéal maximal  $\mathfrak{m}_p := \{z, |z| < 1\}$ , et que le corps résiduel  $\mathcal{O}_p/\mathfrak{m}_p$  est isomorphe à la clotûre algébrique de  $\mathbb{F}_p$  que l'on notera  $\overline{\mathbb{F}}_p$ . Pour tout point  $\zeta \in \mathcal{O}_p/\mathfrak{m}_p$ , on définit  $B(\zeta) := \{z, |z - z(\zeta)| < 1\}$  où  $z(\zeta) \in \mathcal{O}_p$  est un relevé (quelconque) de  $\zeta$ . Pour tout couple de points  $z, z' \in B(\zeta)$ , on a  $B(z, r) = B(z', r)$  pour  $r := |z - z'| < 1$ . Les points de  $B(\zeta)$  définissent donc tous le même vecteur tangent en  $B(0, 1) \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$ . On le notera  $\vec{v}_\zeta$ . Réciproquement, il est clair que les boules  $\{B(\zeta)\}_{\zeta \in \mathcal{O}_p/\mathfrak{m}_p}$  sont disjointes deux à deux, et on vérifie que ces boules définissent des vecteurs tangents différents en  $B(0, 1)$ . Pour être complet, mentionnons que le point  $\infty$  détermine un vecteur tangent distinct de tous les précédents. On a donc la

**PROPOSITION 2.1.** L'application qui à  $\zeta \in \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{F}}_p)$  associe le vecteur tangent  $\vec{v}_\zeta$  induit une bijection de  $\mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{F}}_p)$  sur l'espace tangent en  $B(0, 1)$ . Plus généralement, l'espace tangent de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$  en tout point de  $\mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$  s'identifie à l'espace projectif  $\mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{F}}_p)$ .

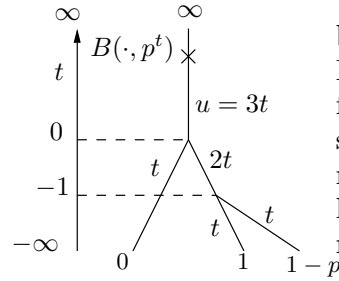
Cette identification est en réalité « canonique », voir §5.1.1. Nous renvoyons aussi à la figure à la p.87 pour une image plus détaillée de la situation.

Enfin, on construit la métrique suivante sur  $\mathbb{H}_p$ . Si  $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$  sont associés à des boules fermées  $B$  et  $B'$  telles que  $B \subset B'$ , on pose  $d(\mathcal{S}, \mathcal{S}') := \log_p |\text{diam}(B')/\text{diam}(B)|$ . On impose de plus  $d(\mathcal{S}, \mathcal{S}') = d(\mathcal{S}, \mathcal{S}'') + d(\mathcal{S}'', \mathcal{S}')$  pour

<sup>1</sup>ici la racine est l'unique point maximal de l'arbre.



tout point  $\mathcal{S}'' \in [\mathcal{S}, \mathcal{S}']$ , et on étend  $d$  par continuité aux points de  $\mathbb{H}_p \setminus \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ . Ceci munit  $\mathbb{H}_p$  d'une structure d'arbre réel métrisé. Cette métrique est aussi la mieux adaptée pour faire fonctionner la théorie du potentiel comme le montre la proposition suivante.



Soit  $P \in \mathbb{C}_p[T]$ . Si  $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$  est associé à une boule fermée  $B$ , notons  $\log |P|(\mathcal{S}) := \sup_B \log |P|$ . La fonction  $\log |P|$  s'étend de manière unique en une fonction sur  $\mathbb{H}_p$ , continue sur chaque segment. Vu sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ ,  $\mathcal{S} \mapsto \log |P|(\mathcal{S})$  est une fonction (faiblement) continue à valeurs dans  $[-\infty, +\infty]$ , qui prend les valeurs  $-\infty$  exactement aux zéros de  $P$ . On peut maintenant énoncer le résultat suivant.

PROPOSITION 2.2. Pour tout  $P \in \mathbb{C}_p[T]$ , on a

$$\Delta \log |P| = \sum_{P(z)=0} \text{ord}_z(P) \delta_z$$

dans  $A^1(\mathbb{C}_p)$ .

Cette proposition est illustrée sur le schéma ci-dessus, pour le polynôme  $P(T) = T(T-1)(T-1+p)$ , et où on a noté  $u := \log |P|$ .

Finalement, voici deux tableaux récapitulatifs sur les différents sous-arbres de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ , et la nature de ses points.

Arbre	Propriétés		
$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$	Arbre réel complet faiblement compact	$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ $\mathbb{H}_p \setminus \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ $\mathbb{H}_p^{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$ $\mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$	bouts
$(\mathbb{H}_p, d)$	Arbre métrisé métriquement complet		bouts
$(\mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}, d)$	arbre métrisé		point régulier
	point = boule fermée		pt de branchement

**2.1.2. Construction comme espace de valuations.** La définition est cette fois-ci formellement plus simple. C'est celle qui est donnée par Berkovich dans [Ber90, Définition 1.5.1], et qui justifie le nom de droite projective au sens de Berkovich indiquée au début du paragraphe. Notons que cette définition se place dans une vaste théorie géométrique décrite par Berkovich qui étend la géométrie rigide, et est adaptée pour étudier les espaces algébriques définis sur un corps valué.

DEFINITION 2.3. La droite affine au sens de Berkovich, notée  $A^1(\mathbb{C}_p)$  est l'ensemble de toutes les semi-normes définies sur  $\mathbb{C}_p[T]$  qui étendent la norme  $p$ -adique sur  $\mathbb{C}_p$ .

Une semi-norme (non-archimédienne) est ici par définition une fonction  $\mathcal{S}$  sur  $\mathbb{C}_p[T]$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$  telle que  $\mathcal{S}(PQ) = \mathcal{S}(P)\mathcal{S}(Q)$ ,  $\mathcal{S}(P+Q) \leq \max\{\mathcal{S}(P), \mathcal{S}(Q)\}$  pour tout  $P, Q \in \mathbb{C}_p[T]$ .

On va tout d'abord faire le lien avec l'arbre défini au paragraphe précédent. A chaque boule  $B = \{|z - z_0| \leq r\}$  correspond la semi-norme  $\mathcal{S}_B$  dans  $A^1(\mathbb{C}_p)$ , définie par  $\mathcal{S}_B(P) = \sup_B |P(z)|$ . Plus généralement, toute suite décroissante  $\{B_i\}_{i \geq 0}$  de boules de  $\mathbb{C}_p$  induit une semi-norme  $P \mapsto \lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{S}_{B_i}(P)$ . On montre que réciproquement toute semi-norme dans  $A^1(\mathbb{C}_p)$  est de cette forme, voir [Ber90, p.18].

L'espace des semi-normes est muni d'une relation d'ordre  $\mathcal{S} \leq \mathcal{S}'$  ssi  $\mathcal{S}(P) \leq \mathcal{S}'(P)$  pour tout  $P$ . Sous l'identification des semi-normes avec les boules fermées, cette relation d'ordre est exactement la relation d'inclusion des boules. La droite affine  $A^1(\mathbb{C}_p)$  est donc un arbre réel. Pour passer à la droite projective, on rajoute le point  $\{\infty\}$  qui est ici la « semi-norme » envoyant tout polynôme de degré non nul sur  $+\infty$  et se restreignant à la norme  $p$ -adique standard sur les constantes.

Finalement, la topologie faible (au sens des arbres) sur  $A^1(\mathbb{C}_p)$  ou  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$  est précisément la topologie de la convergence simple, i.e.  $\mathcal{S}_k \rightarrow \mathcal{S} \in A^1(\mathbb{C}_p)$  ssi  $\mathcal{S}_k(P) \rightarrow \mathcal{S}(P)$  pour tout  $P$ . On voit à l'aide de cette identification que  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$  est bien compact : c'est une conséquence du théorème de Tychonov.

Cette présentation de la droite projective possède plusieurs avantages en dehors du fait de se généraliser en dimension supérieure. Elle permet ainsi de comprendre très simplement l'action des applications rationnelles sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ . On reviendra sur ce point au Chapitre 4, mais on peut tout de suite mentionner le fait suivant.

Chaque fonction rationnelle  $R \in \mathbb{C}_p(T)$  agit continûment sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ , envoyant  $\mathcal{S}$  sur la semi-norme  $R_*(\mathcal{S})$  définie par  $R_*(\mathcal{S})(P) := \mathcal{S}(P \circ R)$ . Cette action étend l'action de  $R$  sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ . A l'aide de cette définition, on peut énoncer la

**PROPOSITION 2.4.** Le groupe  $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}_p)$  des applications de Möbius de  $\mathbb{C}_p$  agit transitivement sur  $\mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$ ,  $\mathbb{H}_p \setminus \mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$ , et  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ .

La situation pour les bouts de  $\mathbb{H}_p$  est nettement plus compliquée, et nous n'aborderons pas ce problème ici.

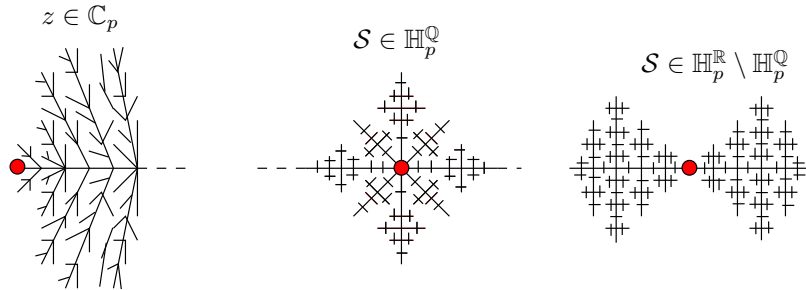


FIG. 1. Vue locale autour des différents types de points de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$

Finalement, notons qu'il existe d'autres constructions de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ . L'une passe par la définition d'une structure uniforme sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ , et  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$  est alors le complété (au sens des structures uniformes) de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ . Une autre construction

est liée à l'étude du groupe  $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}_p)$ , et pour laquelle on renvoie à l'appendice de [RL03]. On montre ainsi que  $\mathbb{H}_p$  est l'arbre de Bruhat-Tits de  $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}_p)$ .

## 2.2. L'arbre des valuations centrées à l'origine dans $\mathbb{C}^2$

Notre deuxième exemple d'arbre valuatif est la version complexe de l'arbre précédent avec en plus le choix d'un point particulier comme racine.

**2.2.1. Valuations sur l'anneau des fonctions holomorphes.** On commence par une définition.

**DEFINITION 2.5.** Soit  $\mathcal{O}$  l'anneau des germes de fonctions holomorphes à l'origine dans  $\mathbb{C}^2$ . On note  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$  l'ensemble des valuations  $\nu : \mathcal{O} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ , telles que  $\nu|_{\mathbb{C}^*} \equiv 0$  et normalisées par  $\nu(\mathfrak{m}) = +1$ .

Dans la définition ci-dessus  $\mathfrak{m}$  dénote l'idéal maximal de  $\mathcal{O}$ , i.e. l'ensemble des germes s'annulant à l'origine. Une valuation est ici une fonction à valeurs réelles telle que  $\nu(fg) = \nu(f) + \nu(g)$ ,  $\nu(f + g) \leq \min\{\nu(f), \nu(g)\}$  pour tout  $f, g \in \mathcal{O}$ .

A toute valuation  $\nu$  est associée une semi-norme  $\exp(-\nu)$ , et réciproquement toute semi-norme induit une valuation. On note ainsi immédiatement la similarité entre les Définitions 2.3 et 2.5. On va voir cependant que la structure de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$  explicitée ci-dessus et celle de  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$  présentent des différences profondes.

On va tout d'abord s'intéresser aux différents types de valuations sur  $\mathcal{O}$ .

A chaque courbe irréductible (éventuellement formelle)  $C$  est associée la valuation  $\nu_C \in \mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$  définie par  $\nu_C(f) = C \cdot \{f = 0\}/m(C)$ , où “.” est la multiplicité d'intersection et  $m$  la multiplicité. Si  $C$  est donnée par  $\phi \in \mathfrak{m}$ , on notera aussi  $\nu_C = \nu_\phi$ ; on a toujours  $\nu_\phi(\phi) = \infty$ . Ces valuations sont appelées *valuations de courbes*.

Le deuxième type de valuations est obtenu de la manière suivante. Soit  $\pi : X \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  une composée finie d'éclatements de points au dessus de l'origine, et  $E$  une composante irréductible de  $\pi^{-1}(0)$ . La fonction  $f \mapsto \mathrm{ord}_E(f \circ \pi)$  définit alors une valuation sur  $\mathcal{O}$  qui est proportionnelle à une unique valuation de  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$ , notée  $\nu_E$ . Toute valuation de ce type est dite *divisorielle*.

Soit  $x, y$  un système de coordonnées locales en 0. Pour tout couple  $s_1, s_2 > 0$ , on peut définir la valuation  $\nu_s(\sum a_{ij}x^i y^j) := \min\{is_1 + js_2, a_{ij} \neq 0\}$ . C'est une valuation sur l'anneau  $\mathcal{O}$ , dite *valuation monomiale*, qui appartient à  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$  lorsque  $\min\{s_1, s_2\} = +1$ . Elle est divisorielle ssi  $s_1/s_2 \in \mathbb{Q}_+$ . Sinon c'est une valuation dite *irrationnelle*.

On peut combiner aussi valuation monomiale et éclatements. Soit  $\pi : X \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  une composée finie d'éclatements de points au dessus de l'origine. Fixons  $p \in \pi^{-1}(0)$  et  $x, y$  un système de coordonnées en  $p$  tels que  $\pi^{-1}(0) \subset \{xy = 0\}$ . On appelle alors *valuation quasimonomiale* (qm en abrégé) toute valuation du type  $\nu(f) = \nu_s(f \circ \pi)$  où  $\nu_s$  est monomiale dans les coordonnées  $x, y$ , et pour des poids  $s_1, s_2 > 0$ . Lorsque  $s_1/s_2 \in \mathbb{Q}_+$ ,  $\nu$  est divisorielle, et réciproquement toute valuation divisorielle est de ce type. Une valuation quasimonomiale dont les poids associés sont de quotient irrationnel est dite *quasimonomiale irrationnelle*. Il existe d'autres caractérisations importantes des valuations quasimonomiales. Nous renvoyons à [FJ04] pour plus d'informations.

Enfin il existe un dernier type de valuation dont la description la plus simple se fait à l'aide des séries de Puiseux. Soit  $\phi(t) = \sum a_k t^{\gamma_k}$  une série avec  $a_k \in \mathbb{C}^*$  et  $\gamma_{k+1} > \gamma_k \in \mathbb{Q}_+^* \cap [1, +\infty[$ . On associe à cette donnée la valuation  $\nu_\phi(f) := \text{ord}_t f(t, \phi(t))$ . Toute valuation de ce type (quitte à permuter les coordonnées) est dite *valuation infiniment singulière*.

On montre que toute valuation de  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$  est de l'un des quatre types précédents.

**2.2.2. Structure d'arbre.** On va maintenant décrire la structure d'arbre sur  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$ .

2.2.2.1. *Résultats principaux.* Notons  $\nu \leq \mu$  ssi  $\nu(f) \leq \mu(g)$  pour tout  $f, g \in \mathcal{O}$ . De part la normalisation  $\nu(\mathfrak{m}) = +1$ , on a toujours  $\nu_{\mathfrak{m}} \leq \nu$  : la multiplicité est donc l'unique élément minimal de  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$ . Toute valuation de courbe est par ailleurs maximale. En effet, si  $\nu \geq \nu_C$  et  $f \in \mathcal{O}$  est une équation définissant  $C$ , alors  $\nu(f) = \nu_C(f) = +\infty$ . La valuation  $\nu$  induit donc une valuation sur le quotient  $\mathcal{O}_C = \mathcal{O}/(f)$ . Comme il existe une unique valuation sur  $\mathcal{O}_C$  (à normalisation près), on a  $\nu = \nu_C$ . Pour compléter notre image de  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$ , on a le résultat fondamental suivant.

**THÉORÈME 2.1.** *L'espace des valuations  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$  muni de la relation d'ordre  $\leq$  est un arbre réel complet enraciné en  $\nu_{\mathfrak{m}}$  et faiblement compact. De plus, la topologie faible (au sens des arbres) sur  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$  s'identifie à la topologie de la convergence simple sur les fonctions sur  $\mathcal{O}$ .*

Le Tableau 1 ci-après synthétise la place de chaque valuation au sein de l'arbre. On verra plus bas comment décrire l'espace tangent aux valuations divisorielles.

courbes	bouts
qm irrationnelle	point régulier
divisorielle	pt de branchement
infiniment sing.	bouts

TAB. 1. Les différents types de points de  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$

On va tout de suite indiquer comment métriser  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$ . Pour cela, il nous faut définir un invariant des valuations tout à fait fondamental.

**DEFINITION 2.6.** Soit  $\nu \in \mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$ . Le nombre réel positif

$$\alpha(\nu) := \sup\{\nu(\phi)/\nu_{\mathfrak{m}}(\phi), \phi \in \mathcal{O}\}$$

est appelé le *défaut* de  $\nu$ .

Par construction,  $\alpha(\nu_{\mathfrak{m}}) = 1$ , et on montre que :

- $\alpha(\nu)$  est rationnel pour toute valuation divisorielle ;
- $\alpha(\nu)$  est irrationnel pour toute valuation quasimonomiale irrationnelle ;
- $\alpha(\nu)$  est infini pour toute valuation de courbe ;
- $\alpha(\nu) \in ]1, +\infty]$  si  $\nu$  est infiniment singulière.

**THÉORÈME 2.2.** *La fonction  $\alpha : \mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m}) \rightarrow [1, +\infty]$  définit une paramétrisation d'arbre.*

Ce résultat nous permet de définir une métrique naturelle  $d$  compatible avec la structure d'arbre sur  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$ . On verra que c'est LA métrique avec laquelle on fait fonctionner la théorie décrite en §1.2.2, et pour laquelle cette théorie possède une interprétation géométrique significative.

**2.2.2.2. Polynômes clés et applications.** Les deux démonstrations des Théorèmes 2.1 et 2.2 données en [FJ04, Chapter 3] sont basées sur une description fine des valuations en dimension 2, en terme de ce que l'on appelle les polynômes clés. Cette description est due essentiellement à MacLane [Mac36], et a été repris par de nombreux auteurs de manière plus ou moins indépendante. Elle est à la base des travaux d'Abhyankhar-Moh [AM73] sur le plan affine, et de Spivakovsky [Spi90] sur les singularités. Nous allons ici indiquer brièvement le fonctionnement de la méthode de MacLane.

On fixe donc une valuation  $\nu \in \mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$ , et un système de coordonnées  $x, y$ . On pose  $U_0 := x, U_1 := y$ , et  $\nu(U_0) = \beta_0, \nu(U_1) = \beta_1$ . Deux cas se présentent alors. Soit ces deux valeurs déterminent  $\nu$ , au sens où  $\nu$  coïncide avec la valuation monomiale  $\nu_1$  de poids  $\beta_0, \beta_1$ . Soit on montre qu'il existe un unique polynôme  $U_2$  de degré minimal en  $y$ , et pour lequel  $\nu(U_2) > \nu_1(U_2)$ . Dans ce dernier cas, on montre ensuite qu'il existe une unique valuation minimale  $\nu_2 \in \mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$  coïncidant avec  $\nu$  sur les trois polynômes  $U_0, U_1, U_2$ . On peut alors répéter la construction précédente. Soit  $\nu = \nu_2$ . Soit  $\nu > \nu_2$ , et il existe un unique polynôme de degré minimal  $U_3$  tel que  $\nu(U_3) > \nu_2(U_3)$ . En continuant comme ceci, on obtient une suite (finie ou infinie) de polynômes  $U_k$ , appelés *polynômes clés*. Cette suite de polynômes, ainsi que les valeurs  $\nu(U_k)$  déterminent complètement la valuation  $\nu$ .

Soit  $\nu$  une valuation fixée. Notons  $U_k$  sa suite de polynômes clés, et  $\nu_k$  la suite de valuations obtenue comme ci-dessus. Si l'on tronque la suite de polynômes clés en ne gardant que les  $n + 1$  premiers, on vérifie pour tout paramètre  $\beta > \nu_{n-1}(U_n)$ , il existe une valuation  $\mu$  dont la suite de polynômes clés est  $U_0, \dots, U_n$ , et satisfaisant  $\mu(U_n) = \beta$ . Il s'ensuit que l'ensemble des valuations  $\mu$  dont la suite de polynômes clés coïncide jusqu'à un certain ordre avec celle de  $\nu$ , et avec  $\mu(U_k) \leq \nu(U_k)$  pour tout  $k$ , forme un segment qui relie  $\nu_{\mathfrak{m}}$  à  $\nu$ . Le point crucial est que toute valuation  $\mu \leq \nu$  est obtenue de cette manière. En résumé, on a la

**PROPOSITION 2.7.** Soient  $\nu, \mu$  deux valuations, et  $\{U_k\}_0^N$  la suite de polynômes clés associée à  $\nu$ . Alors  $\nu \geq \mu$  ssi la suite de polynômes clés de  $\mu$  est de la forme  $\{U_k\}_0^M$  pour un entier  $M \leq N$  et  $\nu(U_M) \geq \mu(U_M)$ .

Cette proposition implique immédiatement le Théorème 2.1.

Les polynômes clés ont en réalité une structure tout à fait particulière, et on peut même les caractériser dans l'ensemble des polynômes. Nous renvoyons à [FJ04, Chapter 2] pour les détails. Mentionnons simplement que tout polynôme clé est *irréductible* dans  $\mathbb{C}[[x, y]]$ . On peut donc considérer la valuation de courbe  $\nu_{U_k}$ . La preuve du Théorème 2.2 est une conséquence de la

PROPOSITION 2.8. Soit  $\nu$  une valuation, et  $U_k$  la suite de ses polynômes clés. Alors  $\alpha(\nu) = \lim \nu(U_k)/\nu_{\mathfrak{m}}(U_k)$ . En particulier, lorsque la suite est finie, on a  $\nu_{U_k} \geq \nu$  et  $\nu(U_k) = \alpha(\nu)\nu_{\mathfrak{m}}(U_k)$  pour le « dernier » polynôme clé.

Notons que toute valuation quasimonomiale possède une suite finie de polynômes clés.

Cette proposition est intéressante à plusieurs titres. Si on fixe la valuation, elle montre que le défaut se calcule simplement en termes des polynômes clés. Si l'on fixe le polynôme  $U_k$ , elle montre que la fonction  $\nu \mapsto \nu(U_k)$  définie sur  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$  a la structure suivante : elle est *linéaire* en fonction du défaut sur le segment  $[\nu_{\mathfrak{m}}, \nu_{U_k}]$ , et est localement constante partout ailleurs. En utilisant la description des valuations en termes de polynômes clés, un calcul permet de montrer la généralisation suivante de ce dernier fait, que nous élevons au rang de théorème du fait de son importance.

THÉORÈME 2.3. Soit  $\phi$  une série formelle irréductible. La fonction  $\nu \mapsto \nu(\phi)$  est linéaire en fonction du défaut et de pente  $\nu_{\mathfrak{m}}(\phi)$  sur le segment  $[\nu_{\mathfrak{m}}, \nu_{\phi}]$ . Elle est localement constante partout ailleurs dans  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$ .

Ce résultat montre pourquoi le défaut est la paramétrisation adaptée pour laquelle on appliquera la théorie du potentiel, voir §3.1.5.

Enfin, on verra au Chapitre 4 que les polynômes clés jouent un rôle important aussi dans la description des valuations « globales », c'est-à-dire définies sur  $\mathbb{C}[X, Y]$ .

**2.2.3. Le graphe dual universel.** On va maintenant interpréter l'espace de valuations  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$  de manière géométrique. L'idée de la construction repose sur l'identification entre valuations et suite d'éclatements.

On part d'une composée finie d'éclatements  $\pi : X \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ . Chaque diviseur exceptionnel  $E \subset \pi^{-1}(0)$  définit une valuation divisorielle  $\pi_* \text{ord}_E$  qui est proportionnelle à une unique valuation normalisée que l'on note  $\nu_E \in \mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$ . En chaque point  $p$  intersection de deux composantes exceptionnelles  $E_1, E_2$ , on fixe des coordonnées locales  $z, w$  telles que  $E_1 \cup E_2 = \{zw = 0\}$ . On considère alors les valuations monomiales  $\nu_{s_1, s_2}^{z, w}$  pour des poids  $s_1, s_2 \geq 0$  que l'on pousse en avant par  $\pi$ . Lorsque  $\text{ord}_{E_1}(\pi^* \mathfrak{m})_{s_1} + \text{ord}_{E_2}(\pi^* \mathfrak{m})_{s_2} = 1$ , la valuation  $\pi_* \nu_{s_1, s_2}^{z, w}$  est normalisée et appartient donc à  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$ . Lorsque  $s_1 = 0$  (resp.  $s_2 = 0$ ), cette valuation est  $\nu_{E_2}$  (resp.  $\nu_{E_1}$ ). Finalement l'union de ces valuations détermine dans  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$  le segment  $[\nu_{E_1}, \nu_{E_2}]$ .

En faisant varier le point  $p$  parmi tous les points d'intersection des composantes exceptionnelles, l'union des images des valuations monomiales dans  $X$  dans des coordonnées adéquates détermine un graphe fini inclus dans  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$ . On montre que ce graphe est isomorphe au *graphe dual* de  $\pi$ .

On va maintenant expliquer comment en prenant des suites d'éclatements de points  $\pi$  de plus en plus longues, on obtient finalement tout l'espace  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$  (plus précisément on obtient l'ensemble des valuations quasimonomiales). De manière un peu plus précise, on procède comme suit. Notons  $\mathfrak{B}$  l'ensemble de tous les éclatements  $\pi$  au dessus de l'origine. C'est un ensemble inductif : pour tout couple  $\pi_1, \pi_2 \in \mathfrak{B}$  il existe un élément  $\pi_3 \in \mathfrak{B}$  qui les domine chacun au sens

où  $\pi_3 = \varpi_i \circ \pi_i$  pour d'autres composées d'éclatements  $\varpi_i, i = 1, 2$ . A chaque  $\pi$ , on associe son graphe dual  $\Gamma_\pi$  plongée dans  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$  à l'aide de la construction précédente. Lorsque  $\pi'$  domine  $\pi$ , le graphe  $\Gamma_{\pi'}$  est naturellement un sous-graphe de  $\Gamma_\pi$ . On peut alors énoncer le

**THÉORÈME 2.4.** *La limite inductive (ou en d'autres termes la réunion) de tous les graphes  $\{\Gamma_\pi\}_{\pi \in \mathfrak{B}}$  est un sous-arbre de  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$ , et coïncide avec l'ensemble des valuations quasimonomiales. En particulier, sa complétion en tant qu'arbre est  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$ .*

Tout graphe dual de la forme  $\Gamma_\pi$  ci-dessus est un arbre simplicial. On peut donc directement utiliser cette description pour montrer que  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$  est un arbre, et ce en évitant le recourt aux polynômes clés. Cette dernière technique s'avère cependant nettement plus puissante, car elle décrit de manière précise la structure de chaque valuation.

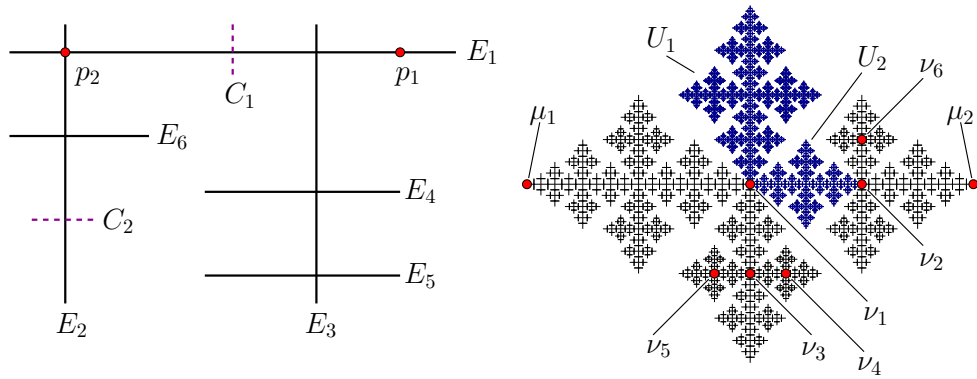


FIG. 2. A gauche, la transformée totale  $\pi^{-1}(C)$  d'une courbe  $C$  par une modification  $\pi : X \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ . A droite, la situation au sein de l'arbre  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$ . Les composantes exceptionnelles  $E_j$  correspondent aux valuations divisorielles  $\nu_j, 1 \leq j \leq 6$ . Attachés aux points infiniment voisins  $p_i \in \pi^{-1}(0)$ , les ouverts  $U_i = U(p_i) \subset \mathcal{V}$  constitués des valuations dont le centre sur  $X$  est  $p_i, i = 1, 2$ . Les valuations de courbe  $\mu_k, k = 1, 2$  sont associées aux courbes dont la transformée stricte par  $\pi$  est  $C_k$ .

On va maintenant utiliser les constructions ci-dessus pour expliquer la structure fractale de  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$ , i.e. ses propriétés d'auto-similarité.

Fixons donc  $\pi \in \mathfrak{B}$  et  $p$  un point arbitraire sur  $\pi^{-1}(0)$ . On supposera pour simplifier que  $p$  appartient à une unique composante  $E = \{z = 0\} \subset \pi^{-1}(0)$ , et pour alléger les notations, on posera  $b_p = \text{ord}_E(\pi^*\mathfrak{m})$ . On regarde l'ensemble  $\mathcal{V}_p$  des valuations définies sur l'anneau des germes de fonctions holomorphes en  $p$ , et normalisées par  $\nu(z) = 1/b_E$ . L'application qui envoie  $\nu \in \mathcal{V}_p$  (et différente de  $\text{ord}_z$ ) sur  $\nu/\nu(\mathfrak{m})$  s'étend à  $\mathcal{V}_p$  et induit une bijection de cet espace sur  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$ , ce qui montre que  $\mathcal{V}_p$  est un arbre.

A l'aide de la construction de l'arbre de valuation en termes de suite d'éclatements, on montre sans difficulté la proposition suivante.

PROPOSITION 2.9. Soit  $\pi \in \mathfrak{B}$ ,  $p \in E \subset \pi^{-1}(0)$  comme ci-dessus. Alors l'application  $\pi_*$  induit une bijection de  $\mathcal{V}_p \setminus \{\text{ord}_z\}$  sur un ouvert distingué  $U(p)$  de  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$ . Le bord de  $U(p)$  est constitué d'une unique valuation divisorielle  $\nu_E$ .

Cette proposition est illustrée par la Figure 2 : à gauche, l'ouvert  $U_1$  est exactement l'image par  $\pi_*$  de l'ensemble des valuations centrées au point  $p_1$  que l'on a marqué sur l'image de droite. Nous avons aussi décrit dans cette figure la situation en un point  $p_2$  à l'intersection de deux composantes.

La proposition ci-dessus montre en particulier que chaque point  $p$  sur une courbe exceptionnelle  $E$  fixe détermine un ouvert distingué qui est associé à un unique vecteur tangent en la valuation  $\nu_E$ . On en déduit alors le fait suivant.

PROPOSITION 2.10. Soit  $\nu = \nu_E$  une valuation divisorielle associée à une composante exceptionnelle  $E$  d'une composée d'éclatements  $\pi : X \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ . Fixons un point  $p \in E$ . Alors, toute valuation appartenant à l'ouvert  $\pi_*\mathcal{V}_p \setminus \{\nu_E\}$  détermine le même vecteur tangent en  $\nu_E$  que l'on note  $\vec{v}_p$ .

L'application  $p \in E \mapsto \vec{v}_p$  détermine une bijection de  $E$  sur l'espace tangent en  $\nu_E$  dans l'arbre  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$ . En particulier, cet espace tangent est *non dénombrable*.

### 2.3. Les valuations à l'infini dans $\mathbb{C}^2$

Le dernier exemple  $\mathcal{V}_\infty(\mathbb{C}^2)$  que nous présentons est encore une fois très proche des précédents, et tout particulièrement de l'arbre  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$  défini en §2.2. Nous verrons que ces deux arbres sont même *isomorphes en tant qu'arbres*, mais que leurs structures *métriques* naturelles diffèrent profondément. L'étude de  $\mathcal{V}_\infty(\mathbb{C}^2)$  se base de toute façon sur celle de  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$ .

**2.3.1. Définitions.** Par *valuation* sur  $\mathbb{C}[X, Y]$ , on entend une fonction  $\nu : \mathbb{C}[X, Y] \rightarrow (-\infty, \infty]$  telle que  $\nu(0) = \infty$ ,  $\nu|_{\mathbb{C}^*} = 0$ , et  $\nu(PQ) = \nu(P) + \nu(Q)$ ,  $\nu(P + Q) \geq \min\{\nu(P), \nu(Q)\}$  pour tout  $P, Q \in \mathbb{C}[X, Y]$ .

Toute valuation s'étend au corps des fractions de  $\mathbb{C}[X, Y]$ , et se restreint en une valuation de l'anneau local de tout point d'une compactification  $\mathbb{P}^2$  de  $\mathbb{C}^2$ . Le *centre* est l'unique (mais pas nécessairement fermé) point tel que la valuation soit positive sur cet anneau local, et strictement positive sur son idéal maximal.

Une valuation est *centrée à l'infini* si il existe un polynôme  $P \in \mathbb{C}[X, Y]$  avec  $\nu(P) < 0$ . Dans ce cas, si on note  $\mathcal{L} = \{aX + bY + c, (a, b) \neq (0, 0)\}$ , on a  $\nu(\mathcal{L}) := \min\{\nu(L) ; L \in \mathcal{L}\} < 0$  et  $\nu(\mathcal{L}) = \min\{\nu(X), \nu(Y)\}$  pour tout système de coordonnées  $(X, Y)$ .

DEFINITION 2.11. On note  $\mathcal{V}_\infty(\mathbb{C}^2)$  l'ensemble constitué des valuations  $\nu$  sur  $\mathbb{C}[X, Y]$ , centrées à l'infini et normalisées de telle sorte que  $\min\{\nu(X), \nu(Y)\} = -1$ .

On verra en §2.3.2 que  $\mathcal{V}_\infty(\mathbb{C}^2)$  possède une structure d'arbre. On va tout d'abord décrire quelques exemples. La valuation  $\nu_0$  donnée par  $\nu_0(P) = -\deg(P)$  appartient à  $\mathcal{V}_\infty(\mathbb{C}^2)$ , et on verra qu'elle en est la racine pour sa structure d'arbre naturelle. Le centre de  $\nu_0$  dans  $\mathbb{P}^2$  est la droite à l'infini  $L_\infty$ . Toutes les autres



valuations sont centrées en des points fermés de  $L_\infty$  et sont donc soit divisorielles, soit quasimonomiales, soit irrationnelles quasimonomiales, soit associées à une courbe (éventuellement formelle), soit enfin infiniment singulière, suivant la terminologie introduite en §2.2.1. Par définition  $\nu_0$  est divisorielle.

Un type particulier de valuation divisorielle jouera un rôle important dans la suite. On dit qu'une courbe affine  $C$  possède *une place à l'infini* si sa clôture dans  $\mathbb{P}^2$  intersecte  $L_\infty$  en un unique point et est analytiquement irréductible en ce point. La branche de  $C$  à l'infini définit une valuation de courbe  $\nu_C \in \mathcal{V}_0$ . Si  $C = P^{-1}(0)$  pour un  $P \in \mathbb{C}[X, Y]$ , on dira aussi que  $P$  possède une place à l'infini et on écrira  $\nu_C = \nu_P$ . Notons que  $\nu_P(P) = \infty$ .

Il résulte d'un théorème de Moh [Moh74] (voir aussi [CPRL02, p.565]), que la courbe  $P^{-1}(\lambda)$  possède une place à l'infini pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Soit  $|C|$  ou  $|P|$  le pinceau de courbes de  $\mathbb{C}^2$  correspondant. On définit alors la fonction  $\nu_{|C|} = \nu_{|P|}$  par

$$\nu_{|C|}(Q) = \min_{\lambda \in \mathbb{C}} \nu_{P+\lambda}(Q). \quad (5)$$

PROPOSITION 2.12. La fonction  $\nu = \nu_{|C|}$  définit une valuation divisorielle centrée à l'infini. On a  $\nu_{|P|}(Q) \leq 0$  pour tout  $Q \in \mathbb{C}[X, Y]$ , et  $\nu_{|P|}(Q) = 0$  ssi  $Q = c(P + \lambda)$  pour un  $c, \lambda \in \mathbb{C}$  (mais  $Q \neq 0$ ).

Une telle valuation sera appelée *valuation de pinceau*, et *valuation de pinceau rationnel* lorsque l'élément générique du pinceau est rationnel. On donnera une caractérisation des valuations de pinceau rationnel en §4.1. Ces valuations jouent un rôle tout particulier en dynamique des applications polynomiales.

La preuve de la proposition utilise le lemme suivant qui est une conséquence du théorème de Bezout.

LEMME 2.13. Si  $C$  est une courbe avec une seule place à l'infini et  $\nu_C \in \mathcal{V}_\infty(\mathbb{C}^2)$  est la valuation de courbe associée, alors

$$\nu_C(Q) = -\frac{(C \cdot D)_{\mathbb{C}^2}}{\deg(C)}, \quad (6)$$

où  $D = Q^{-1}(0)$  et  $(C \cdot D)_{\mathbb{C}^2}$  est le nombre total de points d'intersection de  $\mathbb{C}^2$ , comptés avec multiplicité.

ESQUISSE DE PREUVE DE LA PROPOSITION 2.12. On va simplement décrire géométriquement quel diviseur est associé à  $\nu_{|C|}$ . Soit  $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^2$  une composition d'éclatements de points telle que le pinceau n'a aucun point base sur  $S$ . On peut par exemple prendre  $\pi$  tel que le relevé à  $S$  de la fonction rationnelle  $P : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$  devienne holomorphe. La transformée stricte  $C'_\lambda$  d'un élément générique  $C_\lambda$  du pinceau est alors lisse, et intersecte le diviseur exceptionnel transversalement. Mais toutes les courbes  $C_\lambda$  ont une unique place à l'infini, donc  $C'_\lambda$  intersecte le diviseur exceptionnel en un *unique* point lisse, disons sur une composante exceptionnelle  $E$ , indépendante du choix (générique) d'un membre du pinceau. Il est alors clair que le centre de  $\nu_{|C|}$  sur  $S$  coïncide avec  $E$ , donc  $\nu_{|C|}$  est égale à la valuation divisorielle associée à  $E$ .  $\square$

**2.3.2. La structure d'arbre.** Pour comprendre la structure d'arbre de  $\mathcal{V}_\infty(\mathbb{C}^2)$ , on va décrire un peu plus en détail le lien entre cet espace et l'espace de valuation local  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$  défini à la section précédente. Soit donc  $p \in L_\infty$  et choisissons des coordonnées locales  $(z, w)$  en  $p$  telles que  $(X, Y) := (1/z, w/z)$  soient des coordonnées affines sur  $\mathbb{C}^2$ . Dans les coordonnées homogènes  $[X : Y : Z]$  sur  $\mathbb{P}^2$  nous avons  $p = [1 : 0 : 0]$ ,  $[X : Y : 1] = [1 : w : z]$ , et  $L_\infty = \{z = 0\}$ .

L'anneau  $\mathcal{O}_p$  des fonctions rationnelles régulières en  $p$  est isomorphe à l'anneau des polynômes  $\mathbb{C}[z, w]$  localisé en l'idéal maximal  $(z, w)$ . Soit  $\tilde{\mathcal{V}}_p$  l'ensemble des valuations  $\tilde{\nu}$  sur  $\mathcal{O}_p$  telles que  $\tilde{\nu}(z) = 1$  et  $\tilde{\nu}(w) > 0$ . On peut alors définir une relation d'ordre naturelle sur  $\tilde{\mathcal{V}}_p$  (analogue à celles introduites sur les espaces de valuations précédents), et on munit  $\tilde{\mathcal{V}}_p$  de la topologie de la convergence simple. Muni de cette topologie,  $\tilde{\mathcal{V}}_p$  n'est pas compact, mais son adhérence dans l'ensemble des fonctions sur  $\mathcal{O}_p$  est égale à  $\tilde{\mathcal{V}}_p \cup \{\nu_0\}$  qui lui est compact.

Le corps des fractions de  $\mathcal{O}_p$  est le corps des fonctions rationnelles sur  $\mathbb{P}^2$ . La restriction de toute valuation  $\tilde{\nu} \in \tilde{\mathcal{V}}_p$  à l'anneau  $R$  des polynômes sur  $\mathbb{C}^2$  induit donc une valuation centrée à l'infini, que nous notons  $\iota_p(\tilde{\nu})$  ou simplement  $\nu$ . Puisque  $(1/z, w/z)$  sont des coordonnées affines sur  $\mathbb{C}^2$  il s'ensuit que  $\nu(\mathcal{L}) = \min\{\tilde{\nu}(1/z), \tilde{\nu}(w/z)\} = -1$ , i.e.  $\nu$  appartient en réalité à  $\mathcal{V}_\infty(\mathbb{C}^2)$ .

On peut penser à  $\nu$  comme un objet global et  $\tilde{\nu}$  comme un objet local, bien qu'ils ne soient réellement qu'une seule et même valuation.

Clairement,  $\iota_p : \tilde{\mathcal{V}}_p \rightarrow \mathcal{V}_\infty(\mathbb{C}^2)$  est injective, continue et préserve l'ordre, et  $\tilde{\mathcal{V}}_p \cap \tilde{\mathcal{V}}_q = \emptyset$  pour  $p \neq q$ . En mettant toutes ensemble ces applications  $\iota_p$ , pour  $p \in L_\infty$ , on obtient

LEMME 2.14. L'application

$$\{\nu_0\} \cup \bigsqcup_{p \in L_\infty} \tilde{\mathcal{V}}_p \xrightarrow{\iota_p} \mathcal{V}_\infty(\mathbb{C}^2)$$

est bijective, continue et préserve l'ordre.

Tous les espaces de valuations  $\tilde{\mathcal{V}}_p$  sont isomorphes à l'ensemble des valuations  $\tilde{\nu}$  sur l'anneau des séries formelles  $\mathbb{C}[[z, w]]$  avec  $\tilde{\nu}(w) > 0$  and  $\tilde{\nu}(z) = 1$ . On notera  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, z)$  l'union de cet ensemble et de la valuation divisorielle  $\text{ord}_z = \nu_0$ .

C'est un espace en tout point analogue à  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$  modulo le remplacement de la normalisation  $\nu(\mathfrak{m}) = +1$  par  $\nu(z) = +1$  (d'où le choix de notations). Les mêmes méthodes de preuve du Théorème 2.1 montre que cet espace possède une structure d'arbre enraciné en  $\text{ord}_z$  muni d'un ordre partiel naturel. On peut aussi le paramétrer par la version du défaut suivante. Pour tout germe de fonction holomorphe  $f$ , on définit tout d'abord  $\tilde{m}(f)$  comme la multiplicité d'intersection entre  $\{f = 0\}$  et  $\{z = 0\}$ . Ce nombre est exactement égal à l'ordre d'annulation en 0 de la fonction  $f(0, w)$ . Le défaut est alors défini par  $\tilde{\alpha}(\tilde{\nu}) := \sup \tilde{\nu}/\tilde{m}$ . On peut montrer que  $\tilde{\alpha}$  est une paramétrisation de  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, z)$ , en copiant la preuve du Théorème 2.2.

Enfin, pour  $\nu \in \mathcal{V}_\infty(\mathbb{C}^2)$ , on pose  $\alpha(\nu) := 1 - \tilde{\alpha}(\tilde{\nu})$ . Cette fonction jouera un rôle particulièrement important au Chapitre 4. On verra que pour une classe spéciale de valuations,  $\alpha$  peut être défini de manière analogue à son avatar

local, et que  $\alpha(\nu) = -\sup\{\nu(P)/\deg(P), P \in \mathbb{C}[X, Y]\}$ . Ce fait profond relie donc une donnée locale,  $\alpha(\nu)$ , à des données globales (les valeurs de  $\nu/\deg$  sur les polynômes).

On a alors le théorème suivant.

**THÉORÈME 2.5.** *L'espace de valuations  $(\mathcal{V}_\infty(\mathbb{C}^2), \leq)$  est un arbre réel complet enraciné en  $\nu_0$ . De plus,  $\alpha : \mathcal{V}_\infty(\mathbb{C}^2) \rightarrow [-\infty, +1]$  donne une paramétrisation décroissante de  $\mathcal{V}_\infty(\mathbb{C}^2)$ .*

Il est cependant très important de noter tout de suite que  $\mathcal{V}_\infty(\mathbb{C}^2)$  n'est PAS l'espace de valuations adapté pour étudier la dynamique des applications polynomiales. En effet, on verra qu'une application polynomiale non propre envoie certaines valuations centrées à l'infini sur des valuations centrées dans  $\mathbb{C}^2$ , et n'induit donc pas d'application naturelle sur  $\mathcal{V}_\infty(\mathbb{C}^2)$ . Une étape délicate et cruciale de notre étude sera donc consacrée à l'introduction d'un sous-arbre adéquat de  $\mathcal{V}_\infty(\mathbb{C}^2)$  qui sera lui invariant par l'action de toute application polynomiale.

## 2.4. Comparaison entre les divers arbres valuatifs

Nous terminons ce chapitre en comparant rapidement les trois arbres que nous avons décrits dans les sections précédentes.

Soit  $S$  une surface complexe (ouverte) lisse, et  $C \subset S$  une courbe analytique irréductible lisse et compacte. On va pour simplifier supposer que  $S$  est algébrique, et même quasi-projective. On note  $\mathcal{M}$  le corps des fonctions méromorphes sur  $S$ . On va définir  $\mathcal{V}(S, C)$  comme le sous-espace des semi-normes sur  $\mathcal{M}$  centrées sur  $C$  et normalisées. Expliquons ce que cela signifie en détails.

Pour tout point  $p \in S$ , l'anneau local  $\mathcal{O}_p$  des fonctions méromorphes régulières en  $p$  est un sous-anneau de  $\mathcal{M}$  sur lequel on peut donc restreindre toute semi-norme sur  $\mathcal{M}$ . Le centre d'une semi-norme  $|\cdot|$  est l'unique point (non nécessairement fermé) de  $S$  tel que  $|\cdot| < 1$  sur l'idéal maximal de  $\mathcal{O}_p$ . En particulier, lorsque  $|\cdot|$  est centrée sur  $C$ , deux cas peuvent apparaître. Soit le centre est la courbe  $C$ , auquel cas  $|\cdot| = \exp(-t \text{ord}_C)$  pour une constante  $t > 0$ ; soit il existe un unique point (fermé)  $p \in C$  tel que  $|\cdot| < 1$  sur l'idéal maximal de  $\mathcal{O}_p$ .

Soit  $|\cdot|$  une semi-norme de  $\mathcal{M}$  centrée sur  $C$ . Fixons un point (fermé)  $p \in C$  dans le centre de  $|\cdot|$ , et  $x_p \in \mathcal{O}_p$  une équation du germe de  $C$  en  $p \in C$ . On dira alors que  $|\cdot|$  est normalisée ssi  $|x_p| = e$ . On vérifie que cela ne dépend pas de l'équation choisie, et lorsque le centre de  $|\cdot|$  est  $C$ , ceci est équivalent à ce que  $|\cdot| = \exp(-\text{ord}_C)$ .

**DEFINITION 2.15.** L'espace  $\mathcal{V}(S, C)$  est par définition l'ensemble des semi-normes sur le corps des fonctions méromorphes de  $S$  centrées sur  $C$  et normalisées au sens précédent.

Comme on l'a vu après la Définition 2.5, la notion de semi-norme est essentiellement équivalente à celle de valuations. On peut donc tout aussi bien écrire la définition en termes de valuations.

Pour la relation d'ordre naturelle,  $\mathcal{V}(S, C)$  est un arbre réel enraciné en  $\exp(-\text{ord}_C)$ . La preuve est exactement la même que celle du Théorème 2.1.

THÉORÈME 2.6. *Les trois arbres  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}(X))$ ,  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$ , et  $\mathcal{V}_\infty(\mathbb{C}^2)$  sont isomorphes en tant qu'arbre réel enraciné. De manière plus précise, on a les isomorphismes suivants.*

- Soient  $S := \Delta \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ , et  $C := \{0\} \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ , où  $\Delta$  dénote le disque unité ouvert dans  $\mathbb{C}$ . Alors  $\mathcal{V}(S, C)$  s'identifie canoniquement à la droite projective au sens de Berkovich sur le corps  $\mathbb{C}(X)$ , i.e.  $\mathcal{V}(S, C) = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}(X))$ .
- Notons  $\pi : S \rightarrow \mathbb{C}^2$  l'éclatement du point  $0 \in \mathbb{C}^2$ , et  $C$  son diviseur exceptionnel. Alors  $\mathcal{V}(S, C)$  s'identifie canoniquement à l'espace de valuations  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$ .
- Finalement, notons  $S = \mathbb{P}^2$ , et  $C = L_\infty$  la droite à l'infini dans  $\mathbb{P}^2 \supset \mathbb{C}^2$ . Alors  $\mathcal{V}(S, C)$  s'identifie canoniquement à l'espace de valuations  $\mathcal{V}_\infty(\mathbb{C}^2)$ .

Les isomorphismes peuvent être construits assez facilement à l'aide des méthodes expliquées en §2.2.3.

On voit donc ainsi de manière frappante les similarités entre ces trois arbres. La différence fondamentale entre ceux-ci réside dans l'introduction des métriques que nous utiliserons dans les applications. Ces métriques différentes induisent différentes théories du Laplacien, et sont chacune adaptées à la situation géométrique qui guide la définition de l'espace de valuations. On sent donc un lien très étroit entre la définition de l'opérateur de Laplace sur les espaces de valuations (à travers la définition des métriques sur les arbres) et théorie de l'intersection (des courbes dans les surfaces analytiques). En effet, dans le premier cas  $C^2 = 0$ , dans le second  $C^2 = -1$  et dans le dernier  $C^2 = +1$ . Nous renvoyons au chapitre sur les perspectives p. 103 pour une discussion mettant un peu plus en évidence le lien entre théorie du potentiel sur les espaces de valuations et théorie de l'intersection.

## Bibliographie

- [AM73] Shreeram S. Abhyankar and Tzuong Tsieng Moh. Newton-Puiseux expansion and generalized Tschirnhausen transformation. I, II. *J. Reine Angew. Math.*, 260 :47–83 ; ibid. **261** (1973), 29–54, 1973.
- [Ber90] Vladimir G. Berkovich. *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, volume 33 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.
- [CPRL02] Antonio Campillo, Olivier Piltant, and Ana J. Reguera-López. Cones of curves and of line bundles on surfaces associated with curves having one place at infinity. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 84(3) :559–580, 2002.
- [FJ04] Charles Favre and Mattias Jonsson. *The valuative tree*, volume 1853 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [Mac36] S. MacLane. A construction for prime ideals as absolute values of an algebraic field. *Duke Math. J.*, 2 :492–510, 1936.
- [Moh74] T. T. Moh. On analytic irreducibility at  $\infty$  of a pencil of curves. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 44 :22–24, 1974.
- [RL03] Juan Rivera-Letelier. Espace hyperbolique  $p$ -adique et dynamique des fonctions rationnelles. *Compositio Math.*, 138(2) :199–231, 2003.
- [Rob00] Alain M. Robert. *A course in  $p$ -adic analysis*, volume 198 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [Spi90] Mark Spivakovsky. Valuations in function fields of surfaces. *Amer. J. Math.*, 112(1) :107–156, 1990.



## Analyse des singularités des fonctions psh

Le rôle central de ce chapitre sera joué par les fonctions plurisousharmoniques, que nous abrègerons dans la suite par l'acronyme psh. Ces fonctions sont définies sur toute variété complexe lisse, et sont celles qui possèdent des propriétés de concavité compatibles en un certain sens avec la structure complexe. Elles possèdent une place centrale en analyse et en géométrie complexe, nous renvoyons à [Kis00] pour un aperçu historique de la question. On dira qu'une fonction psh  $u : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  possède une singularité en 0 si  $u(0) = -\infty$ . L'étude des singularités des fonctions psh est très importante au moins pour deux raisons : en théorie de l'intersection des courants où les singularités apparaissent comme des obstructions à la définition de ces intersections ; et en géométrie, où les singularités permettent souvent de produire des objets (sous-variétés complexes, faisceaux cohérents d'idéaux) de nature globale. Nous renvoyons à [Dem93a] pour plus d'informations.

Deux approches sont disponibles pour analyser les singularités de  $u$ . La première est due à Lelong [Lel57], et consiste à mesurer la vitesse de décroissance de  $u$  dans un voisinage de 0, en lui associant un nombre réel positif, appelé *nombre de Lelong* et noté  $\nu^L(u, 0)$ . D'autres versions plus fines de cette construction ont été données depuis lors par Kiselman [Kis87] ou Demailly [Dem87]. Dans la suite, nous dirons que ces mesures de singularité sont de type  $L^\infty$ .

Il existe une deuxième méthode d'analyse des singularités, dont nous dirons qu'elle est de type  $L^2$ . Celle-ci consiste à regarder l'idéal des fonctions holomorphes dont le produit avec  $\exp(-u)$  reste localement intégrable. Cet idéal est appelé idéal multiplicateur de  $u$ , et permet de définir une version  $L^2$  du nombre de Lelong que l'on appelle le *seuil log-canonique* :  $\text{lct}(u) := \sup\{t > 0, \exp(-tu) \in L^2_{\text{loc}}\}$ . Si l'approche  $L^2$  est d'un abord techniquement plus difficile, elle s'avère nettement plus puissante que la précédente. En tous les cas, elle permet de relier directement  $u$  à des objets algébriques (les fonctions holomorphes).

En 1972, Skoda [Sko72] a démontré l'inégalité générale  $\nu^L(u)/n \leq 1/\text{lct}(u) \leq \nu^L(u)$ , qui illustre le lien étroit entre les approches  $L^2$  et  $L^\infty$ . L'idée nouvelle que les travaux [FJ05b], [FJ05a] réalisés en collaboration avec M. Jonsson ont mis à jour dans le cas 2-dimensionnel est que ces approches sont en réalité équivalentes au sens suivant :

la donnée des idéaux multiplicateurs de tous les multiples de  $u$  est équivalente à la donnée de tous les nombres de Lelong de  $u$  dans tous les éclatés au dessus de 0.

Pour illustrer ce fait de manière plus concrète, nous avons choisi de présenter la démonstration du résultat suivant, qui répond par l'affirmative en dimension 2 à une question de Demailly-Kollàr [DK01].

**THÉORÈME 3.1.** *Pour toute fonction psh  $u : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ , l'ensemble  $I = \{t > 0, \exp(-tu) \in L_{\text{loc}}^2\}$  est un intervalle ouvert. En d'autres termes  $I = ]0, t_0[$  pour un nombre réel  $t_0$  positif.*

Bien que ce résultat en lui-même ne possède pas de conséquences directes frappantes, les techniques de démonstration que l'on va présenter ci-dessous ouvrent nous semble-t'il de nouvelles perspectives dans l'étude des singularités des fonctions psh.

Détaillons un peu les idées de preuve du Théorème 3.1. La première étape consiste à regarder les nombres de Lelong de  $u$  dans tous les éclatements au dessus de 0, et de chercher à organiser toutes ces données. On remarque ainsi que celles-ci induisent une application  $g_u$  sur l'espace des valuations divisorielles de l'anneau  $\mathcal{O}$  des germes de fonctions holomorphes définies à l'origine, et donc sur un sous-espace de l'espace  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$  défini en §2.2. En utilisant un théorème d'approximation dû à Demailly de  $u$  par des fonctions du type  $\log \max\{|f_i|\}$  avec  $f_i$  holomorphes, on démontre alors le fait remarquable suivant. La fonction  $g_u$  est la restriction d'un potentiel positif (au sens de la théorie explicitée en §1.2.2). Notons ici que le choix adéquat de paramétrisation de  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$  s'avère crucial. En d'autres termes, toute fonction psh, i.e. toute fonction possédant des propriétés de concavité compatibles avec la structure complexe, induit une fonction sur  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$  possédant des propriétés de concavité compatible avec la structure d'arbre de cet espace. En tous les cas, il ressort du Théorème 1.3 que la donnée de la fonction  $g_u$  est équivalente à celle de son laplacien  $\rho_u := \Delta g_u$  qui est une mesure positive de masse finie sur  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$ .

La deuxième étape de la preuve du Théorème 3.1 consiste à relier  $\text{lct}(u)$  à  $g_u$ . Le nombre de Lelong  $\nu^L(u, p)$  de  $u$  en un point  $p$  d'un éclaté de  $(\mathbb{C}^2, 0)$  fournit une information sur la vitesse de décroissance de  $u$  dans un voisinage de  $p$ , c'est-à-dire sur un cône dans un voisinage de l'origine. On obtient donc une borne  $\text{lct}(u) \lesssim \nu^L(u, p)$ . Le point crucial est la preuve de l'existence d'un point  $p$  dans un éclaté pour lequel  $\nu^L(p, u)$  calcule précisément  $\text{lct}(u)$ , c'est-à-dire au voisinage duquel  $u$  possède la pire singularité au sens  $L^2$ . L'ouverture est alors une conséquence directe du fait que  $\nu^L(p, u)$  est linéaire en  $u$ .

En pratique la démonstration se déroule en travaillant toujours sur l'arbre valuatif  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$ . On montre que  $\exp(-u) \in L_{\text{loc}}^2$  ssi la fonction  $g_u/A$  est bornée par une constante  $< 1$ . Ici  $A$  est une fonction sur  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$  et à valeurs réelles mesurant l'ordre d'annulation du déterminant Jacobien des suites d'éclatements de point  $\pi : X \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ , et ce pour tout  $\pi$ . La comparaison entre  $A$  et le défaut est une des clés de notre étude. Le point crucial que nous avons mentionné ci-dessus consiste à montrer que la fonction  $g_u/A$  atteint son supremum sur  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$ . Pour cela, il faut contrôler les zones de l'arbre de valuations où  $g_u$  croît le plus : ce



sont celles où la masse de la mesure  $\rho_u$  est importante. In fine, c'est la finitude de la masse de  $\rho_u$  qui permet de trouver une valuation réalisant le supremum de  $g_u/A$ .

Nous avons divisé ce chapitre en deux parties. Dans la première, nous indiquons comment associer à une fonction psh  $u$  une application  $g_u$  sur  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$ , et décrivons les principales propriétés de  $g_u$ . Dans la seconde, nous introduisons les idéaux multiplicateurs, et donnons une esquisse de la preuve du Théorème 3.1.

### 3.1. La trace d'une fonction psh sur $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$

Notre but est ici d'associer à toute fonction psh  $u$  sur  $(\mathbb{C}^2, 0)$  une fonction  $g_u$  sur le sous-arbre de  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$  constitué des valuations quasimonomiales (au sens de §2.2.1), et d'en étudier ses principales propriétés.

**3.1.1. Généralités sur les fonctions psh.** Dans toute la suite, les fonctions psh seront toutes définies dans un voisinage de l'origine dans  $\mathbb{C}^2$ . On écrira  $dd^c u = \frac{i}{2\pi} \partial \bar{\partial} u$ . On notera pour simplifier  $\mathcal{O}$  l'anneau des germes de fonctions holomorphes en  $0 \in \mathbb{C}^2$ .

Pour tout  $\psi \in \mathcal{O}$ , la fonction  $\log |\psi|$  est psh. Plus généralement, si  $\psi_i \in \mathcal{O}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , alors  $u = \log(\sum_1^n |\psi_i|^2)$  est aussi psh. On dira qu'une fonction psh  $u$  est à *singularités logarithmiques* si on peut trouver  $\psi_i \in \mathcal{O}$  et  $c > 0$ , tels que la différence  $u - c \log(\sum_1^n |\psi_i|^2)$  soit localement bornée.

Notre étude utilise de manière cruciale une technique générale très puissante, développée par Demailly, d'approximation d'une fonction psh par des fonctions à singularités logarithmiques. Nous allons en résumer les ingrédients principaux. On renvoie à [DK01, Theorem 4.2] pour plus de détails.

Soit donc  $u$  une fonction psh fonction définie sur une boule fixe  $B$  contenant l'origine. Pour tout réel  $n > 0$ , soit  $\mathcal{H}_{nu}(B)$  l'espace de Hilbert des fonctions holomorphes  $f$  sur  $B$  telles que  $\|f\|_{nu} := \int_B |f|^2 \exp(-2nu) dV < +\infty$ . On définit alors

$$u_n = \frac{1}{2n} \log \sum_1^\infty |g_{nk}|^2 = \frac{1}{n} \log \sup\{|f| ; \|f\|_{nu} \leq 1\},$$

où  $g_{nk}$  est une base orthonormale de  $\mathcal{H}_{nu}(B)$ . La suite  $u_n$  converge vers  $u$  en un sens plutôt fort : il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $r > 0$  assez petit

$$u(p) - \frac{C}{n} \leq u_n(p) \leq \sup_{B(p,r)} u + \frac{C}{n} - \frac{2}{n} \log r. \quad (7)$$

En particulier ces inégalités impliquent  $u_n \rightarrow u$  dans  $L_{loc}^1$ . L'inégalité de gauche de (7) est la plus difficile à obtenir, elle est une conséquence du théorème d'extension (profond) d'Ohsawa-Takegoshi.

Il est aussi utile de tronquer la somme infinie définissant  $u_n$ . Plus précisément, pour un entier  $n$  donné et une plus petite boule  $B' \Subset B$  contenant l'origine fixée, il existe  $k_0 = k_0(u, n, B') < \infty$  tel que  $\sum_1^\infty |g_{nk}|^2 \leq C \sum_1^{k_0} |g_{nk}|^2$  sur  $B'$ , pour une constante  $C > 0$ . La différence  $u_n - (2n)^{-1} \log \sum_1^{k_0} |g_{nk}|^2$  est donc bornée, ce qui montre que  $u_n$  possède des singularités logarithmiques.

**3.1.2. Nombre de Lelong et de Kiselman.** On rappelle maintenant les outils principaux d'analyse  $L^\infty$  des singularités de fonctions psh, définis initialement par Lelong [Lel57] puis raffinés et étendus par Kiselman [Kis87]. Nous renvoyons à [Dem87] pour une discussion plus générale de toutes ces mesures de singularités.

Soit donc  $u$  une fonction psh, et fixons un système de coordonnées locales  $(x, y)$  et des réels  $a, b > 0$ . Le *nombre de Kiselman* de  $u$  associé aux poids  $(a, b)$  est défini par

$$\nu_{a,b}^{x,y}(u) := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{ab}{\log r} \sup\{u ; |x| < r^{\frac{1}{a}}, |y| < r^{\frac{1}{b}}\}. \quad (8)$$

Cette limite existe, car on montre que  $r \rightarrow \sup\{u ; |x| < r^{\frac{1}{a}}, |y| < r^{\frac{1}{b}}\}$  est convexe et croissante en fonction de  $\log r$ . Ce fait montre aussi que  $\nu_{a,b}^{x,y}(u)$  est le plus grand réel  $\gamma$  tel que

$$u(p) \leq \gamma \log \max\{|x|, |y|\} + O(1) \quad \text{quand } p \rightarrow 0. \quad (9)$$

Notons que par le principe du maximum, nous aurions aussi pu prendre le supremum soit sur le tore  $\{|x| = r^{1/a}, |y| = r^{1/b}\}$  soit sur l'ouvert  $\{|x| < r^{1/a}, |y| < |x|^{a/b}\}$ . Enfin, une définition équivalente du nombre de Kiselman qui découle du principe de Harnack, s'exprime sous la forme :

$$\nu_{a,b}^{x,y}(u) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{ab}{\log r} \iint u(r^{\frac{1}{a}} e^{i\theta}, r^{\frac{1}{b}} e^{i\vartheta}) \frac{d\theta d\vartheta}{(2\pi)^2}. \quad (10)$$

Dans le cas particulier où  $a = b = 1$ , le nombre de Kiselman se spécialise sur le *nombre de Lelong* de  $u$ , que nous noterons  $\nu^L(u)$ . Le nombre de Lelong d'une fonction psh localement bornée étant nul, on peut donc définir le nombre de Lelong d'un courant positif fermé  $T = dd^c u$  comme celui de son potentiel  $u$ . Le nombre de Lelong d'un courant se calcule aussi de la manière suivante. Soit  $\omega = dd^c(|x|^2 + |y|^2)$ , et  $\|T\| := T \wedge \omega$  la *mesure trace* de  $T$ . Alors

$$\nu^L(T) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \|T\| [B(0, r)], \quad (11)$$

où  $B(0, r)$  dénote la boule de centre 0 et de rayon  $r$ .

**3.1.3. Nombre de Kiselman et valuations monomiales.** Les nombres de Kiselman ont un lien très étroit avec les valuations monomiales. Rappelons qu'une valuation  $\nu$  sur l'anneau  $\mathcal{O}$  des germes de fonctions holomorphes en 0 est dite monomiale, si elle est du type  $\nu(\sum a_{ij} x^i y^j) := \min\{i s_1 + j s_2, a_{ij} \neq 0\}$ , pour un couple de réels  $(s_1, s_2)$ .

**PROPOSITION 3.1.** Soit  $u = c \log(\sum_1^n |\psi_i|) + O(1)$ ,  $c > 0$ ,  $\psi_i \in \mathcal{O}$ , une fonction psh à singularités logarithmiques. Alors

$$\nu_{a,b}^{x,y}(u) = c \min_i \nu_{a,b}(\psi_i), \quad (12)$$

où  $\nu_{a,b}$  est la valuation monomiale associée aux poids  $a, b$ .

**DÉMONSTRATION.** On peut supposer que  $c = 1$  et que le terme  $O(1)$  est absent. De plus, on remarque que  $\max \log |\psi_i| \leq \log \sum_1^n |\psi_i| \leq \max \log |\psi_i| + \log n$ , donc  $\nu_{a,b}^{x,y}(\log \sum |\psi_i|) = \min \nu_{a,b}^{x,y}(\log |\psi_i|)$ . On peut donc supposer que  $u = \log |\psi|$

pour un  $\psi \in \mathcal{O}$ . On développe alors  $\psi$  en série  $\psi = \sum a_{kl}x^k y^l$ . Par définition  $\nu_{a,b}(\psi) = \min\{k+tl ; a_{kl} \neq 0\} =: \alpha$ . Il est alors élémentaire de voir que  $\sup |\psi| \simeq r^\alpha$  dans la région  $\{|x| < r^{\frac{1}{a}}, |y| < r^{\frac{1}{b}}\}$ . Donc  $\nu_{a,b}^{x,y}(\log |\psi|) = \alpha = \nu(\psi)$ .  $\square$

**3.1.4. Valuation et mesure de singularité d'une fonction psh.** Notre but est d'expliquer et de commenter brièvement le résultat suivant.

**THÉORÈME 3.2.** *Soit  $\nu \in \mathcal{V}_{\text{qm}}$  une valuation quasimonomiale. Alors il existe une unique fonction à valeurs réelles positives  $T_\nu$  définie sur l'ensemble des fonctions psh, et satisfaisant aux propriétés suivantes.*

- Compatibilité :  $T_\nu(\log |\psi|) = \nu(\psi)$  pour tout  $\psi \in \mathcal{O}$  ;
- Monotonie :  $T_\nu(u) \leq T_\nu(v)$  si  $u \geq v + O(1)$  ;
- Homogénéité :  $T_\nu(su) = sT_\nu(u)$  pour tout  $s \geq 0$  ;
- Tropicalité :  $T_\nu(u+v) = T_\nu(u) + T_\nu(v)$  ;  $T_\nu \max\{u, v\} = \min\{T_\nu(u), T_\nu(v)\}$  ;
- Semi-continuité :  $\limsup T_\nu(u_n) \leq T_\nu(u)$  si  $u_n \rightarrow u$  dans  $L_{\text{loc}}^1$  ;
- Minimalité : si  $T'_\nu$  vérifie toutes les conditions ci-dessus, alors  $T_\nu \leq T'_\nu$ .

On écrira simplement  $T_\nu(u) = \nu(u)$ .

**ESQUISSE DE PREUVE.** Supposons tout d'abord que  $\nu$  soit une valuation monomiale. On définit alors  $T_\nu$  comme le nombre de Kiselman associé aux poids  $a, b$ . La première propriété est une conséquence de la Proposition 3.1. Les quatre suivantes découlent de la définition des nombres de Kiselman. Enfin la dernière est une conséquence du fait suivant : pour la suite de fonctions psh à singularités logarithmiques  $u_n$  définie en §3.1.1 et approchant  $u$ , on a  $T_\nu(u_n) \rightarrow T_\nu(u)$ . Ce dernier fait s'appuie sur un argument utilisant la concavité du log.

Pour traiter le cas d'une valuation quasimonomiale  $\nu$ , rappelons qu'une telle valuation est obtenue comme suit. Il existe  $\pi : X \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  une suite d'éclatements de points au dessus de 0 ;  $p$  un point sur le diviseur exceptionnel de  $\pi$  ; et  $x, y$  un système de coordonnées tel que  $\pi^{-1}(0) \subset \{xy = 0\}$ , avec  $\nu = \pi_* \nu_{a,b}$ , où  $\nu_{a,b}$  est la valuation monomiale dans les coordonnées  $x, y$  associée aux poids  $(a, b)$  positifs. On ramène donc la définition de  $T_\nu$  au cas précédent, et on pose  $T_\nu(u) := T_{\nu_{a,b}^{x,y}}(u \circ \pi)$ . Les quatre premières propriétés sont alors immédiates. La semi-continuité résulte du fait que  $u_n \circ \pi \rightarrow u \circ \pi$  dans  $L_{\text{loc}}^1$  si  $u_n \rightarrow u$ . Enfin, même si la preuve de la minimalité n'est pas une conséquence directe du cas monomial, elle en est essentiellement de même nature.  $\square$

On donne dans [FJ05b, Sections 3, 4] plusieurs autres descriptions de l'évaluation de  $\nu$  sur une fonction psh.

En réécrivant la définition du nombre de Kiselman en terme de supremum sur des boules, on voit que  $\nu(u)$  peut être aussi calculé comme limite de sup sur des régions sous-analytiques particulières définies au voisinage de l'origine.

Il est aussi démontré dans [FJ05b, Proposition 3.9] que l'on peut interpréter  $\nu(u)$  comme produit d'intersection avec une fonction psh bien choisie :  $\nu(u)$  devient alors un nombre de Lelong généralisé au sens de Demailly.

Dans le cas des valuations divisorielles, le nombre  $\nu(u)$  s'interprète naturellement de manière géométrique, voir [FJ05b, Proposition 4.1].

**PROPOSITION 3.2.** Soit  $\nu \in \mathcal{V}$  une valuation divisorielle, associée à une composante  $E \subset \pi^{-1}(0)$  pour une suite d'éclatements de points  $\pi$  au-dessus de l'origine, et telle que  $\nu = \pi_* \text{ord}_E$ . Alors pour toute fonction  $u$  psh,  $\nu(u)$  est égal au nombre de Lelong de  $u \circ \pi$  évalué en un point générique de  $E$ .

Notons enfin qu'il n'est a priori pas évident de définir  $\nu(u)$  pour une valuation quelconque (infiniment singulière par exemple). On verra à la section suivante que l'on peut effectivement le faire, mais ceci résulte de manière indirecte d'une étude de la fonction  $\nu \mapsto \nu(u)$  sur l'espace des valuations quasimonomiales.

**3.1.5. Potentiel sur  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$  et fonction psh.** Le Théorème 3.2 permet de définir pour toute fonction psh une fonction  $g_u(\nu) := \nu(u)$  sur l'espace  $\mathcal{V}_{\text{qm}} \subset \mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$  des valuations quasimonomiales normalisées. On a maintenant le résultat fondamental suivant.

**THÉORÈME 3.3.** Munissons l'arbre  $\mathcal{V}_{\text{qm}}$  de la paramétrisation  $\alpha : \mathcal{V}_{\text{qm}} \rightarrow ]+1, +\infty[$  définie par  $\alpha(\nu) := \sup \nu/\nu_{\mathfrak{m}}$ , voir §2.2.2. Alors, pour toute fonction psh  $u$ , l'application  $g_u : \mathcal{V}_{\text{qm}} \rightarrow \mathbb{R}_+$  est un potentiel positif au sens de §1.2.3.

La démonstration est en réalité très simple, une fois que l'on a admis les résultats de §2.2.2. Le cas des fonctions du type  $\log |\psi|$  avec  $\psi \in \mathcal{O}$  est une conséquence du Théorème 2.3. Le cône des potentiel positifs  $\mathcal{P}^+$  étant stable par maximum, on en déduit le cas des fonctions psh à singularités logarithmiques. Enfin pour le cas général, on s'appuie encore une fois sur le théorème d'approximation de Demailly. Pour la suite  $u_n$  de fonctions psh à singularités logarithmiques définies en §3.1.1, on a vu que  $\nu(u_n) \rightarrow \nu(u)$  pour toute valuation quasimonomiale, donc  $g_{u_n} \rightarrow g_u$  ponctuellement. Comme le cône des potentiels positifs est fermé et que  $g_{u_n} \in \mathcal{P}^+$  pour tout  $n$ , la fonction  $g_u$  est aussi un potentiel positif.

Remarquons que le fait que  $g_u$  soit croissante le long de tout segment issu de la racine  $\nu_{\mathfrak{m}}$  permet d'étendre la fonction  $g_u$  aux bouts de  $\mathcal{V}_{\text{qm}}$ , c'est-à-dire sur tout l'arbre  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$ . Dans ce cas cependant, il est possible que  $\nu(u) = +\infty$ , comme on le voit si  $u = \log |\psi|$  pour  $\psi \in \mathcal{O}$  et  $\nu$  est une valuation de courbe associée à une composante irréductible de  $\psi^{-1}(0)$ .

**3.1.6. Mesure sur  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$  et fonction psh.** On peut maintenant appliquer l'opérateur de Laplace défini en §1.2.2 à la fonction  $g_u$ . Il donne une mesure positive  $\rho_u := \Delta g_u$  sur le complété (au sens des arbres) de  $\mathcal{V}_{\text{qm}}$  qui n'est autre que  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$ . On vérifie que la masse de  $\rho_u$  est exactement égale au nombre de Lelong de  $u$  en 0. Du fait que l'on travaille sur un arbre paramétré, la donnée de la mesure  $\rho_u$  est équivalente à celle de la fonction  $g_u$ . On a donc le résultat suivant.

**PROPOSITION 3.3.** Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions psh. Les trois assertions suivantes sont alors équivalentes.

- Pour toute composée finie d'éclatements de points  $\pi : X \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ , et tout point  $p \in \pi^{-1}\{0\}$ , on a  $\nu^L(\pi^*u, p) = \nu^L(\pi^*v, p)$  ;
- $u$  et  $v$  définissent la même fonction  $g_u = g_v$  sur l'arbre  $\mathcal{V}_{\text{qm}}$  ;
- $u$  et  $v$  définissent la même mesure  $\rho_u = \rho_v$  sur  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$ .

La donnée de la mesure  $\rho_u$  est souvent plus maniable que la fonction  $g_u$ . Ainsi, la masse de  $\rho_u$  sur une valuation de courbe analytique  $\nu_D$  calcule exactement la masse du courant  $dd^c u$  sur  $D$ , et on a  $\rho_u\{\nu_D\} \geq \lambda m(D)$  ssi  $dd^c u \geq \lambda[D]$ . Plus généralement, la masse de  $\rho_u$  dans une région permet de contrôler très précisément la croissance de  $g_u$  dans celle-ci. Cette remarque peut être utilisée pour démontrer le théorème de désingularisation approché suivant [FJ05b, Theorem 7.1], qui généralise les résultats de [Mim01, Gue05].

**THÉORÈME 3.4.** *Soit  $u$  une fonction psh telle que  $dd^c u$  ne charge aucune courbe. Alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une composée finie d'éclatements de points  $\pi : X \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  telle que  $\pi^* dd^c u = T + D$ , où  $D$  est supporté sur le diviseur exceptionnel  $\pi^{-1}(0)$ ; et  $T$  a tous ses nombres de Lelong inférieur à  $\varepsilon$ .*

Mentionnons enfin quelques questions naturelles liées aux mesures associées aux fonctions psh.

**QUESTION 1.** Peut-on donner des conditions nécessaires et suffisantes caractérisant les mesures  $\rho$  sur  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$  telles que  $\rho = \rho_u$  pour une fonction psh  $u$  ?

**QUESTION 2.** Supposons que  $\rho = \rho_u$  pour une fonction psh  $u$ . Existe-t'il une fonction psh « la moins singulière » parmi celles réalisant cette égalité ? Si la réponse est positive, cette fonction possède-t'elle des propriétés remarquables ?

Des éléments de réponses à ces deux questions sont donnés en [FJ05b, Section 6.2].

### 3.2. Idéaux multiplicateurs

Si la section précédente était consacrée à l'étude  $L^\infty$  des singularités de fonctions psh, dans cette section, nous nous concentrons sur l'approche  $L^2$ , et les idéaux multiplicateurs. Nous esquissons en §3.2.3 la preuve du Théorème 3.1.

**3.2.1. Fonctions psh à singularités logarithmiques.** Il n'est pas question ici de présenter la théorie générale des idéaux multiplicateurs, et nous renvoyons à [Laz04, Part Three] à la fois pour un historique et un aperçu très complet de cette théorie. Mentionnons simplement que celle-ci a émergé au sein de la géométrie analytique complexe au début des années 90 sous l'impulsion initiale de Nadel [Nad90], puis de Demailly [Dem93b] et Siu [Siu93], et a depuis donné de nombreuses applications, dont la plus célèbre est sans doute la démonstration de l'invariance des plurigenres [Siu98].

**DEFINITION 3.4.** Soit  $u : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  une fonction psh. On définit  $\mathcal{J}(u)$  comme l'idéal des fonctions holomorphes  $f$  telles que  $|f| \exp(-u) \in L^2_{\text{loc}}$ .

Bien que nous n'en aurons pas besoin, mentionnons que l'on peut aussi définir le faisceau des idéaux multiplicateurs dont l'espace des sections sur tout ouvert  $U$  est donné par les fonctions holomorphes sur  $U$  intégrables  $L^2$  pour le poids  $\exp(-u)$ . On montre en utilisant les estimées  $L^2$  de Hörmander que ce faisceau est cohérent.

Notre but est de donner une définition valuative de  $\mathcal{J}(u)$ , en terme de la fonction  $g_u : \mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m}) \rightarrow \mathbb{R}_+$  définie à la section précédente. Afin de motiver cette définition, nous allons nous intéresser tout d'abord au cas des fonctions à singularités logarithmiques.

Soient  $u$  une fonction psh à singularités logarithmiques, et écrivons  $u = c \log \max |f_i|$  pour  $f_i$  holomorphes et  $c > 0$ . Toute composée finie d'éclatements de points  $\pi : X \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  telle que la courbe  $\{f_i \circ \pi = 0\}$  est à croisements normaux est appelée *résolution* de  $u$ . Il en existe toujours. Pour une telle résolution, et pour tout point  $p \in \pi^{-1}(0)$ , il existe des coordonnées  $x, y$  telles que  $\pi^{-1}(0) \subset \{xy = 0\}$ , et  $u = u_x \log |x| + u_y \log |y| + O(1)$  pour des constantes  $u_x, u_y \geq 0$ .

Soit maintenant  $\phi$  un germe de fonction holomorphe, pour lequel on cherche à tester si  $\phi \in \mathcal{J}(u)$ . On fixe une résolution  $\pi$  de  $u$ . La formule de changement de variables implique que  $|\phi| \exp(-u) \in L_{\text{loc}}^2$  ssi  $|\phi \circ \pi| \exp(-u \circ \pi) \times |J\pi|$  est localement  $L^2$  en tout point  $p \in \pi^{-1}(0)$ , où  $J\pi$  dénote le déterminant jacobien de  $\pi$ . Au voisinage de tout point de  $\pi^{-1}(0)$ , les fonctions  $u \circ \pi$  et  $\phi \circ \pi$  possèdent toutes les deux une forme particulièrement simple de type monomiale. Comme  $|x|^a |y|^b \in L_{\text{loc}}^1$  ssi  $\min\{a, b\} > -2$ , on obtient donc facilement un critère déterminant si  $\phi \in \mathcal{J}(u)$  ou non.

Avant de l'énoncer, il nous faut introduire une notion importante.

**DEFINITION 3.5.** Soit  $E \subset \pi^{-1}(0)$  une composante irréductible d'une composée finie d'éclatements de points  $\pi : X \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ . Localement, en un point  $p \in E$ , on peut définir le déterminant Jacobien, noté  $J\pi$ . Son ordre d'annulation en un point générique de  $E$  sera noté  $J(E)$ . On introduit aussi le nombre  $A(E) := J(E) + 1$ .

Ces nombres ne dépendent que de la valuation divisorielle associée à  $E$ , et pour tout diviseur exceptionnel, on peut donc poser  $A(\pi_* \text{ord}_E) := A(E)$ . On étend alors la fonction  $A$  en une fonction définie sur le sous-espace des valuations divisorielles de  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$ , en imposant  $A(t\nu) = tA(\nu)$  pour tout  $t > 0$ .

**PROPOSITION 3.6.** Soit  $u$  une fonction psh à singularités logarithmiques, et  $\pi : X \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  une résolution des singularités de  $u$ . Les trois assertions suivantes sont alors équivalentes.

- $\phi \in \mathcal{J}(u)$ ;
- pour tout diviseur  $E \subset \pi^{-1}(0)$ ,  $\text{ord}_E(\phi \circ \pi) > \text{ord}_E(u \circ \pi) - A(E)$ ;
- pour toute valuation divisorielle  $\nu \in \mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$  associée à un diviseur  $E \subset \pi^{-1}(0)$ , on a  $\nu(\phi) > \nu(u) - A(\nu)$ .

**DÉMONSTRATION.** La preuve résulte des considérations précédentes. En un point générique de  $E = \{x = 0\}$ , on a  $|\phi \circ \pi|^2 \times \exp(-2u \circ \pi) \times |J\pi|^2 = |x|^{2(\text{ord}_E(\phi \circ \pi) - \text{ord}_E(u \circ \pi) + A(E) - 1)}$  qui est localement intégrable ssi l'exposant est  $> -2$ . Ceci donne (essentiellement) l'équivalence entre la première et la seconde assertion. La dernière assertion est une reformulation de la seconde en termes valuatifs.  $\square$

Cette proposition tout à fait classique est une paraphrase de la définition d'idéal multiplicateur en géométrie algébrique, voir [Laz04, Définition 9.2.1]. On va maintenant s'attacher à l'étendre au cas des fonctions psh quelconques.

**3.2.2. Finesse.** La première étape consiste à étudier la fonction  $A$  définie dans le paragraphe précédent pour les valuations divisorielles, et à l'étendre aux autres types de valuations.

**THÉORÈME 3.5.** *Il existe une unique application  $A$  à valeurs réelles positives, définie sur l'espace des valuations sur  $\mathcal{O}$  centrées à l'origine, et satisfaisant aux conditions suivantes.*

- $A(t\nu) = tA(\nu)$  pour tout  $t > 0$ .
- $A(\nu) - 1$  coïncide avec l'ordre d'annulation du déterminant jacobien de  $\pi$ , si  $\nu$  est divisorielle et  $\nu = \pi_* \text{ord}_E$  pour une composée d'éclatements de points  $\pi : X \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ .
- la restriction de  $A$  à tout segment  $[\nu_m, \nu]$  de l'arbre  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$  est continue.

**DÉMONSTRATION.** L'unicité est immédiate, car toute valuation  $\nu \in \mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$  est limite croissante de valuations divisorielles. Pour l'existence, on montre que la restriction de  $A$  au sous-ensemble (dense) des valuations divisorielles de  $[\nu_m, \nu]$  est croissante et affine par morceaux pour la paramétrisation donnée par le défaut, et ce pour toute valuation quasi-monomiale.

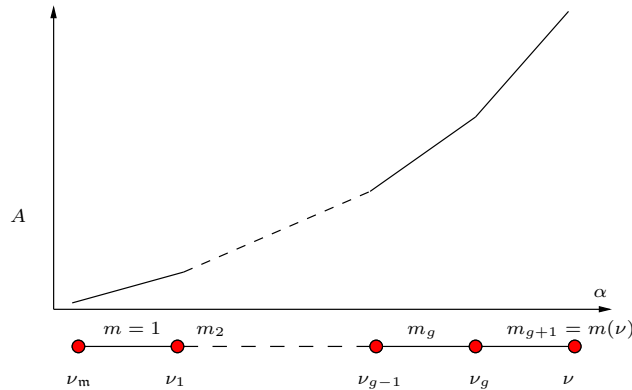
Ceci résulte de deux calculs élémentaires. Dans le cas où  $\nu$  est divisorielle et monomiale,  $\nu = \nu_{s,t}^{x,y}$ , on montre que  $A(\nu) = s + t$ . En particulier on a  $A(\nu_m) = 2$ . Ce calcul montre bien que  $A$  est affine et croissante sur les deux segments de valuations monomiales  $[\nu_m, \nu_x] \cup [\nu_m, \nu_y]$ . Enfin, dans le cas où  $\nu$  est quasimonomiale, on se ramène au cas précédent, à l'aide de la formule

$$A(\pi_*\nu) = A(\nu) + \nu(J\pi), \tag{13}$$

valable pour toute application holomorphe  $\pi : X \rightarrow X'$ . □

**DEFINITION 3.7.** La fonction  $A : \mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m}) \rightarrow \mathbb{R}_+$  définie précédemment est appelée *finesse*. Elle prend ses valeurs dans le segment  $[2, +\infty]$ .

Le point crucial dans notre approche des idéaux multiplicateurs est le résultat suivant qui explicite le comportement de la finesse sur l'arbre  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$ , et le relie à un invariant entier des valuations appelé *multiplicité*.



**DEFINITION 3.8.** On définit  $m : \mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m}) \rightarrow \mathbb{N}^*$  la fonction à valeurs entières, maximale et croissante parmi les fonctions vérifiant  $m(\nu_C) := \nu_m(C)$  pour toute courbe irréductible.

En d'autres termes si  $\nu$  est dominée par au moins une valuation de courbe, on pose  $m(\nu) = \min\{m(C), \nu_C > \nu\}$ . Sinon  $\nu$  est une valuation de type infiniment singulière et dans ce cas on peut montrer que  $m(\nu) = \infty$ .

**THÉORÈME 3.6.** *Pour toute valuation quasi-monomiale  $\nu \in \mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$ , il existe une suite finie de valuations divisorielles  $\nu_{\mathfrak{m}} = \nu_0 < \nu_1 \cdots \nu_g < \nu_{g+1} = \nu$ , telle que  $m$  soit constante sur chaque segment  $[\nu_i, \nu_{i+1}]$ , égale à  $m_i$ . De plus,  $m_1 = 1$ , et  $m(\nu_i)$  divise  $m(\nu_{i+1})$  pour tout  $i$ .*

*Enfin  $m(\nu) = \infty$  ssi  $\nu$  est une valuation infiniment singulière.*

**THÉORÈME 3.7.** *Pour toute valuation  $\nu \in \mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$ , on a*

$$A(\nu) := 1 + \int_{\nu_{\mathfrak{m}}}^{\nu} m(\mu) d\alpha(\mu) .$$

*En particulier, sur tout segment  $[\nu_{\mathfrak{m}}, \nu]$ , la fonction  $A$  est convexe, croissante de  $\alpha$ , et la pente  $dA/d\alpha$  est entière.*

Ces deux résultats sont illustrés par la figure ci-contre. Ce sont eux qui donnent les clés de la caractérisation purement valuative des idéaux multiplicateurs, et donc de la preuve du Théorème 3.1.

**REMARQUE 3.9.** La fonction multiplicité définie sur l'arbre  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$  combinée au défaut contient en réalité toute la structure fine des valuations. A l'aide de la suite décrite au Théorème 3.6, on peut ainsi retrouver complètement le semi-groupe d'une valuation, décrire son anneau gradué, etc.

**PREUVE DES THÉORÈMES 3.6, 3.7.** Le Théorème 3.6 est tout d'abord une conséquence (facile) de la description des valuations en termes des polynômes clé, expliquée en §2.2.2.2.

On définit ensuite  $\tilde{A}(\nu) := 1 + \int_{\nu_{\mathfrak{m}}}^{\nu} m(\mu) d\alpha(\mu)$ . Comme  $m$  est positive et croissante et à valeurs entières,  $\tilde{A}$  est croissante et convexe à dérivée entière.

Pour conclure, on interprète  $\tilde{A}(\nu)$  dans le cas des valuations divisorielles. L'interprétation se fait en deux étapes. Tout d'abord en calculant  $A(\nu)$  en termes d'une donnée de type série de Puiseux caractérisant  $\nu$ . Nous renvoyons à [FJ04, Chapter 4] pour des détails sur cette technique. Enfin, on relie cette donnée associée à un développement de Puiseux à une donnée géométrique, qui permet de montrer que  $\tilde{A} = A$ . Ceci est réalisé en [FJ04, Proposition 6.26].  $\square$

**3.2.3. Caractérisation valuative.** On peut maintenant énoncer le résultat suivant.

**THÉORÈME 3.8.** *Soit  $u$  une fonction psh. Alors  $\phi \in \mathcal{J}(u)$  ssi*

$$\sup_{\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})} \frac{\nu(u)}{\nu(\phi) + A(\nu)} < 1 . \quad (14)$$

**PREUVE DU THÉORÈME 3.1.** C'est maintenant une conséquence formelle du résultat précédent. En effet,  $\text{lct}(u) = \sup\{t > 0, \exp(-tu) \in L_{\text{loc}}^2\} = \sup\{t > 0, 1 \in \mathcal{J}(tu)\}$ . L'équation (14) donne donc  $T := \text{lct}(u) = \sup \nu(u)/A(\nu)$ . Mais dans ce cas, on a  $\sup \nu(Tu)/A = 1$  donc  $1 \notin \mathcal{J}(Tu)$ .  $\square$



ESQUISSE DE PREUVE DU THÉORÈME 3.8. Le point clé est l'énoncé suivant.

PROPOSITION 3.10. La fonction

$$\chi_u(\nu) := \frac{\nu(u)}{\nu(\phi) + A(\nu)}$$

atteint son supremum en une valuation  $\nu$  qui est soit quasimonomiale, soit une valuation de courbe.

Supposons tout d'abord que  $\sup \chi_u \geq 1$ . La proposition précédente nous fournit une valuation  $\nu$  telle que  $\nu(u) \geq \nu(\phi) + A(\nu)$ . Supposons pour simplifier que  $\nu$  soit divisorielle (le cas des valuations de courbes ou quasimonomiales irrationnelles est tout à fait analogue). Prenons  $\pi : X \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  une composée finie d'éclatements de points telle que  $\nu$  soit associée à la composante  $E \subset \pi^{-1}(0)$ . Choisissons de plus un point  $p \in E$  générique. Dans un système de coordonnées locales, on a alors  $u \circ \pi \leq \nu(u) \log \text{dist}(\cdot, p) + O(1)$ , et  $\log |\phi| = \nu(\phi) \log \text{dist}(\cdot, p) + O(1)$ . On tire de ces deux inégalités l'estimation

$$|\phi e^{-u}|^2 \circ \pi |J\pi|^2 \geq \text{dist}(\cdot, p)^{2[\nu(u) - \nu(\phi) - A(\nu)]},$$

ce qui implique la non-intégrabilité de  $|\phi \exp(-u)|^2 \circ \pi |J\pi|^2$  au voisinage de  $p$ . Donc  $\phi \notin \mathcal{J}(u)$ .

Supposons maintenant que  $\sup \chi < 1$ . On veut montrer que  $|\phi| \exp(-u)$  est localement  $L^2$ . Si  $u_n$  dénote la suite de fonctions à singularités logarithmiques décroissantes vers  $u$  et définie par le processus explicité en §3.1.1, on montre que  $|\nu(u_n) - \nu(u)| \leq A(\nu)/n$  pour toute valuation, et donc  $\sup \chi_{u_n} < 1$  pour  $n$  assez grand. On est donc ramené au cas des fonctions à singularités logarithmiques, qui se traite en utilisant la Proposition 3.6.  $\square$

PREUVE DE LA PROPOSITION 3.10. Soit  $\mathcal{T}$  l'ensemble des valuations  $\nu$  telles que  $\rho_u\{\mu \geq \nu\} \geq \chi_u(\nu_m)m(\nu)$ . Ici  $\rho_u$  est la mesure positive sur  $\mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$  associée à la fonction  $g_u$ . On voit facilement que  $\mathcal{T}$  est un arbre qui possède au plus  $1/\chi(\nu_m)$  extrémités. C'est donc un arbre fini. Ses bouts sont par ailleurs tous de multiplicité fini, et sont donc soit des valuations quasimonomiales soit des valuations de courbes. On conclut en remarquant d'une part que  $\sup \chi_u = \sup_{\mathcal{T}} \chi_u$ ; puis que la restriction de  $\chi_u$  à  $\mathcal{T}$  est continue et donc atteint nécessairement son supremum dessus. Pour démontrer  $\sup \chi_u = \sup_{\mathcal{T}} \chi_u$ , on utilise à la fois la convexité de  $g_u$  et la concavité de  $A$  en fonction de  $\alpha$ , et ce sur tout segment  $[\nu_m, \nu]$ .  $\square$



## Bibliographie

- [Dem87] Jean-Pierre Demailly. Nombres de Lelong généralisés, théorèmes d'intégralité et d'analyticité. *Acta Math.*, 159(3-4) :153–169, 1987.
- [Dem93a] Jean-Pierre Demailly. Monge-Ampère operators, Lelong numbers and intersection theory. In *Complex analysis and geometry*, Univ. Ser. Math., pages 115–193. Plenum, New York, 1993.
- [Dem93b] Jean-Pierre Demailly. A numerical criterion for very ample line bundles. *J. Differential Geom.*, 37(2) :323–374, 1993.
- [DK01] Jean-Pierre Demailly and János Kollár. Semi-continuity of complex singularity exponents and Kähler-Einstein metrics on Fano orbifolds. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 34(4) :525–556, 2001.
- [FJ04] Charles Favre and Mattias Jonsson. *The valuative tree*, volume 1853 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [FJ05a] Charles Favre and Mattias Jonsson. Valuations and multiplier ideals. *J. Amer. Math. Soc.*, 18(3) :655–684 (electronic), 2005.
- [FJ05b] Charles Favre and Mattias Jonsson. Valutive analysis of planar plurisubharmonic functions. *Invent. Math.*, 162(2) :271–311, 2005.
- [Gue05] Vincent Guedj. Desingularization of quasiplurisubharmonic functions. *A paraître dans Intern. J. of Math.*, 2005.
- [Kis87] Christer Kiselman. Un nombre de lelong raffiné. *Séminaire d'analyse complexe et géométrie*, pages 61–70, 1985-1987.
- [Kis00] Christer O. Kiselman. Plurisubharmonic functions and potential theory in several complex variables. In *Development of mathematics 1950–2000*, pages 655–714. Birkhäuser, Basel, 2000.
- [Laz04] Robert Lazarsfeld. *Positivity in algebraic geometry. II*, volume 49 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Positivity for vector bundles, and multiplier ideals.
- [Lel57] Pierre Lelong. Intégration sur un ensemble analytique complexe. *Bull. Soc. Math. France*, 85 :239–262, 1957.
- [Mim01] S.K. Mimouni. *Singularités des fonctions plurisousharmoniques et courants de Liouville*. PhD thesis, Faculté des sciences de Monastir, Tunisie, 2001.
- [Nad90] Alan Michael Nadel. Multiplier ideal sheaves and Kähler-Einstein metrics of positive scalar curvature. *Ann. of Math. (2)*, 132(3) :549–596, 1990.
- [Siu93] Yum Tong Siu. An effective Matsusaka big theorem. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 43(5) :1387–1405, 1993.
- [Siu98] Yum-Tong Siu. Invariance of plurigenera. *Invent. Math.*, 134(3) :661–673, 1998.
- [Sko72] Henri Skoda. Sous-ensembles analytiques d'ordre fini ou infini dans  $\mathbf{C}^n$ . *Bull. Soc. Math. France*, 100 :353–408, 1972.



## Croissance des degrés des applications rationnelles

On va maintenant se tourner vers des applications plus dynamiques de notre analyse sur les arbres. Avant d'énoncer le résultat dont nous voulons donner une esquisse dans ce chapitre, nous allons présenter brièvement la problématique générale, dans lequel celui-ci s'insère.

Soit  $F : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  une application rationnelle dominante. Décrire la dynamique de  $F$  consiste à donner une description qualitative ou quantitative aussi fine que possible des orbites des points, c'est-à-dire des suites  $\{F^n(p)\}_{n \geq 0}$  pour  $p \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . En dehors de cas très particuliers, le système présente toujours une grande sensibilité aux conditions initiales, et il est donc impossible de décrire les orbites de tous les points de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . On est donc naturellement amené à adopter une approche statistique, c'est-à-dire à s'intéresser au comportement des orbites de la plupart des points au sens de la mesure. Une des composantes du problème consiste à choisir des mesures invariantes par  $F$  qui sont significatives dynamiquement.

Pour les systèmes rationnels ci-dessus, très peu de résultats généraux sont connus sur le devenir des orbites sur des ensembles de mesure de Lebesgue positive (par exemple des ouverts), voir cependant [BS91, Ued94, FS95a, Aba03]. Les plus récents travaux [BLS93, FS95b, Can01, BD01, DS03, Gue05] s'intéressent plutôt à la construction et à l'étude d'une mesure de probabilité invariante, qui recèlerait en quelque sorte le maximum de complexité dynamique de  $F$  : c'est-à-dire d'une mesure d'entropie maximale. En général, il apparaît cependant difficile de les construire directement. Une stratégie générale de construction des mesures d'entropie maximale a été proposée dans [Gue02]. Elle est basée sur la construction préalable d'un objet invariant appelé *courant de Green* : c'est un courant positif fermé de bidegré  $(1, 1)$ , ne chargeant pas les courbes algébriques et invariant par la dynamique.

Supposons par exemple que la suite des degrés  $\deg(F^n)$  soit multiplicative, au sens où  $\deg(F^n) = \deg(F)^n$  pour tout  $n$ . On montre alors que pour presque toute droite  $L \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ , la suite  $\deg(F)^{-n}[F^{n*}L]$  converge vers un courant  $T$  indépendant du choix de  $L$ , et que celui-ci vérifie  $F^*T = \deg(F)T$ , voir [Sib99, Théorèmes 1.6.1, 1.8.1]. En général cependant, la suite des degrés des itérés de  $F$  n'est pas multiplicative, et on ne sait alors pas construire de courant de Green.

Une approche naturelle consiste à éclater  $\mathbb{P}^2$ , afin de récupérer la multiplicativité des degrés. Pour les applications birationnelles, c'est-à-dire admettant un inverse rationnel, on montre ainsi qu'après une suite adéquate d'éclatements, l'action de  $F$  sur le groupe de Néron-Severi de la nouvelle surface rationnelle obtenue vérifie  $F^{n*} = F^{*n}$  pour tout  $n$ , voir [DF01]. Cette propriété permet

effectivement de construire un courant de Green. Dans le cas général des applications rationnelles, une telle approche est cependant vouée à l'échec comme le montrent les exemples de [Fav03].

Notre but est ici de décrire une première catégorie d'applications rationnelles de  $\mathbb{P}^2$  non inversibles pour lesquelles on peut décrire en détails la suite  $\deg(F^n)$ , et construire un courant de Green.

**THÉORÈME 4.1 ([FJ]).** *Soit  $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  une application polynomiale dominante. Alors il existe un entier quadratique  $d_\infty \geq 1$  tel que :*

- soit  $d_\infty^n \leq d(F^n) \leq C d_\infty^n$  pour une constante  $C > 1$  et pour tout  $n \geq 0$  ;
- soit, quitte à conjuguer  $F$  par un automorphisme polynomial de  $\mathbb{C}^2$ , on peut écrire  $F(X, Y) = (P(X), Q(X, Y))$ , avec  $\deg(P) = \deg_Y(Q) = d_\infty$ , et  $\deg_X(Q) \geq 1$ . Dans ce cas, on a  $C_0 \leq d(F^n)/nd_\infty^n \leq C_1$  pour des constantes  $C_0, C_1 > 0$ .

Mentionnons tout de suite que l'on obtiendra comme corollaire de la preuve, l'existence d'un courant de Green au sens ci-dessus pour toute application polynomiale dominante de  $\mathbb{C}^2$ . Nous renvoyons au Théorème 4.6 ci-dessous pour un énoncé précis.

La preuve du Théorème 4.1 s'appuie sur l'étude de l'action de  $F$  sur l'espace des valuations de  $\mathbb{C}[X, Y]$  centrées à l'infini. Cette idée étant complètement nouvelle dans le contexte de la dynamique holomorphe, nous allons essayer brièvement de motiver l'introduction de cet espace dans l'étude de la suite des degrés.

Notons tout d'abord  $L_\infty$  la droite à l'infini dans  $\mathbb{P}^2$ . En terme de diviseurs, nous avons  $F^*[L_\infty] = \deg(F)[L_\infty]$ . Il n'est pas difficile de vérifier en travaillant en coordonnées homogènes par exemple, que  $F^*F^*[L_\infty] = (F^2)^*[L_\infty]$  ssi  $L_\infty$  n'est pas contractée sur un point d'indétermination de  $F$ . Lorsque cette condition est vérifiée, on a même  $\deg(F^n) = \deg(F)^n$  pour tout  $n$ , et donc le théorème est facilement démontré dans ce cas. Dans le cas contraire, on peut éclater  $\mathbb{P}^2$  et produire une nouvelle surface  $S$  dominant  $\mathbb{P}^2$  sur laquelle  $F$  se relève comme une application rationnelle que l'on note encore  $F$ . On a maintenant un nombre fini de composantes irréductibles à l'infini, et si l'on comprend bien la dynamique de  $F$  sur ces composantes, on peut espérer décrire la suite  $\deg(F^n)$ . Par exemple, si un itéré de  $F$  envoie la transformée stricte de  $L_\infty$  sur une composante  $C$  qui est préservée par  $F$ , on montre que  $\deg(F^n) \simeq \delta^n$  où  $\delta$  est le plus grand entier vérifiant  $F^*[C] \geq \delta[C]$  au sens des diviseurs.

Le point de départ de notre approche est donc d'essayer de décrire autant que faire se peut la suite des images de la droite  $L_\infty$  sous l'action de  $F$  dans toutes les surfaces dominant  $\mathbb{P}^2$ . En identifiant  $L_\infty$  à la valuation (divisorielle)  $-\deg$  définie sur  $\mathbb{C}[X, Y]$ , et en définissant l'action de  $F$  sur l'espace des valuations de  $\mathbb{C}[X, Y]$ , on voit que cette question se ramène à étudier la suite des itérés  $F^n(-\deg)$  dans un espace adéquat de valuations.

Nous allons essayer maintenant d'esquisser la preuve du Théorème 4.1. Le fait de regarder l'action de  $F$  sur l'espace  $\mathcal{V}_\infty(\mathbb{C}^2)$  des valuations sur  $\mathbb{C}[X, Y]$  centrées à l'infini présente une première difficulté technique qu'il faut surmonter. Une application polynomiale de  $\mathbb{C}^2$  n'étant en général pas propre, il peut donc arriver que l'image d'une valuation divisorielle  $\nu \in \mathcal{V}_\infty(\mathbb{C}^2)$  ne soit pas centrée à l'infini.

La première étape consiste donc à exhiber un sous-arbre complet  $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}(\mathbb{C}^2, \mathfrak{m})$  contenant la valuation  $-\deg$ , et invariant par l'action de  $F$ . La définition de  $\mathcal{V}_1$  est donnée en §4.1, et combine deux conditions, dont l'une d'entre elles fait intervenir la notion de finesse que nous avons déjà vu en §3.2.

La deuxième étape consiste en une analyse fine de la dynamique de  $F$  sur  $\mathcal{V}_1$ . De manière générale, toute application continue sur un arbre possède un point fixe. C'est donc le cas pour  $F : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_1$  : un tel point fixe est une valuation  $F$ -invariante, que l'on a appelé *eigenvaluation*. On la note  $\nu_\star$ . On montre alors que  $\nu_\star$  possède au sein de l'espace des valuations des propriétés faibles de contraction.

A partir de ce moment, on cherche à traduire en termes géométriques les informations obtenues dans l'espace de valuation. L'invariance de  $\nu_\star$  combinée à la propriété de contraction montre l'existence d'une suite d'éclatements de telle sorte que l'application  $F$  devienne *holomorphe et fixe* le centre de  $\nu_\star$ . Lorsque l'on éclate le centre de  $\nu_\star$ , ces propriétés persistent, et quitte à éclater un peu plus, la forme locale de  $F$  devient particulièrement simple. On peut donc analyser directement la vitesse de convergence des points vers ce point fixe  $p_\star$ . Dans la plupart des cas,  $\log \text{dist}(F^n(p), p_\star) \simeq -\delta^n$  pour un entier  $\delta \in \mathbb{N}^*$ , sauf si  $F$  est localement conjugué à une application monomiale de la forme  $(z, w) \rightarrow (z^a w^b, z^c w^d)$ . On a encore le même type de vitesse de convergence, mais  $\delta$  est maintenant une valeur propre d'une matrice  $2 \times 2$  à coefficients entiers, et est donc un entier quadratique.

Il nous faut maintenant faire le lien entre cette information locale et la croissance des degrés dont la définition est de nature globale. Ceci constitue la partie la plus délicate, et est sans aucun doute la plus mystérieuse de tout l'argument. Pour ce faire, on démontre qu'en dehors des valuations associées aux fibrations rationnelles, toute valuation  $\nu \in \mathcal{V}_1$  vérifie  $C_1 \leq \nu / -\deg \leq C_2$  pour deux constantes non nulles, voir Théorème 4.3. En appliquant ce fait à la valuation  $F$ -invariante  $\nu_\star \in \mathcal{V}_1$ , on obtient la dichotomie suivante. Lorsque  $\nu_\star$  est associée à une fibration rationnelle, l'application  $F$  préserve cette fibration et on est alors dans le second cas de figure du Théorème 4.1. Sinon, on montre sans problème que la suite des degrés est contrôlée par la vitesse de convergence locale au point fixe  $p_\star$  mentionné ci-dessus, et donc que  $C'_1 \leq \deg(F^n) / \delta^n \leq C'_2$  pour des constantes  $C'_i > 0$ . Ce qui termine la preuve du théorème.

Le plan de ce chapitre est le suivant. On va tout d'abord décrire en §4.1 le sous-arbre  $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_\infty(\mathbb{C}^2)$  mentionné ci-dessus, et expliciter la structure des valuations qui le composent. On va ensuite en §4.2 définir et étudier l'action de  $F$  sur ces espaces de valuations. On montre dans cette section l'existence d'une valuation  $F$ -invariante. Enfin le dernier paragraphe §4.3 est consacré à la preuve d'un modèle local simple pour  $F$  après éclatement du centre de  $\nu_\star$ . Il contient une preuve du Théorème 4.1, ainsi qu'une discussion sur la construction du courant de Green et quelques exemples.

#### 4.1. Sous-arbres de $\mathcal{V}_\infty(\mathbb{C}^2)$

Rappelons que  $\mathcal{V}_\infty(\mathbb{C}^2)$  consiste en les valuations  $\nu : \mathbb{C}[X, Y] \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  telles que  $\min\{\nu(X), \nu(Y)\} = -1$ . Cet espace est un arbre réel enraciné en la valuation  $-\deg$ . On paramètre  $\mathcal{V}_\infty(\mathbb{C}^2)$  par une version du défaut, noté  $\alpha$ , voir

§2.3. Nous allons maintenant nous attacher à définir une version de la finesse que nous avons défini dans un autre cadre en §3.2.2.

La 2-forme holomorphe  $dX \wedge dY$  sur  $\mathbb{C}^2$  induit une 2-forme méromorphe sur  $\mathbb{P}^2$  notée  $\Omega$ .

DEFINITION 4.1. Soit  $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^2$  une composée d'éclatements de points, et  $E$  une composante irréductible de  $\pi^{-1}(L_\infty)$ . On définit  $J(E)$  comme la multiplicité le long de  $E$  du diviseur associé à la 2-forme  $\pi^*\Omega$ . On note  $A(E) := J(E) + 1$ .

Contrairement au cas local,  $A(E)$  peut-être négatif ou positif. Ainsi  $J(L_\infty) = -3$ , et  $A(L_\infty) = -2$ .

THÉORÈME 4.2. *Il existe une unique application  $A$  à valeurs réelles définie sur l'espace des valuations de  $\mathbb{C}[X, Y]$  centrées à l'infini et satisfaisant aux trois conditions suivantes.*

1.  $A(t\nu) = tA(\nu)$  pour tout  $t > 0$ .
2.  $A(\nu) - 1$  coïncide avec la multiplicité le long de  $E$  du diviseur associé à  $\pi^*\Omega$ , si  $\nu$  est divisorielle et  $\nu = \pi_*\text{ord}_E$  pour une composée d'éclatements de points  $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^2$ .
3. la restriction de  $A$  à tout segment  $[-\text{deg}, \nu]$  de l'arbre  $\mathcal{V}_\infty(\mathbb{C}^2)$  est continue. De plus  $A$  définit une paramétrisation croissante de  $\mathcal{V}_\infty(\mathbb{C}^2)$  à valeurs dans  $[-2, +\infty]$ .

La preuve se ramène au Théorème 3.5.

DEFINITION 4.2. Notons  $\mathcal{V}_1^o$  le sous-espace de  $\mathcal{V}_\infty(\mathbb{C}^2)$  constitué des valuations  $\nu$  telles que  $A(\nu) < 0$  et  $\nu(P) < 0$  pour tout polynôme non constant.

On définit  $\mathcal{V}_1$  comme étant l'adhérence (au sens faible) de  $\mathcal{V}_1^o$  dans  $\mathcal{V}_\infty(\mathbb{C}^2)$ .

EXEMPLE 4.3. Soit  $\nu_{s,t}$  la valuation monomiale sur  $\mathbb{C}[X, Y]$  de poids  $s, t$ . Alors  $\nu_{s,t} \in \mathcal{V}_\infty(\mathbb{C}^2)$  ssi  $\min\{s, t\} = -1$ ; et  $\nu_{s,t} \in \mathcal{V}_1$  ssi  $\min\{s, t\} = -1$  et  $\max\{s, t\} \leq 0$ .

Le résultat suivant joue un rôle déterminant dans notre approche.

THÉORÈME 4.3. *Le sous-ensemble  $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_\infty(\mathbb{C}^2)$  est un arbre réel enraciné en  $-\text{deg}$  et complet. De plus, soit  $-\text{deg} \leq \nu \leq C(-\text{deg})$  pour une constante  $C > 0$ ; soit la valuation  $\nu$  est associée à un pinceau de courbes rationnelles.*

ESQUISSE DE PREUVE. Que  $\mathcal{V}_1$  soit un arbre complet est une conséquence du Théorème 4.2, et du fait que  $\nu \mapsto \nu(P)$  est une fonction croissante dans  $\mathcal{V}_\infty(\mathbb{C}^2)$ , et ce pour tout polynôme  $P$ .

De manière informelle, le second point exprime le fait que, en dehors de quelques « exceptions », les valuations de  $\mathcal{V}_1$  sont en un sens *proche* de la valuation  $-\text{deg}$ , et sont donc des valuations de nature « globale ». Notons que les « exceptions » sont elles-aussi associées à des objets géométriques de nature « globale », les fibrations rationnelles.

Fixons donc une valuation  $\nu \in \mathcal{V}_1$ . On va étudier la fonction  $h(P) := \frac{\nu(P)}{-\text{deg}(P)}$  sur l'espace des polynômes non constants. Par construction  $\nu$  est négative, donc  $h \geq 0$ . De plus,  $\nu \geq -\text{deg}$  donc  $h \leq 1$ .



FAIT 1. Pour toute valuation  $\nu \in \mathcal{V}_1$ , il existe un polynôme  $P$  tel que les courbes  $\{P = c\}$  possèdent une unique place à l'infini, et  $\min_{\mathbb{C}[X,Y] \setminus \mathbb{C}} h = h(P)$ .

Si l'on accepte ce fait, la preuve procède alors comme suit. Soit  $h(P) > 0$ , et on a  $-\deg \leq \nu \leq h(P)(-\deg)$ . Soit  $h(P) = 0$ , et  $\nu$  est la valuation divisorielle associée à la fibration  $\{P = \text{cte}\}$ . Le fait que  $A(\nu) \leq 0$  et la formule du genre montre finalement que la fibre générale est rationnelle, ce qui conclut la preuve du Théorème 4.3.

La démonstration du fait est très technique et de nature combinatoire. Elle est basée sur une description des valuations de  $\mathbb{C}[X, Y]$  centrées à l'infini à l'aide d'une suite de polynômes, dits *polynômes clés*, dans le même esprit qu'en §2.2.2.2. Cette technique bien qu'utilisée dans un autre contexte et écrite dans un langage quelque peu différent est la même que celle exploitée par [AM73, Moh83], dans leurs études de l'espace affine  $\mathbb{C}^2$ , ainsi que dans [CPRL02]. Nous renvoyons à [FJ, Appendice A] pour une preuve détaillée.  $\square$

## 4.2. Valuation $F$ -invariante

Nous allons maintenant définir et étudier l'action de  $F$  sur  $\mathcal{V}_\infty(\mathbb{C}^2)$ .

**4.2.1. Action d'une application polynomiale sur  $\mathcal{V}_1$ .** Soit  $\nu$  une valuation sur  $\mathbb{C}[X, Y]$ . Alors  $F_*\nu(P) := \nu(P \circ F)$  définit à nouveau une valuation sur  $\mathbb{C}[X, Y]$ . Il n'est pas difficile de voir que  $F_*$  préserve la « nature » des valuations, c'est-à-dire envoie valuations divisorielles sur divisorielles, quasimonomiales sur quasimonomiales, etc. Deux difficultés sont cependant à prendre en compte. D'une part,  $F_*$  n'envoie pas nécessairement une valuation centrée à l'infini sur une autre valuation centrée à l'infini, et de plus  $F_*$  ne préserve pas la normalisation  $\min\{\nu(X), \nu(Y)\} = -1$ . Ces deux problèmes sont illustrés par l'exemple suivant.

EXEMPLE 4.4. Soit  $F(X, Y) = (X, XY)$ , et  $\nu_{s,t}$  la valuation monomiale en  $X, Y$  de poids  $s$  sur  $X$  et  $t$  sur  $Y$ . Celle-ci est centrée à l'infini ssi  $\min\{s, t\} < 0$ . On a  $F_*\nu_{s,t} = \nu_{s,s+t}$ . En particulier,  $F_*\nu_{1,-1/2} = \nu_{1,1/2}$  et donc l'espace  $\mathcal{V}_\infty(\mathbb{C}^2)$  des valuations centrées à l'infini n'est pas invariant.

Pour traiter le problème de normalisation, on introduit la quantité suivante.

DEFINITION 4.5. Soit  $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  une application polynomiale dominante,  $\nu \in \mathcal{V}_\infty(\mathbb{C}^2)$ , et supposons que  $F_*\nu$  soit encore centrée à l'infini. Il existe alors une unique valuation, notée  $F_\bullet\nu \in \mathcal{V}_\infty(\mathbb{C}^2)$  et proportionnelle à  $F_*\nu$ . On peut de plus écrire

$$F_*\nu = d(F, \nu) F_\bullet\nu ,$$

pour un réel positif  $d(F, \nu)$ , appelé le *degré local* de  $F$  en  $\nu$ .

De manière plus explicite, on a  $d(F, \nu) = -\min\{\nu(X), \nu(Y)\}$ . En particulier,  $d(F, -\deg) = \deg(F)$ , ce qui explique la terminologie choisie.

Si  $\nu < 0$  pour tout polynôme non constant, il est clair que  $F_*\nu$  est aussi centrée à l'infini, et que  $d(F, \nu) > 0$ . Ceci indique déjà que  $F_\bullet$  est bien défini sur un arbre contenant  $\mathcal{V}_1$ . On a en fait le

**THÉORÈME 4.4.** *L'application  $F_\bullet$  est définie et faiblement continue sur l'arbre  $\mathcal{V}_1$ . Elle le laisse de plus invariant au sens où  $F_\bullet(\mathcal{V}_1) \subset \mathcal{V}_1$ .*

Notons tout d'abord que pour toute valuation  $A(F_*\nu) = A(\nu) + \nu(JF)$  où  $JF$  dénote le déterminant Jacobien de  $F$ . Cette formule est exactement la même que (13) en §3.2.2. Elle montre que l'espace des valuations strictement négatives sur tout polynôme non constant, et telles que  $A < 0$  est laissée invariant. Le fait que les applications  $F_*$  et  $d(F, \cdot)$  soient continues faiblement est clair, et cela implique la continuité de  $F_\bullet$ . On conclut facilement en mettant tous ces faits bout à bout.

**4.2.2. Un théorème de point fixe sur les arbres.** Toute application continue du segment  $[0, 1]$  dans lui-même admet un point fixe. Cette affirmation est en fait vraie si on remplace  $[0, 1]$  par n'importe quel arbre, et ce sans hypothèse d'aucune sorte sur la nature de ses ramifications. C'est le contenu du résultat suivant, démontré indépendamment dans [RL, FJ].

**THÉORÈME 4.5.** *Soit  $\mathcal{T}$  un arbre réel complet, et  $h : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$  une application dont la restriction à tout segment est continue. Alors  $h$  possède un point fixe.*

L'idée de la preuve est très simple, et consiste à construire un chemin dans  $\mathcal{T}$  en pistant constamment l'image par  $h$  du point courant. Plus précisément, on part d'un point arbitraire  $t_0 \in \mathcal{T}$ , et on regarde son image  $t'_0 = h(t_0)$  que l'on suppose différent de  $t_0$ . On définit alors l'application continue du segment  $I_0 := [t_0, t'_0]$  dans lui-même qui consiste à composer  $h$  avec la rétraction naturelle de  $\mathcal{T}$  sur  $I_0$ . Cette application admet un point fixe  $t_1$  et on recommence la même opération avec  $t_1$ . Au bout du compte, soit la construction s'arrête et on a trouvé un point  $t_k$  tel que  $h(t_k) = t_k$ . Soit on obtient une suite croissante  $t_0 < t_1 < t_2 < \dots$  qui converge dans  $\mathcal{T}$  vers un point  $t_\infty$  car  $\mathcal{T}$  est complet. Ce dernier est un point fixe de  $h$  par continuité.

**4.2.3. Conséquences.** En appliquant le Théorème 4.5 à l'application  $F_\bullet : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_1$ , on obtient un point fixe  $\nu_\star \in \mathcal{V}_1$ , c'est-à-dire une valuation telle que

$$F_*\nu_\star = d_\star\nu_\star ,$$

pour un réel  $d_\star := d(F, \nu_\star)$  strictement positif.

On peut alors appliquer le Théorème 4.3. Deux cas se présentent désormais. Soit  $\nu_\star$  est associée à une fibration rationnelle. Dans ce cas, le théorème d'Abhyankar-Moh-Suzuki [Gur02] montre qu'il existe un automorphisme affine de  $\mathbb{C}^2$  tel que la fibration rationnelle soit donnée par  $\{X = \text{cte}\}$ . Dire que la valuation associée à cette fibration est  $F$ -invariante, c'est dire que la fibration elle-même est invariante et on conclut que  $F$  est de la forme  $(P(X), Q(X, Y))$ . Dans la suite, on appellera toute application de la sorte un *produit croisé*.

Dans le second cas, on a  $-\text{deg} \leq \nu \leq C(-\text{deg})$  pour une constante  $C > 0$ . Par ailleurs, on a  $F_*^n\nu_\star = d_\star^n\nu_\star$  et  $F_*^n(-\text{deg}) = \text{deg}(F^n)F_\bullet(-\text{deg})$ , donc  $1/C \leq d_\star^n / \text{deg}(F^n) \leq 1$  pour tout  $n$ .

On a finalement montré la

PROPOSITION 4.6. Soit  $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  une application polynomiale dominante, non conjuguée à un produit croisé. Alors il existe un nombre réel  $\delta \geq 1$  tel que

$$1 \leq \deg(F^n)/\delta^n \leq C$$

pour tout  $n$ .

Pour être complet, mentionnons le lemme suivant facile qui décrit le cas des produits croisés.

LEMME 4.7. Soit  $F(X, Y) = (P(X), Q(X, Y))$  un produit croisé avec  $P(X) = a_k X^k + O(X^{k-1})$ , et  $Q(X, Y) = A_l(X)Y^l + O(Y^{l-1})$  avec  $a_k \in \mathbb{C}^*$  et  $A_l \in \mathbb{C}[X]$  non nul. Alors

$$d_\infty = \max\{k, l\} \in \mathbb{N}^*$$

et soit  $1 \leq \deg(F)/d_\infty^n \leq C$  for some  $C > 1$ ; soit  $d_\infty = k = l$ ,  $\deg A_l > 0$  et  $1 \leq \deg(F)/nd_\infty^n \leq C$  pour un réel  $C > 1$ .

### 4.3. Rigidification

Pour conclure la preuve du Théorème 4.1, nous allons maintenant nous attacher à démontrer que le nombre réel  $\delta$  introduit à la proposition précédente est un entier quadratique. Ceci se fait en étudiant les propriétés locales de contraction d'une valuation  $F$ -invariante et en interprétant celles-ci géométriquement. On verra aussi que ces considérations permettent de construire un courant de Green pour  $F$ .

Dans toute cette section, on va supposer que  $F$  admet une valuation  $F$ -invariante de type quasimonomiale irrationnelle, que l'on notera comme d'habitude  $\nu_*$ . Bien que celà ne soit pas toujours le cas, celà nous permettra de raccourcir la discussion, tout en se focalisant sur le cas le plus significatif. Une preuve complète et détaillée est donnée en [FJ, Section 7]. Nous décrirons quelques exemples en §4.3.4.

**4.3.1. Contraction locale.** Le résultat principal de la section est le suivant.

PROPOSITION 4.8. Soit  $\nu_* \in \mathcal{V}_1$  une valuation quasimonomiale irrationnelle  $F$ -invariante.

Alors, on peut trouver deux valuations divisorielles  $\nu_0, \nu_1 \in \mathcal{V}_1$ , arbitrairement proches de  $\nu_*$ , avec  $\nu_0 < \nu_* < \nu_1$  et telles que  $F_\bullet$  envoie le segment  $I = [\nu_0, \nu_1]$  dans lui-même. Soit  $\vec{v}_0$  (resp.  $\vec{v}_1$ ) le vecteur tangent en  $\nu_0$  (resp. en  $\nu_1$ ) représenté par  $\nu_*$  et posons  $U = U(\vec{v}_0) \cap U(\vec{v}_1)$ . Alors  $F_\bullet U \subset U$ , et soit  $F_\bullet^2 = \text{id}$  sur  $I$ , soit  $F_\bullet^n \rightarrow \nu_*$  quand  $n \rightarrow \infty$  sur  $U$ .

La Figure 1 illustre cette proposition.

ESQUISSE DE PREUVE. On fixe tout d'abord arbitrairement un segment  $I' = [\mu_0, \mu_1]$  contenant  $\nu_*$ , avec  $-\deg \leq \mu_0 < \nu_* < \mu_1$ .

FAIT 2. Il existe un segment  $J' = [\mu'_0, \mu'_1] \subset I'$  contenant  $\nu_*$  tel que  $F_\bullet J' \subset I'$ .

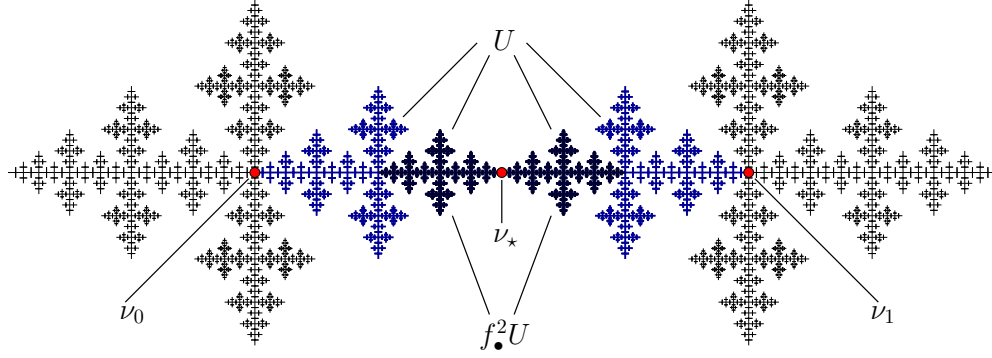


FIG. 1. Un bassin d'attraction (en bleu) dans le cas d'une valuation  $F$ -invariante quasimonomiale irrationnelle.

Pour voir cela, on trace un chemin  $\gamma$  partant de  $\nu_*$  et en direction de  $\mu_1$ , et on regarde son image par  $F_\bullet$ . Comme  $\nu_*$  est fixe,  $F_\bullet\gamma$  est encore un chemin d'origine  $\nu_*$ . Comme  $\nu_*$  est une valuation quasimonomiale irrationnelle, c'est un point *régulier* dans  $\mathcal{V}_\infty(\mathbb{C}^2)$ , voir §2.2.2 : il n'existe donc que deux vecteurs tangents en  $\nu_*$  déterminés par  $\mu_0$  et  $\mu_1$ . Le chemin  $F_\bullet\gamma$  (au moins pour des temps petits) détermine l'un de ces deux vecteurs. Par définition des vecteurs tangents, §1.1.2, ceci montre que  $F_\bullet\gamma(t) \in I$  pour  $t \ll 1$ . L'outil technique qui permet alors de comprendre la restriction de  $F_\bullet$  à  $J'$  est la proposition suivante, qui est en réalité un raffinement du Fait 2 mentionné ci-dessus, et dont la preuve est essentiellement identique.

PROPOSITION 4.9. Pour toute valuation de pinceau  $\nu_{|P|}$  associée à un polynôme  $P \in \mathbb{C}[X, Y]$ , et toute valuation  $\nu \in \mathcal{V}_\infty(\mathbb{C}^2)$ , on a

$$\nu(P) = -\deg(P) \alpha(\nu) . \quad (15)$$

De plus, si  $\nu \in \mathcal{V}_1$ , il existe toujours une valuation de pinceau telle que  $\nu_{|P|} \geq \nu$ .

On applique cette proposition à l'extrémité supérieure de  $J'$ . Ceci fournit donc  $P \in \mathbb{C}[X, Y]$  tel que  $\nu_{|P|} \geq \nu$  pour toute valuation  $\nu \in J'$ . On peut désormais écrire la suite d'égalité suivante.

$$\begin{aligned} \alpha(F_\bullet\nu) &= -\frac{(F_\bullet\nu)(P)}{\deg(P)} = \frac{(F_*\nu)(P)}{-\deg(P) d(\nu, F)} = \\ &= \frac{\nu(P \circ F)}{\deg(P) \times \min\{\nu(X \circ F), \nu(Y \circ F)\}} . \end{aligned}$$

Le Théorème 2.3 s'applique dans ce contexte de la même façon, ce qui montre que chacune des fonctions  $h_1(\nu) := \nu(P \circ F)$ , et  $h_2(\nu) := d(\nu, F)$  est affine par morceaux en fonction de  $\alpha$ , à coefficients entiers positifs (ou nuls). Du fait que  $\nu_*$  est quasimonomiale irrationnelle, la valeur  $\alpha(\nu_*)$  est irrationnelle, et donc  $h_1, h_2$  sont en fait linéaires au voisinage de  $\nu_*$ . On a donc montré la

PROPOSITION 4.10. Il existe un segment  $I = [\nu_0, \nu_1]$  et  $J \subset I$  contenant  $\nu_*$ , tels que  $F_\bullet J \subset I$  et

$$\alpha(F_\bullet \nu) := \frac{a\alpha(\nu) + b}{c\alpha(\nu) + d},$$

pour tout  $\nu \in J$ , avec  $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ .

On s'appuie maintenant sur la remarque élémentaire suivante.

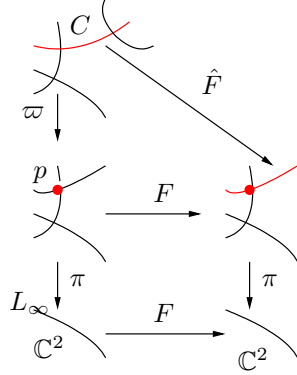
LEMME 4.11. Soit  $M(t) = \frac{a+bt}{c+dt}$  une fonction réelle de type Möbius, avec  $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ ,  $ad \neq bc$ . Supposons  $M(t_*) = t_*$  with  $t_* > 0$ . Alors soit  $M \circ M \equiv \text{id}$ , ou  $t_*$  est localement attractif, i.e.  $|M(t) - t_*| \leq \theta |t - t_*|$  pour un  $\theta < 1$ , et  $t$  proche de  $t_*$ .

On en déduit tout d'abord que soit  $F_\bullet^2|_J = \text{id}$ , soit  $\nu_*$  est un point attractif pour  $F_\bullet|_J$ . Finalement, dans le second cas, on vérifie aisément que l'ouvert des valuations  $\{\nu > \nu_0\} \setminus \{\nu > \nu_1\}$  est  $F_\bullet$ -invariant, et que les images de toute valuation de cet ouvert par  $F_\bullet^k$  convergent vers  $\nu_*$ .  $\square$

**4.3.2. Interprétation géométrique.** On va maintenant transcrire l'énoncé de la Proposition 4.8 en termes géométriques. Pour simplifier la discussion, on supposera  $F_\bullet^n \rightarrow \nu_*$  sur le domaine ouvert  $U$  donné par cette proposition.

On procède tout d'abord à une suite d'éclatements de points  $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^2$  le long du centre de  $\nu_*$  de telle sorte que les valuations divisorielles  $\nu_0$  et  $\nu_1$  soient associées à des composantes irréductibles de  $\pi^{-1}(L_\infty)$ . Le centre de  $\nu_*$  dans  $X$  est alors un point  $p$  intersection de deux composantes de  $\pi^{-1}(L_\infty)$  que l'on notera  $E$  et  $E'$ . L'espace des valuations de  $\mathcal{V}_\infty(\mathbb{C}^2)$  dont le centre est exactement  $p$  est un ouvert distingué  $V$  inclus dans  $U$ , voir la discussion en §2.2.3.

Même si cela n'est pas complètement clair a priori, on peut en fait supposer<sup>1</sup> que  $F_\bullet V \subset V$ . Regardons maintenant le germe d'application *rationnelle* que  $F$  définit en  $p$ .



Supposons que  $p$  soit un point d'indétermination pour  $F : X \rightarrow X$ . « L'image » de  $p$  par  $F$  est donc un diviseur de  $X$ , et on va voir que ceci contredit  $F_\bullet V \subset V$ . De manière précise, il existe une suite d'éclatements (à la source)  $\varpi : Y \rightarrow X$  tel que le relevé  $\hat{F} : Y \rightarrow X$  de  $F$  devienne holomorphe en tout point de  $\varpi^{-1}(p)$ . Le fait que  $F$  ne soit pas holomorphe en  $p$  fournit l'existence d'une composante  $C \subset \varpi^{-1}(p)$  telle que  $\hat{F}(C)$  soit une courbe dans  $X$ . En particulier, l'image par  $F_\bullet$  de la valuation divisorielle associée à  $C$  est la valuation divisorielle associée à  $\hat{F}(C)$ , et

donc  $F_\bullet$  ne peut préserver l'ouvert distingué  $V$ .

On a donc montré la

PROPOSITION 4.12. Il existe une suite d'éclatements de points  $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^2$ , tel que le centre de  $\nu_*$  soit un point  $p$  en lequel  $F$  est holomorphe.

<sup>1</sup>cette affirmation recèle en fait un argument délicat lié au développement en fractions continues d'un entier quadratique.

Avant de continuer, décrivons un peu la situation géométrique au point  $p$ . Comme  $\nu_*$  est quasimonomiale irrationnelle, le diviseur  $\pi^{-1}(L_\infty)$  possède deux composantes irréductibles en  $p$ , soient  $E$  et  $E'$ . Comme  $F : X \rightarrow X$  est issue d'une application polynomiale de  $\mathbb{C}^2$ , aucun point de  $X \setminus \pi^{-1}(L_\infty)$  n'est envoyé par  $F$  sur le diviseur  $\pi^{-1}(L_\infty)$ , et donc  $E \cup E'$  est totalement invariant par le germe  $F$  en  $p$ .

De plus, l'ensemble critique de  $F : X \rightarrow X$  est inclus dans l'image inverse par  $\pi$  de l'ensemble critique de  $F : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ . Cet ensemble possède donc un nombre fini de composantes irréductibles non incluses dans  $\pi^{-1}(L_\infty)$ . Dans l'espace de valuation  $\mathcal{V}_\infty(\mathbb{C}^2)$ , ces composantes déterminent un nombre fini de valuations de courbes. Comme l'ouvert  $V$  peut être choisi arbitrairement petit, on peut supposer que ces valuations de courbes sont hors de  $V$ .

En résumé, le germe de  $F$  en  $p$  a son ensemble critique inclus dans le diviseur à croisements normaux  $E \cup E'$  qui est de plus totalement invariant. Ces germes, appelés *germes rigides* ont été introduits et complètement classifiés dans [Fav00]. Une simple application des résultats de ce travail donne enfin le résultat suivant de « rigidification ».

**PROPOSITION 4.13.** Il existe une suite d'éclatements de points  $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^2$ , et un point  $p \in \pi^{-1}(L_\infty)$  tel que  $F$  soit holomorphe en  $p$ , et le germe de  $F$  en  $p$  est localement conjugué à un morphisme monomial  $(z, w) \mapsto (z^a w^b, z^c w^d)$ .

La conclusion de la preuve du Théorème 4.1 se fait alors en montrant que le réel  $\delta$  intervenant à la Proposition 4.6, est une valeur propre de  $M$  la matrice  $2 \times 2$  dont les coefficients  $a, b, c, d$  décrivent la forme locale de  $F$ . Ceci montre bien que  $\delta$  est un entier quadratique, car il vérifie  $\delta^2 - \text{tr}(M)\delta + \det(M) = 0$ . Le lien entre  $\delta$  et  $M$  résulte d'un calcul qui peut être résumé comme suit.

Du fait de l'invariance de  $\nu_*$ , on a  $\delta^n = d(F^n, \nu_*) = -\min\{\nu_*(X \circ F^n), \nu_*(Y \circ F^n)\}$ . On calcule maintenant le terme de droite en termes des données locales en  $p$ . On voit tout d'abord que  $\nu_*$  définit sur l'anneau  $\mathcal{O}_p$  des germes de fonctions holomorphes en  $p$  une valuation monomiale en  $z, w$  disons  $\nu_{s,t}$  pour des poids  $s, t > 0$ . La fonction  $X$  sur  $\mathbb{C}^2$  définit elle une fonction méromorphe en  $p$  de la forme  $z^{-k}w^{-l}$  avec  $k, l$  des entiers positifs. Donc  $\nu_*(X \circ F^n) = \nu_{s,t}(z^{-(a_n k + c_n l)} w^{-(b_n k + d_n l)})$  où  $a_n, b_n, c_n, d_n$  dénotent les coefficients de la matrice  $M^n$ . En étudiant l'asymptotique quand  $n \rightarrow \infty$ , on voit que  $\delta$  est une valeur propre de  $M$ .

**4.3.3. Construction du courant de Green.** Nous présentons maintenant une courte discussion du résultat suivant, dont la preuve est une conséquence des considérations précédentes.

**THÉORÈME 4.6.** Soit  $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  une application polynomiale dominante avec  $d_\infty(F) > 1$ , et qui n'est pas un produit croisé. Il existe alors une fonction plurisousharmonique positive  $U$  sur  $\mathbb{C}^2$  telle que  $C^{-1} \log \|\cdot\| \leq U \leq C \log \|\cdot\|$  près de l'infini, et telle que  $d_\infty^{-n} U \circ F^n$  décroît vers une fonction psh  $U_\infty \not\equiv 0$ . En particulier, le courant positif fermé  $T := dd^c U_\infty$  ne charge pas les courbes, et est invariant au sens où  $F^* T = d_\infty T$ .

Le choix de la fonction  $U$  est un peu délicat, et dépend de la nature des valuations  $F$ -invariantes. En général, notre argument ne permet pas de prendre le choix le plus naturel à savoir  $U = \log^+ \|\cdot\|$ . On peut cependant toujours s'arranger pour que la suite  $d_\infty^{-n}U \circ F^n$  soit décroissante. Le point est alors de démontrer que la limite n'est pas identiquement nulle. Il suffit de le vérifier au voisinage du centre de la valuation  $F$ -invariante, dans un éclatement adéquat, ce qui se fait sans problème en utilisant la forme normale fournie par la Proposition 4.13.

#### 4.3.4. Quelques exemples.

##### 1. Endomorphismes holomorphes.

Une application polynomiale  $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  induit une application *holomorphe* de  $\mathbb{P}^2$  dans  $\mathbb{P}^2$  ssi elle s'écrit  $F = (P_d, Q_d) + O(|X|^{d-1}, |Y|^{d-1})$  où  $P_d, Q_d$  sont des polynômes homogènes de degré  $d$  sans facteur commun. Pour une telle application on a  $F_\bullet(-\deg) = -\deg$ , et  $\deg(F^k) = \deg(F)^k = d^k$  pour tout  $k \geq 0$ . En général cependant,  $F_\bullet$  peut préserver d'autres valuations de  $\mathcal{V}_1$ .

Si  $F(X, Y) = (X^d + Y, Y^d + X)$  toutes les valuations monomiales de poids  $(-1, s)$  et  $(s, -1)$  sur  $X, Y$  et avec  $-1 \leq s \leq -1/d$  sont fixées par  $F_\bullet$ .

##### 2. Applications monomiales.

Une application polynomiale de  $\mathbb{C}^2$  est dite monomiale, si elle est de la forme  $(X, Y) \mapsto (X^a Y^b, X^c Y^d)$  pour quatre nombres entiers  $a, b, c, d$ . Il est commode d'introduire la matrice carré

$$M := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

et de noter l'application  $\phi_M$ . Celle-ci est dominante ssi  $\det M \neq 0$ , et son degré topologique est  $|\det(M)|$ . On vérifie facilement que  $\phi_M^k = \phi_{M^k}$  pour tout  $k \geq 0$ . Le degré de  $\phi_M$  est égal à  $\max\{a + b, c + d\}$ , donc le comportement de la suite  $\deg(\phi_M^k)$  est déterminé exactement par les propriétés spectrales de  $M$ .

Si  $bc \neq 0$  et  $a + d \neq 0$ , la matrice  $M$  possède deux valeurs propres réelles distinctes  $d_+ > d_-$ , et on a  $\deg(\phi_M^k) \simeq d_+^k$ . Lorsque  $b = 0$  (ou  $c = 0$ ), l'application  $\phi_M$  est un produit croisé. Lorsque  $a = d = 0$ , l'application  $\phi_M$  est une application *holomorphe* de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ , et son itéré second  $\phi_M^2$  est une application holomorphe de  $\mathbb{P}^2$  de la forme  $(X, Y) \mapsto (X^l, Y^l)$  pour un entier  $l \geq 1$ .

Pour décrire l'action d'une application monomiale sur l'espace des valuations centrées à l'infini, il suffit de se concentrer sur les valuations monomiales. Les valuations monomiales de  $\mathcal{V}_\infty(\mathbb{C}^2)$  sont situées sur deux segments partant de la racine :  $\{\nu_{Y,s}, s \geq -1\} \cup \{\nu_{X,s}, s \geq -1\}$ , où  $\nu_{Y,s}$  (resp.  $\nu_{X,s}$ ) porte le poids  $-1$  sur  $X$  (resp.  $Y$ ) et  $s$  sur  $Y$  (resp. sur  $X$ ). Les valuations monomiales appartenant à  $\mathcal{V}_1$  sont précisément  $\{\nu_{Y,s}, 0 \geq s \geq -1\} \cup \{\nu_{X,s}, 0 \geq s \geq -1\}$ . Notons que dans ce cas, le Théorème 4.3 est bien valide, les valuations  $\nu_{Y,0}$  et  $\nu_{X,0}$  étant associées aux fibrations rationnelles  $X = \text{Cte}$  et  $Y = \text{Cte}$ .

L'application  $(\phi_M)_\bullet$  envoie valuation monomiale sur valuation monomiale mais ne préserve pas forcément  $\{\nu_{Y,s}, s \geq -1\} \cup \{\nu_{X,s}, s \geq -1\}$ . En revanche,

$(\phi_M)_\bullet$  préserve  $\{\nu_{Y,s}, 0 \geq s \geq -1\} \cup \{\nu_{X,s}, 0 \geq s \geq -1\}$ . On a plus précisément :

$$\begin{aligned} (\phi_M)_\bullet \nu_{Y,s} &= \begin{cases} \nu_{Y, \frac{-c+ds}{-a+bs}} & \text{si } -c + ds > -a + bs \\ \nu_{X, \frac{-a+bs}{-c+ds}} & \text{sinon} \end{cases} \\ (\phi_M)_\bullet \nu_{X,s} &= \begin{cases} \nu_{X, \frac{as-b}{cs-d}} & \text{si } as - b > cs - d \\ \nu_{Y, \frac{cs-d}{as-b}} & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Lorsque  $bc \neq 0$  et  $a + d \neq 0$ ,  $(\phi_M)_\bullet$  possède un unique point fixe  $\nu_\star$ , et on vérifie que pour toute valuation  $\nu \in \mathcal{V}_1$ , on a  $(\phi_M^k)_\bullet \nu \rightarrow \nu_\star$ , lorsque  $k \rightarrow \infty$ .

### 3. Application de Hénon.

Prenons  $a, c \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ , et soit  $F(X, Y) = (Y, aX + Y^2 + c)$ . Cette application définit un automorphisme polynomial de  $\mathbb{C}^2$ , en particulier elle induit une bijection de  $\mathcal{V}_\infty(\mathbb{C}^2)$  sur lui-même, ainsi que de  $\mathcal{V}_1$  sur lui-même.

En coordonnées homogènes  $[X : Y : Z]$ , l'application  $F$  envoie la droite à l'infini  $\{Z = 0\}$  sur le point superattractif  $p_+ := [0 : 1 : 0]$ , et admet un unique point d'indétermination  $p_- := [1 : 0 : 0]$ . Il est clair que  $F$  est rigide en  $p_+$ , et il découle de [Fav00, Proposition 2.2] que  $F$  est localement conjuguée à  $(z^2, z + az^2w/2)$  (dans des coordonnées convenables  $(z, w)$  en  $p_+$ ). On en déduit que la valuation  $\nu_+$  associée à la série de Puiseux  $w = \sum_{k \geq 1} (a/2)^{k-1} z^{2-2^{-k}}$  est  $F_\bullet$ -invariante. Cette valuation est infiniment singulière.

L'ouvert  $U_+ := \{\nu \in \mathcal{V}_0 ; \nu(X) > \nu(Y) = -1\}$  associé aux valuations centrées en  $p_+$ , est invariant par  $F_\bullet$ . De plus,  $d(F, \cdot) \equiv 2$  sur  $U_+$ , donc  $F_\bullet$  préserve l'ordre naturel sur  $\overline{U}_+ = U_+ \cup \{\nu_0\}$ . On peut vérifier que  $F_\bullet(\nu_0) \in U_+$ , et que  $\nu_+$  appartient aussi à  $U$ . Ceci implique  $F_\bullet^n \nu \rightarrow \nu_+$  pour tout  $\nu \in U_+$ , donc  $\nu_+$  est une valuation  $F$ -invariante. Toute valuation centrée en un point différent de  $p_-$  est envoyée dans  $U_+$  par  $F_\bullet$ . Sous itération de  $F_\bullet$  toute valuation de ce type converge donc vers  $\nu_+$ .

On peut maintenant faire la même construction pour  $F^{-1}$ . L'ouvert faible  $U_- := \{\nu \in \mathcal{V}_0 ; \nu(Y) > \nu(X) = -1\}$  est  $F_\bullet^{-1}$ -invariant, contient une valuation infiniment singulière  $\nu_-$ , et tout point de  $U_-$  converge sous itération de  $F_\bullet^{-1}$  vers  $\nu_-$ . Comme  $F_\bullet$  est une application continue et bijective de l'arbre  $\mathcal{V}_\infty(\mathbb{C}^2)$ , le segment  $[\nu_-, \nu_+]$  est invariant, et tout point distinct de  $\nu_-$  converge vers  $\nu_+$  sous  $F_\bullet$ . De cette discussion, on conclut finalement :

- $F$  admet deux valuations invariantes  $\nu_\pm$  qui sont infiniment singulières ;
- $F_\bullet^n \nu \rightarrow \nu_+$  pour toute valuation  $\nu \in \mathcal{V}_0 \setminus \{\nu_-\}$  quand  $n \rightarrow \infty$  ;
- $F_\bullet^{-n} \nu \rightarrow \nu_-$  pour toute valuation  $\nu \in \mathcal{V}_0 \setminus \{\nu_+\}$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

Il serait intéressant de relier les valuations infiniment singulières  $\nu_\pm$  aux solénoïdes apparaissant dans [HPV00].



## Bibliographie

- [Aba03] Marco Abate. Discrete local holomorphic dynamics. In *Proceedings of 13th Seminar on Analysis and its Applications*, pages 1–31. Isfahan Univ. Press, Isfahan, 2003.
- [AM73] Shreeram S. Abhyankar and Tzuong Tsieng Moh. Newton-Puiseux expansion and generalized Tschirnhausen transformation. I, II. *J. Reine Angew. Math.*, 260 :47–83; *ibid.* **261** (1973), 29–54, 1973.
- [BD01] Jean-Yves Briend and Julien Duval. Deux caractérisations de la mesure d'équilibre d'un endomorphisme de  $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ . *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (93) :145–159, 2001.
- [BLS93] Eric Bedford, Mikhail Lyubich, and John Smillie. Polynomial diffeomorphisms of  $\mathbb{C}^2$ . IV. The measure of maximal entropy and laminar currents. *Invent. Math.*, 112(1) :77–125, 1993.
- [BS91] Eric Bedford and John Smillie. Polynomial diffeomorphisms of  $\mathbb{C}^2$ . II. Stable manifolds and recurrence. *J. Amer. Math. Soc.*, 4(4) :657–679, 1991.
- [Can01] Serge Cantat. Dynamique des automorphismes des surfaces  $K3$ . *Acta Math.*, 187(1) :1–57, 2001.
- [CPRL02] Antonio Campillo, Olivier Piltant, and Ana J. Reguera-López. Cones of curves and of line bundles on surfaces associated with curves having one place at infinity. *Proc. London Math. Soc.* (3), 84(3) :559–580, 2002.
- [DF01] J. Diller and C. Favre. Dynamics of bimeromorphic maps of surfaces. *Amer. J. Math.*, 123(6) :1135–1169, 2001.
- [DS03] Tien-Cuong Dinh and Nessim Sibony. Dynamique des applications d'allure polynomiale. *J. Math. Pures Appl.* (9), 82(4) :367–423, 2003.
- [Fav00] Charles Favre. Classification of 2-dimensional contracting rigid germs and Kato surfaces. I. *J. Math. Pures Appl.* (9), 79(5) :475–514, 2000.
- [Fav03] Charles Favre. Les applications monomiales en deux dimensions. *Michigan Math. J.*, 51(3) :467–475, 2003.
- [FJ] Charles Favre and Mattias Jonsson. Eigenvaluations. arxiv :math.ds/0410417.
- [FS95a] John Erik Fornæss and Nessim Sibony. Classification of recurrent domains for some holomorphic maps. *Math. Ann.*, 301(4) :813–820, 1995.
- [FS95b] John Erik Fornæss and Nessim Sibony. Complex dynamics in higher dimension. II. In *Modern methods in complex analysis (Princeton, NJ, 1992)*, volume 137 of *Ann. of Math. Stud.*, pages 135–182. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1995.
- [Gue02] Vincent Guedj. Dynamics of polynomial mappings of  $\mathbb{C}^2$ . *Amer. J. Math.*, 124(1) :75–106, 2002.
- [Gue05] Vincent Guedj. Ergodic properties of rational mappings with large topological degree. *Annals of Math.*, 161(3) :1–19, 2005.
- [Gur02] R. V. Gurjar. A new proof of the Abhyankar-Moh-Suzuki theorem. *Transform. Groups*, 7(1) :61–66, 2002.
- [HPV00] John Hubbard, Peter Papadopol, and Vladimir Veselov. A compactification of Hénon mappings in  $\mathbb{C}^2$  as dynamical systems. *Acta Math.*, 184(2) :203–270, 2000.

- [Moh83] T. T. Moh. On the Jacobian conjecture and the configurations of roots. *J. Reine Angew. Math.*, 340 :140–212, 1983.
- [RL] Juan Rivera-Letelier. Sur la structure des ensembles de Fatou p-adiques. arxiv :math.ds/0412180.
- [Sib99] Nessim Sibony. Dynamique des applications rationnelles de  $\mathbf{P}^k$ . In *Dynamique et géométrie complexes (Lyon, 1997)*, volume 8 of *Panor. Synthèses*, pages ix–x, xi–xii, 97–185. Soc. Math. France, Paris, 1999.
- [Ued94] Tetsuo Ueda. Fatou sets in complex dynamics on projective spaces. *J. Math. Soc. Japan*, 46(3) :545–555, 1994.

## Dynamique $p$ -adique et arithmétique

La dernière question abordée dans ce mémoire est d'une nature assez différente des deux précédentes, et mélange arithmétique et dynamique.

Soit  $R \in \mathbb{Q}(T)$  de degré  $D \geq 2$ . Une telle fraction rationnelle définit en particulier une application holomorphe sur la sphère de Riemann, pour laquelle on peut démontrer le résultat remarquable suivant de convergence. Pour tout point  $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  en dehors d'un ensemble fini d'exceptions, les mesures de probabilité équidistribuées sur l'ensemble  $R^{-n}\{z\}$  convergent vaguement lorsque  $n \rightarrow \infty$  vers une mesure  $\rho_R$  indépendante de  $z$ . Nous nous référerons à ce résultat sous le nom de « Théorème de Brolin », bien que ce dernier ne l'ait démontré que dans le cas polynomial [Bro65], le cas général étant traité dans [Lju83, FLM83].

Notre objectif est ici de démontrer un résultat analogue de convergence sous une hypothèse de nature arithmétique. On va voir de plus que l'équidistribution se fait alors non seulement sur la sphère de Riemann, mais aussi dans tous les espaces projectifs définis sur les complétions non-archimédiennes de  $\mathbb{Q}$ .

Avant d'énoncer le résultat principal, il nous faut introduire un peu de terminologie. Tout d'abord, on appelle *place* toute norme sur  $\mathbb{Q}$ . À équivalence près, celles-ci sont de deux types. Les places dites *finies* et associées aux normes  $p$ -adiques, sont définies par  $|p^n a/b|_p := p^{-n}$  où  $a, b \in \mathbb{Z}$  sont premiers à  $p$  et  $n \in \mathbb{Z}$ . La place à l'infini correspond à la norme euclidienne standard, et on la notera  $|\cdot|_\infty$ . Par commodité, on notera  $M_{\mathbb{Q}}$  l'ensemble de toutes les places de  $\mathbb{Q}$ , i.e. l'ensemble des nombres premiers auquel on a ajouté l'infini. Pour toute place finie, la norme  $|\cdot|_p$  s'étend de manière unique à la clôture algébrique de  $\mathbb{Q}$ , et son complété pour cette métrique est un corps noté  $\mathbb{C}_v$  qui est à la fois algébriquement clos et complet pour la métrique induite, que l'on notera encore  $|\cdot|_v$ . Si  $v$  est la place à l'infini, on pose  $\mathbb{C}_v := \mathbb{C}$ .

La fraction  $R$  induit une application sur l'espace projectif  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_v)$  pour toute place (finie ou infinie). On a mentionné le théorème de Brolin à la place infinie. Ce résultat est aussi valide en toute place finie, au moins si l'on travaille sur la droite projective de  $\mathbb{C}_v$  *au sens de Berkovich*, que l'on a décrit en §2.1 et que l'on notera  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_v)$  dans la suite. Rappelons que cet espace est un arbre réel, dans lequel  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_v)$  se plonge naturellement, et pour lequel les points  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_v)$  sont des bouts. Pour fixer les idées, on va énoncer le théorème suivant.

**THÉORÈME 5.1 ([FRL04]).** *Pour toute fraction rationnelle  $R$  de degré  $D \geq 2$  définie sur  $\mathbb{Q}$ , et toute place finie  $v$  sur  $\mathbb{Q}$ , il existe mesure de probabilité  $\rho_{R,v}$  sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_v)$ , invariante par  $R$ , telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} D^{-n} R^{n*}[z] = \rho_{R,v}$ , pour tout point  $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_v)$  qui n'est pas totalement invariant par  $R$  ou  $R^2$ .*

On renvoie à §5.1.4 pour un énoncé plus général concernant les fractions à coefficients dans  $\mathbb{C}_v$  pour  $v$  premier, et pour plus d'informations sur la nature des mesures  $\rho_{R,v}$ . Notons que celles-ci peuvent dans certains cas porter une masse nulle sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_v)$ , ce qui explique la nécessité de travailler sur un espace plus gros que l'espace projectif standard.

Pour arriver à notre énoncé arithmétique, il nous faut maintenant introduire le concept de *hauteur*. Nous renvoyons à [HS00, Part B] pour une présentation détaillée de ce concept, ainsi que pour ses applications arithmétiques. Sous sa forme la plus simple, la hauteur d'un nombre algébrique  $z \in \mathbb{Q}$  est un nombre réel positif ou nul qui permet en un sens de mesurer la complexité de  $z$ . Comme nous allons le voir, la définition même de hauteur est en réalité délicate. En tous les cas, les hauteurs apparaissent comme quantités fondamentales dans de nombreuses questions d'arithmétique.

On va s'intéresser ici à une catégorie très spécifique de hauteurs, dites *hauteurs dynamiques*. On définit tout d'abord la *hauteur naïve* d'un point algébrique par la formule

$$h_{\text{nv}}(z) := \frac{1}{\deg(z)} \sum_w \sum_{v \in M_{\mathbb{Q}}} \log^+ |w|_v$$

où  $w$  parcourt tous les conjugués de  $z$  sous l'action du groupe de Galois  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ . Le membre de droite est en réalité une somme finie. Par convention, on posera aussi  $h_{\text{nv}}(\infty) = 0$ . Dans le cas où  $z = a/b \in \mathbb{Q}$  avec  $a$  et  $b$  entiers et premiers entre eux, la formule du produit  $\sum_{M_{\mathbb{Q}}} \log |z|_v = 0$  montre que l'on a  $h_{\text{nv}}(z) = \max\{|a|, |b|\}$ . Par ailleurs,  $h_{\text{nv}}$  est invariant sous l'action de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ . Si  $z \in \overline{\mathbb{Q}}$ , on définit  $\tilde{h}(z) := \max\{|a_i|\}$  où  $P(T) = \sum a_i T^i \in \mathbb{Z}[T]$  dénote le polynôme minimal de  $z$  sur  $\mathbb{Q}$ . On peut aussi montrer que  $|\tilde{h} - \deg(P) h_{\text{nv}}|$  est bornée par une constante dépendant uniquement de l'entier  $\deg(P)$ , voir [Lan62, Chapter III]. Tout ceci indique bien que la hauteur est une mesure de complexité.

Fixons maintenant une fraction rationnelle  $R$  de degré  $D \geq 2$  à coefficients rationnels. On peut alors montrer que pour tout point  $z \in \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{Q}})$ , la suite  $D^{-n} h_{\text{nv}}(R^n(z))$  converge vers un réel positif que l'on note alors  $h_R(z)$ . La fonction  $h_R : \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}_+$  diffère d'une fonction bornée de  $h_{\text{nv}}$ , et vérifie  $h_R \circ R = D h_R$ . Elle est appelée *hauteur normalisée* (associée à  $R$ ).

On peut maintenant énoncer le résultat principal de ce chapitre. Pour tout ensemble  $F$  invariant sous l'action du groupe  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ , le nombre  $h_R(F)$  désigne la moyenne de  $h_R$  sur  $F$ , et  $[F]$  est la mesure de probabilité équilibrée sur  $F$ .

**THÉORÈME 5.2 ([FRL]).** *Soit  $R$  une fraction rationnelle à coefficients dans  $\mathbb{Q}$  et de degré  $D \geq 2$ . Soit  $\{F_n\}_{n \geq 0}$  une suite d'ensembles finis invariants sous l'action de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ , tels que  $\cup_n F_n$  soit infini, et  $h_R(F_n) \rightarrow 0$ . Alors, en toutes les places  $v \in M_{\mathbb{Q}}$ , on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [F_n] = \rho_{R,v}$$

*vaguement.*

A la place infinie, la convergence a lieu sur la sphère de Riemann. Aux places infinies, la convergence a lieu dans les espaces de Berkovich  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_v)$ . Notons de

plus que l'on applique ce résultat à la suite  $F_n := R^{-n}\{z_0\}$  pour tout point  $z_0 \in \mathbb{Q}$  qui n'est pas totalement invariant par  $R$  ou  $R^2$ , et que dans ce cas, on retrouve l'énoncé du Théorème 5.1.

Le premier résultat d'équidistribution des points de petite hauteur a été obtenu par Szpiro-Ullmo-Zhang [SUZ97] en lien avec la conjecture de Bogomolov, et concerne l'équidistribution des points de petite hauteur dans les variétés abéliennes par rapport à la mesure de Haar. Cet article fondateur a inspiré depuis lors de nombreux travaux. Tout d'abord par Bilu qui s'est intéressé dans [Bil97] au cas de la hauteur standard dans les espaces projectifs; puis à Rumely qui a étendu l'approche de Bilu pour une classe de hauteurs sur la droite projective issues de la théorie du potentiel complexe. Autissier [Aut01] a ensuite démontré une vaste généralisation des théorèmes de Bilu et Szpiro-Ullmo-Zhang dans le cas des courbes définies sur un corps de nombre et en dimension supérieure, ce qui lui fournit une preuve du Théorème 5.2 à la place complexe. Enfin plus récemment, [BH] dans le cas des polynômes, puis Baker-Rumely [BR] d'une part et Chambert-Loir [CL] d'autre part ont démontré le Théorème 5.2. Nous verrons cependant que notre approche fournit des estimations quantitatives précises, voir §5.2.5.

Enfin des travaux récents ont mis à jour de nombreux autres résultats d'équidistribution en arithmétique. Nous renvoyons à [Ull02] pour des références plus complètes.

La preuve que nous présentons du Théorème 5.2 repose sur l'interprétation des hauteurs en termes de théorie du potentiel, qui est à la base de l'approche de Bilu. On montre tout d'abord que  $h_R(F_n)$  se décompose en une somme de quantités dites « locales », c'est-à-dire provenant de chaque place  $v \in M_{\mathbb{Q}}$ . À la place infinie, cette quantité est l'énergie (au sens de la théorie du potentiel) de la mesure  $\rho_{R,\infty} - [F_n]$ . Cette même interprétation est valide aux places finies, si on utilise la théorie de l'intersection des mesures sur les arbres explicitée en §1.2.4. On montre ensuite grâce à un procédé de régularisation des mesures, que chaque contribution locale est essentiellement positive. L'hypothèse  $h_R(F_n) \rightarrow 0$  implique alors qu'en toute place chaque contribution locale tend vers 0. On conclut en notant que si l'énergie de  $\rho_{R,v} - [F_n]$  tend vers zéro, alors  $[F_n] \rightarrow \rho_{R,v}$ .

Nous avons choisi de découper ce chapitre en deux parties, la première présentant une démonstration du Théorème 5.1, et la seconde une preuve du Théorème 5.2. De manière plus précise, nous nous intéresserons en §5.1 aux propriétés dynamiques (et plus spécifiquement ergodiques) des applications rationnelles à coefficients dans  $\mathbb{C}_p$  pour un  $p$  premier. La partie §5.2 est elle de nature arithmétique. Outre la preuve du Théorème 5.2, on y trouvera des estimations quantitatives des vitesses de convergence.

### 5.1. Dynamique des fractions rationnelles $p$ -adiques

Dans toute cette partie,  $p$  désigne un nombre premier, et  $R$  une fraction rationnelle de degré  $D \geq 2$  dont les coefficients sont dans  $\mathbb{C}_p$ . On s'intéresse aux propriétés dynamiques de ce type d'applications. Bien que l'étude dynamique des fractions rationnelles définies sur  $\mathbb{C}$  ait une longue et riche histoire, son analogue

$p$ -adique en est lui à ses prémices. Les premiers articles sur ce sujet [HY83, Lub94, Hsi00, Ben02a, Ben02b, RL03a] se sont attachés d'une part à la description locale de la dynamique, et d'autre part à développer une théorie de type Fatou-Julia analogue au cas complexe, et que l'on exposera (très) brièvement en §5.1.2. L'idée fondamentale de regarder l'action de  $R$  non sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$  mais sur l'espace de Berkovich associé est due à Juan Rivera-Letelier [RL03b]. Elle lui a permis de placer dans son cadre naturel l'étude des propriétés dynamiques de  $R$ , et en particulier de donner de nombreuses applications sur l'existence de points périodiques.

L'espace de Berkovich  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$  est aussi l'espace naturel dans lequel on peut étudier les propriétés *ergodiques* de  $R$ . On va ainsi rappeler en §5.1.4 les résultats obtenus en [FRL04] concernant l'existence d'une mesure (totalement) invariante. Même si les propriétés de cette mesure ne sont pas encore complètement élucidées, son étude permet d'ores et déjà d'obtenir une vision plus riche et plus complète de la dynamique de  $R$  sur  $\mathbb{C}_p$ .

**5.1.1. Application induite du  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$  et degré local.** Rappelons que l'espace de Berkovich  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$  est par définition l'espace des semi-normes  $\mathcal{S}$  définies sur  $\mathbb{C}_p[T]$  se restreignant sur la norme  $p$ -adique standard sur  $\mathbb{C}_p$ . L'espace de Berkovich est muni de la topologie de la convergence simple, pour laquelle il est compact. C'est aussi un arbre réel, voir §2.1. On rappelle de plus que toute fraction rationnelle  $R$  induit une application continue sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$  de telle sorte que  $[R(\mathcal{S})](P) = \mathcal{S}(P \circ R)$  pour tout  $P \in \mathbb{C}_p[T]$ .

Toute boule fermée  $B = \{z, |z - z_0| \leq r\}$  détermine un point  $\mathcal{S}_B \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ . L'ensemble  $\{\mathcal{S}_B, \text{diam}(B) > 0\}$  est noté  $\mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ , tandis que  $\{\mathcal{S}_B, \text{diam}(B) = 0\}$  s'identifie à  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ . Le complémentaire  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus (\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cup \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}})$  consiste en des bouts de l'arbre  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ . Le résultat suivant donne une interprétation géométrique de l'action de  $R$  sur l'espace de Berkovich.

**LEMME 5.1.** L'image d'une boule fermée par une fraction rationnelle est soit une boule fermée, soit le complémentaire d'une boule fermée, soit  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ . Si  $B$  est une boule fermée, et si  $R(B)$  est aussi une boule fermée (resp. le complémentaire d'une boule fermée), alors  $R(\mathcal{S}_B) = \mathcal{S}_{R(B)}$  (resp.  $= \mathcal{S}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus R(B)}$ ).

Notons que l'on peut toujours faire un changement de coordonnées pour que la boule associée à un point  $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$  donnée ait une image  $\subsetneq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ .

**EXEMPLE 5.2.** Soit  $R(z) = z^2/(z - 1)$ . L'image par  $R$  de la boule  $B(0, 1)$  est  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ . Notons  $\mathcal{S}_0 \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$  le point associé à cette boule. Dans la coordonnée  $w = 1/z$ ,  $\mathcal{S}_0$  est encore associé à  $B(0, 1)$ , et  $R$  est conjuguée à  $w \mapsto w - w^2$  qui préserve bien  $B(0, 1)$ . Donc  $R(\mathcal{S}_0) = \mathcal{S}_0$ .

On vérifie que  $R : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$  est faiblement continue, et préserve les quatre types de valuations à savoir les sous-ensembles  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ,  $\mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$ ,  $\mathbb{H}_p^{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$ , et  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus (\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cup \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}})$ .

On va maintenant s'attarder un peu sur une notion qui s'avère cruciale dans l'étude des fractions rationnelles, le *degré local*. C'est un nombre entier non nul

associé à toute fraction rationnelle  $R \in \mathbb{C}_p(T)$  et tout point  $\mathcal{S} \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ . Il est défini comme suit.

**PROPOSITION-DÉFINITION 5.3.** Tout point  $\mathcal{S} \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$  admet un voisinage  $W_0$  tel que pour tout ouvert faible  $U$  inclus dans  $R(W_0)$  la restriction de  $R$  à la composante connexe  $V$  de  $R^{-1}(U)$  contenant  $\mathcal{S}$  vérifie la propriété suivante. Tout point  $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \cap U \setminus \{\mathcal{S}\}$  possède exactement  $\deg_R(\mathcal{S}) \in \mathbb{N}^*$  préimages. Ce nombre entier  $\deg_R(\mathcal{S})$  est appelé degré local de  $R$  en  $\mathcal{S}$ .

Nous renvoyons à [RL03b, Section 4] pour une étude précise de cet invariant, nous nous contenterons ici d'en donner les principales caractéristiques générales, de décrire son interprétation dans quelques cas, et d'expliciter quelques exemples.

- (1) Pour tout  $R \in \text{PGL}(2, \mathbb{C}_p)$ , on a  $\deg_R \equiv 1$ .
- (2) Pour tout  $R \in \mathbb{C}_p(T)$  et tout point  $\mathcal{S} \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ , on a

$$\sum_{R(\mathcal{S}')=\mathcal{S}} \deg_R(\mathcal{S}') = \deg(R) .$$

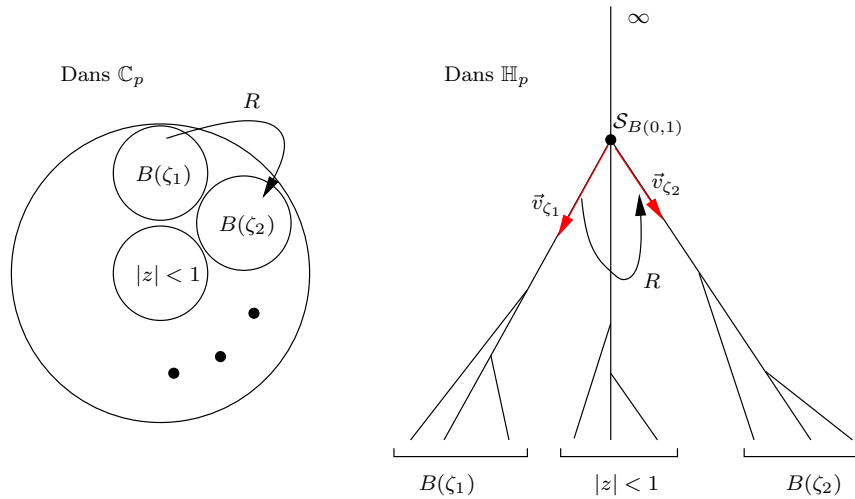
- (3) Pour tout couple de fractions rationnelles  $R_1, R_2$ , on a

$$\deg_{R_1 \circ R_2}(\mathcal{S}) = \deg_{R_1}(R_2(\mathcal{S})) \deg_{R_2}(\mathcal{S}) .$$

On peut montrer que ces propriétés (plus une propriété indiquant que cet invariant est déterminé localement) caractérisent le degré local. Son calcul se fait de la manière suivante.

Tout d'abord si  $z_0 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ , on conjugue  $R$  à la source et au but par des applications de Möbius de telle sorte que  $R(z_0) = z_0 = 0$ . On développe alors  $R$  en série  $R(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$ , et on a  $\deg_R(z_0) = \min\{k, a_k \neq 0\}$ .

Si  $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$ , quitte à composer par une application de Möbius, on peut s'arranger pour que  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_B$  pour une boule fermée  $B$  dont l'image par  $R$  est encore une boule fermée. Dans ce cas,  $\deg_R(\mathcal{S})$  est le degré de l'application restreinte  $R : B \rightarrow R(B)$ , c'est-à-dire le cardinal de  $R^{-1}\{z\} \cap B$  pour tout  $z \in R(B)$ .



Nous laisserons de côté le cas des bouts de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$  qui ne sont pas dans  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ . Le dernier cas, celui des points de  $\mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$ , est le plus intéressant. Après conjugaison, on peut supposer que  $\mathcal{S}$  et  $R(\mathcal{S})$  sont tous les deux associés à la boule unité, et que  $R(B(0, 1)) = B(0, 1)$ . Dans ce cas, quitte à multiplier les coefficients de  $R$  par une constante, on peut écrire  $R(T) = \frac{\sum a_k T^k}{\sum b_k T^k}$  avec  $\max\{|a_k|, |b_k|\} = 1$ . En résumé, la fraction  $R$  induit sur le corps résiduel  $\overline{\mathbb{F}}_p$  une fraction rationnelle  $\overline{R}$  de degré non nul, et on  $\deg_R(\mathcal{S}) = \deg(\overline{R})$ .

Il est intéressant de s'attarder un peu sur cette situation. A chaque élément du corps résiduel  $\zeta \in \overline{\mathbb{F}}_p$  correspond une boule ouverte  $B(\zeta) = \{z, |z - \xi| < 1\}$  où  $\xi$  a pour réduction  $\zeta$ . Ces boules sont toutes disjointes, elles paramètrent naturellement l'espace tangent (privé de la direction déterminée par l'infini) au point de l'espace de Berkovich associé à la boule unité. La fraction  $\overline{R}$  décrit l'action de  $R$  sur l'espace des branches en  $\mathcal{S}$  au sens suivant.

**PROPOSITION 5.4.** Soit  $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$  le point associé à  $B(0, 1)$ , et supposons que  $R(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ . Pour tout  $\zeta \in \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{F}}_p)$ , on note  $\vec{v}_\zeta$  le vecteur tangent en  $\mathcal{S}$  qu'il détermine naturellement, et  $B(\zeta)$  la boule ouverte de diamètre 1 qui lui est associée. Alors hors d'un nombre d'exceptions, on a  $R(B(\zeta)) = B(\overline{R}(\zeta))$ , et  $\vec{v}_\zeta$  est envoyé sur  $\vec{v}_{\overline{R}(\zeta)}$  par  $R$ .

Les exceptions correspondent aux boules ouvertes contenant une préimage de  $B(0, 1)$ .

### 5.1.2. Ensembles de Fatou et de Julia.

**DEFINITION 5.5.** L'ensemble de Julia de  $R$ , noté  $J(R)$ , est l'ensemble des points  $\mathcal{S} \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$  qui admette un voisinage ouvert  $U \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$  pour lequel on a  $\cup_{n \geq 0} R^n(U) \supset \mathbb{H}_p$ .

L'ensemble de Fatou est le complémentaire de  $J(R)$  et est noté  $F(R)$ .

Par définition,  $F(R)$  est un ensemble ouvert, totalement invariant par  $R$ . C'est un fait dû à Benedetto [Ben02a] qu'il existe toujours un point de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$  appartenant à l'ensemble de Fatou. Notons que dans le cas complexe, certaines fractions rationnelles ont un ensemble de Fatou vide.

De même, l'ensemble de Julia est (faiblement) compact, totalement invariant et d'intérieur vide.

On peut décrire assez précisément la dynamique dans l'ensemble de Fatou. Nous renvoyons à [RL03a] pour les détails. Nous nous contenterons ici d'énoncer le résultat suivant.

**THÉORÈME 5.3.** *Toute composante connexe  $U \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$  de  $F(R)$  est de l'un des trois types suivants.*

- *La composante  $U$  est éventuellement associée à un cycle attractif. Plus précisément, il existe un entier  $k_0$  tel que  $R^{k_0}(U)$  contient un cycle périodique attractif  $\gamma$ , et on a  $\text{dist}(R^k(\mathcal{S}), \gamma) \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow \infty$  pour tout  $\mathcal{S} \in U$ .*
- *La composante  $U$  est éventuellement une composante de quasi-périodicité. Dans ce cas, il existe un entier  $k_0$  et une suite croissante  $k_l$  tendant vers l'infini tels que  $R^{k_l}|_{R^{k_0}(U)} \rightarrow \text{id}$  lorsque  $l$  tend vers l'infini.*



- *C'est une composante errante au sens où  $R^k(U) \cap R^l(U) = \emptyset$  pour tout  $k \neq l$ .*

Mentionnons le fait que contrairement au cas complexe, la dernière possibilité arrive effectivement. Le premier exemple de composante errante en dynamique  $p$ -adique est explicité dans [Ben02b].

**5.1.3. Bonne réduction.** Dans certains cas, la dynamique de  $R$  se comprend très bien à partir de la description de son action sur le corps résiduel de  $\mathbb{C}_p$ . On a vu que celui-ci était isomorphe à  $\overline{\mathbb{F}}_p$ . La définition fondamentale suivante est tirée de [MJ95].

DEFINITION 5.6. On dit que  $R \in \mathbb{C}_p(T)$  a *bonne réduction* ssi on peut trouver deux polynômes  $P_1, P_2 \in \mathbb{C}_p[X, Y]$  homogènes de degré  $d = \deg(R)$ , tels que  $R[X : Y] = [P_1(X, Y) : P_2(X, Y)]$ , et les réductions  $\overline{P}_1, \overline{P}_2 \in \overline{\mathbb{F}}_p[X, Y]$  n'ont pas de racine commune.

La notion de bonne réduction dépend fortement du choix de coordonnées. Bien que  $pT^2$  n'ait pas bonne réduction, ce polynôme est conjugué à  $T^2$  qui lui a bonne réduction.

On peut reformuler en termes d'action locale cette définition.

PROPOSITION 5.7. Une fraction rationnelle  $R$  a bonne réduction ssi elle fixe le point  $\mathcal{S}_0 \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$  associé à la boule unité  $B(0, 1)$ , et  $\deg_R(\mathcal{S}_0) = \deg(R)$ .

En d'autres termes,  $R$  a bonne réduction ssi  $\mathcal{S}_0$  est fixe et totalement invariant.

On donnera ci-dessous d'autres caractérisations de la notion de bonne réduction en termes ergodiques, voir Propositions 5.8 et 5.10.

Il n'est pas difficile de voir que pour toute fraction rationnelle ayant bonne réduction l'ensemble de Julia coïncide avec le point  $\mathcal{S}_0 \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$  associé à  $B(0, 1)$ , voir [MJ95].

**5.1.4. Théorème de Brolin.** On va maintenant utiliser librement la théorie du potentiel sur les arbres explicitée en §1.2.4, afin de construire une mesure de probabilité invariante sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ , vérifiant le théorème de Brolin comme dans le cas complexe.

On définit tout d'abord une action par tiré en arrière sur les mesures de probabilité comme suit. Si  $\chi : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue, on pose  $R_*\chi(\mathcal{S}) := \sum_{R(\mathcal{S}')=\mathcal{S}} \deg_R(\mathcal{S}')\chi(\mathcal{S}')$ . On vérifie que  $R_*\chi$  est encore une fonction continue, et que  $\sup |R_*\chi| \leq \deg(R) \sup |\chi|$ . Pour toute mesure complexe  $\rho$ , on définit par dualité  $\langle R^*\rho, \chi \rangle := \langle \rho, R_*\chi \rangle$ . Si  $\rho$  est une mesure de probabilité,  $R^*\rho$  est une mesure positive de masse  $\deg(R)$ , supportée sur  $R^{-1}\{\text{Supp}(\rho)\}$ .

Fixons maintenant  $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ . Les deux mesures  $D^{-1}R^*[\mathcal{S}]$  et  $[\mathcal{S}]$  étant de même masse, on peut donc écrire  $D^{-1}R^*[\mathcal{S}] = [\mathcal{S}] + \Delta g$  avec  $g : \mathbb{H}_p \rightarrow \mathbb{R}$ . Le support de  $R^*[\mathcal{S}]$  est constitué d'au plus  $D$  points, donc l'enveloppe convexe de l'ensemble  $\text{supp} R^*[\mathcal{S}] \cup \{\mathcal{S}\}$  est un arbre fini  $\mathcal{T}$  dont les bouts sont situés dans  $\mathbb{H}_p$ . Le potentiel  $g$  est localement constant en dehors de  $\mathcal{T}$  et est borné sur  $\mathcal{T}$ , il est donc

borné sur  $\mathbb{H}_p$  tout entier. On obtient donc

$$\frac{1}{D^n} R^{n*}[\mathcal{S}] = [\mathcal{S}] + \Delta g_n \text{ avec } g_n = \sum_0^{n-1} D^{-k} g \circ R^k .$$

La suite  $g_n$  converge uniformément sur  $\mathbb{H}_p$  vers une fonction  $g_\infty$ , donc  $D^{-n} R^{n*}[\mathcal{S}]$  converge vaguement vers une mesure  $\rho_R$ . Cette mesure ne dépend pas du point  $\mathcal{S}$  choisi (écrire  $[\mathcal{S}] - [\mathcal{S}'] = \Delta h$  avec  $h$  bornée). Notons que pour tout  $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$  nous pouvons écrire  $\rho_R = [\mathcal{S}] + \Delta g$  avec  $g$  bornée. Ceci implique en particulier que  $\rho_R$  ne charge aucun point de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$  (on déduit de la Proposition 2.2 que tout potentiel tend vers  $-\infty$  en un point chargé par son Laplacien). La mesure  $\rho_R$  vérifie toujours les équations d'invariance :  $R^* \rho_R = D \rho_R$ , et  $R_* \rho_R = \rho_R$ . En particulier, pour tout  $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$  tels que  $R(\mathcal{S}') = \mathcal{S}$  on a  $\rho_R\{\mathcal{S}'\} = \frac{\deg(R)}{\deg_R(\mathcal{S}')} \rho_R\{\mathcal{S}\}$ . Si  $\rho_R\{\mathcal{S}\} > 0$  pour un point  $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ , l'ensemble  $R^{-n}(\mathcal{S})$  est fini, et  $R$  est conjugué à une fraction rationnelle ayant bonne réduction.

On a donc essentiellement montré la

**PROPOSITION 5.8.** Il existe une mesure de probabilité  $\rho_R$  sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$  telle que  $D^{-n} R^{n*}[\mathcal{S}] \rightarrow \rho_R$  pour tout point  $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ . La mesure  $\rho_R$  ne charge pas les points de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ . De plus,  $\rho_R\{\mathcal{S}\} > 0$  pour un point  $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ , si et seulement si on peut trouver  $\phi \in \text{PGL}(2, \mathbb{C}_p)$  tel que  $\phi \circ R \circ \phi^{-1}$  ait bonne réduction. Dans ce cas,  $\rho_R = [\mathcal{S}]$ .

On peut maintenant énoncer dans ce cadre le théorème suivant, qui présente le Théorème 5.1 dans sa forme générale.

**THÉORÈME 5.4.** *Pour toute fraction rationnelle  $R$  de degré  $D \geq 2$  définie sur  $\mathbb{C}_p$ , on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} D^{-n} R^{n*}[z] = \rho_{R,v}$ , pour tout point  $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$  qui n'est pas totalement invariant par  $R$  ou  $R^2$ .*

**ESQUISSE DE DÉMONSTRATION.** Prenons un point  $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ , et écrivons  $[z] = [\mathcal{S}_0] + \Delta g$  avec  $g : \mathbb{H}_p \rightarrow \mathbb{R}$ . On a alors,  $D^{-n} R^{n*}[z] = D^{-n} R^{n*}[\mathcal{S}_0] + \Delta(D^{-n} g \circ R^n)$  pour tout  $n \geq 0$ , donc  $D^{-n} R^{n*}[z] \rightarrow \rho_R$  dès que  $D^{-n} g \circ R^n \rightarrow 0$  ponctuellement. On démontre que cette suite de fonctions tend vers zéro, en estimant les vitesses de convergence des points de  $\mathbb{H}_p$  vers  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{H}_p$  c'est-à-dire vers  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ .  $\square$

**5.1.5. Propriétés ergodiques.** En dynamique complexe, la mesure  $\rho_R$  que nous avons construite ci-dessus possède de nombreuses propriétés ergodiques. On montre ainsi qu'elle est *l'unique mesure d'entropie maximale de  $R$* , et que l'entropie topologique de  $R$  est précisément  $\log \deg(R)$ . En dynamique  $p$ -adique, la situation est nettement plus compliquée, et n'est pas complètement élucidée. On va présenter ici quelques résultats sur la nature ergodique de  $\rho_R$  puis énoncer quelques conjectures.

Le premier résultat que nous enonçons est vrai dans le contexte holomorphe.

**PROPOSITION 5.9.** Le support de la mesure  $\rho_R$  coïncide avec l'ensemble de Julia de  $R$ . De plus, cette mesure est mélangeante, et en particulier ergodique.

Pour  $\rho_R$ -presque tout point  $\mathcal{S} \in J(R)$ , on a donc

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} [R^k(\mathcal{S})] \longrightarrow \rho_R$$

lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

La preuve de ce résultat est en réalité assez simple. La première assertion est une conséquence de l'invariance de  $\rho_R$  par  $R^*$ , et du fait que  $\rho_R$  ne charge pas les points de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ . La seconde découle du Théorème 5.4 d'équidistribution des points.

Les choses se compliquent lorsque l'on s'intéresse à l'entropie métrique de  $\rho_R$ . La proposition suivante résume les résultats généraux que l'on a pu démontrer jusqu'à présent.

**PROPOSITION 5.10.** L'entropie topologique de  $R$  est bornée par  $\log \deg(R)$ . En particulier, l'entropie métrique de  $\rho_R$  est un nombre réel compris entre 0 et  $\log \deg(R)$ . De plus, on a équivalence entre les trois faits suivants.

- L'entropie métrique de  $R$  est nulle.
- L'entropie topologique de  $R$  est nulle.
- A conjugaison par un élément de  $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}_p)$  près,  $R$  a bonne réduction.

Une caractérisation des cas pour lesquels l'entropie métrique de  $\rho_R$  est égale à  $\log \deg(R)$  n'est pas vraiment envisageable comme on le verra plus loin. Notons cependant que si  $J(R) \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ , alors  $\rho_R$  est d'entropie (maximale) égale à  $\log \deg(R)$ .

La proposition et cette remarque résultent essentiellement de la formule dite de Rokhlin-Parry qui relie l'entropie métrique à des données locales, ici en l'occurrence au degré local défini en §5.1.1. Elle s'exprime ici sous la forme de l'inégalité

$$h_{\rho_R}(R) \geq \int_{J(R)} \log \left| \frac{\deg(R)}{\deg_R(\mathcal{S})} \right| d\rho_R(\mathcal{S}) .$$

On voit donc que lorsque  $h_{\rho_R}(R) = 0$ , on a  $\deg_R = \deg(R)$  sur  $J(R)$  et donc  $R$  a bonne réduction. Réciproquement, si  $J(R) \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ , on a  $\deg_R = 1$  pour presque tout point, et donc  $h_{\rho_R}(R) = \log \deg(R)$ .

On va maintenant décrire deux exemples illustrant les difficultés inhérentes à la situation  $p$ -adique.

**EXEMPLE 5.11.** Soit  $P(z) = \frac{1}{p}(z^p - z^{p^2})$ . On montre que

$$PB(z, r) = \begin{cases} B(P(z), |z|^{p-1}r) & \text{si } r \leq |z|r_0 \\ B(P(z), |p|^{-1}r) & \text{si } r \geq |z|r_0 \end{cases}$$

avec  $r_0 := |p|^{1/p-1} < 1$ . En particulier, l'ensemble des boules de diamètre  $r_0$  est laissé invariant, ainsi que son adhérence dans  $\mathbb{H}_p$  pour la métrique  $d_{\mathbb{H}_p}$ , à  $p^{-1/p-1}$ . Sur cet ensemble le degré local est  $p$ .

Par ailleurs, le polynôme  $T^p - T^{p^2} \in \overline{\mathbb{F}_p}[T]$  possède  $p$  zéros, qui déterminent  $p$  boules ouvertes  $B_1, \dots, B_p$  de diamètre 1 et disjointes, incluses dans  $B(0, 1)$ .

On montre sans difficulté que les boules  $B_i$  constituent une partition de Markov pour le système  $(P, J(P))$ . Celui-ci est donc topologiquement conjugué au décalage complet à  $p$  symboles. En particulier,  $0 < h_{\text{top}}(R) = \log p < \log \deg(P)$ . Enfin, la mesure  $\rho_P$  correspond à la mesure équilibrée sur  $\{1, \dots, p\}^{\mathbb{N}}$  et est donc d'entropie maximale.

EXEMPLE 5.12. Soit  $R$  la fraction de degré 11 définie par  $R(z) := z^2(1 + (a_1z)^3)^{-1}(1 + (a_2z)^6)$ , avec  $|a_i| = p^{-t_i}$ , où  $t_1 = 1/2$  et  $t_2 = 1/2 + 1/3 = 5/6$ .

Cette fois-ci,  $J(R)$  est le segment de  $\mathbb{H}_p$  correspondant aux boules  $B(0, p^t)$  avec  $0 \leq t \leq 1$ . Sur ce segment, et en fonction du paramètre  $t$ ,  $R$  est affine par morceaux :  $R(t) = 2t$  sur  $[0, 1/2]$  ;  $R(t) = -3t + 5/2$  sur  $[1/2, 5/6]$ , et  $R(t) = 6t$  sur  $[5/6, 1]$ . L'entropie topologique de  $R$  est donc  $\log 3$ . Du fait de sa propriété d'invariance  $R^*\rho_R = 11\rho_R$ , la mesure  $\rho_R$  porte la masse  $2/11$  sur  $[0, 1/2]$ ,  $3/11$  sur  $[1/2, 5/6]$  et  $6/11$  sur  $[5/6, 1]$ . Son entropie est donnée  $h_{\rho_R}(R) = 2/11 \log(11/2) + 3/11 \log(11/3) + 6/11 \log(11/6)$ , ce qui est strictement inférieur à  $\log 3$ .

La mesure  $\rho_R$  n'est pas d'entropie maximale. Ceci présente donc une différence majeure avec le cas complexe.

Si des résultats généraux décrivant l'entropie de  $R$  paraissent délicats à énoncer et démontrer, il semble raisonnable de conjecturer le fait suivant.

QUESTION 3. Supposons que le degré local de  $R$  soit égal à 1 hors d'un arbre fini. Alors soit  $\rho_R$  est d'entropie maximale égale à  $\log \deg(R)$  ; soit  $J(R)$  est inclus dans un segment de  $\mathbb{H}_p$ , et  $(R, J(R))$  est topologiquement conjugué à un décalage complet sur un nombre fini de symboles. En particulier, l'entropie topologique de  $R$  est de la forme  $\log N$  avec  $N$  entier.

Lorsque l'hypothèse sur le degré local n'est pas vérifiée, le comportement de  $R$  au voisinage de certains points peut être sauvage et engendre des difficultés techniques difficilement surmontables. Ainsi, on peut construire un exemple de polynôme tel que  $P$  n'est pas localement injective en tout point de  $J(P)$  ! Ce phénomène est très problématique pour le calcul d'entropie, car il rend malaisé à la fois la construction de partitions génératrices pour la mesure, et de partitions Markoviennes.

## 5.2. Équidistribution des petits points

Nous donnons ici une esquisse de preuve du Théorème 5.2. Jusqu'à la fin du chapitre,  $R$  désignera toujours une fraction rationnelle à coefficients rationnels, et  $h_R$  la hauteur normalisée qui lui est naturellement associée.

Rappelons que la preuve du théorème se déroule en trois étapes. Premièrement, on décompose  $h_R$  en termes locaux. Ensuite, on relie annulation de ces termes à la convergence des mesures. Enfin, on estime la positivité de chacun de ces termes locaux à l'aide d'un procédé de régularisation des mesures atomiques.

**5.2.1. Décomposition en termes locaux.** Commençons par regarder le cas de la hauteur naïve. Rappelons que l'on a  $|F| \times h_{\text{nv}}(F) = \sum_{w \in F} \sum_{M_{\mathbb{Q}}} \log^+ |w|$  pour tout ensemble fini  $F$  invariant sous l'action du groupe de Galois. Cette équation admet une interprétation simple en terme de théorie du potentiel. Pour

expliquer celà, notons  $\text{Diag}_v = \{(z, z) ; z \in \mathbb{C}_v\}$  la diagonale de  $\mathbb{C}_v \times \mathbb{C}_v$ . Lorsque  $v$  est infinie, pour chaque paire de mesures boréliennes  $\rho, \rho'$  supportées dans  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ , et telles que la fonction  $\log^+ |z - w|$  soit intégrable par rapport à  $\rho \otimes \rho'$  sur  $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \setminus \text{Diag}$ , on pose

$$(\rho, \rho')_\infty := - \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{C} \setminus \text{Diag}} \log |z - w| d\rho(z) \otimes d\rho'(w) .$$

On vérifie que

$$(\lambda_\infty, \lambda_\infty) = 0 \text{ et } ([w], \lambda_\infty)_v = -\log^+ |w| , \quad (16)$$

pour tout  $w \in \mathbb{C}$ , où  $\lambda_\infty$  est la mesure de probabilité proportionnelle à la mesure de Lebesgue sur le cercle unité  $S^1 \subset \mathbb{C}$ .

Aux places finies, la situation est la même. On note  $A^1(\mathbb{C}_v) := \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_v) \setminus \{\infty\}$ , et on définit

$$(\rho, \rho') = - \int_{A^1(\mathbb{C}_v) \times A^1(\mathbb{C}_v) \setminus \text{Diag}} \log \sup\{\mathcal{S}, \mathcal{S}'\} d\rho(\mathcal{S}) \otimes d\rho'(\mathcal{S}') .$$

La fonction  $\sup$  est l'exact analogue de la fonction  $|z - w|$  sur la droite affine. Elle est définie pour les points de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_v)$  correspondant à des boules fermées en posant :  $\sup\{\mathcal{S}, \mathcal{S}'\} = \text{diam}(B)$ , où  $B$  est la plus petite boule contenant  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$ . On l'étend aux autres points par continuité. Lorsque  $z = \mathcal{S}$  et  $w = \mathcal{S}'$  sont des points de  $\mathbb{C}_v$ , on retrouve bien  $\sup\{z, w\} = |z - w|$ . L'équation (16) reste alors valide si  $\lambda_v$  est maintenant la masse de Dirac en la boule unité de  $\mathbb{C}_v$ .

En mettant bout à bout ces formules, et en combinant celà avec la bilinéarité des accouplements  $(\cdot, \cdot)_v$ , on peut donc écrire

$$h_{\text{nv}}(F) = \frac{1}{2} \sum_{v \in M_{\mathbb{Q}}} ([F] - \lambda_v, [F] - \lambda_v)_v . \quad (17)$$

Rappelons que la hauteur normalisée  $h_R$  est définie comme limite de la suite de fonctions  $D^{-n} h_{\text{nv}} \circ R^n$ . L'équation (17), et les résultats de convergence de la section précédente donnent alors le résultat suivant de décomposition.

**PROPOSITION 5.13.** Soit  $R$  une fraction rationnelle de degré  $D \geq 2$ , à coefficients dans  $\mathbb{Q}$ . Alors pour tout sous-ensemble fini  $F$  de  $\overline{\mathbb{Q}}$  invariant sous l'action du groupe de Galois  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ , on a

$$h_R(F) = \frac{1}{2} \sum_{v \in M_{\mathbb{Q}}} ([F] - \rho_{R,v}, [F] - \rho_{R,v})_v . \quad (18)$$

**5.2.2. Énergie et convergence.** Notre deuxième objectif est de relier convergence d'énergie  $(\rho_n, \rho_n) \rightarrow 0$  à la convergence en termes de mesures  $\rho_n \rightarrow 0$ , et ce tout d'abord dans le cas complexe.

**PROPOSITION 5.14.** Soient  $\rho$  et  $\rho'$  deux mesures de probabilité sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ , telles que  $\rho - \rho' = \Delta g$  pour une fonction  $g$  continue. Alors  $g$  admet des dérivées (au sens des distributions) qui sont  $L^2$ , et on a

$$(\rho - \rho', \rho - \rho') = \int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} dg \wedge d^c g \geq 0 . \quad (19)$$

De plus  $(\rho - \rho', \rho - \rho') = 0$  ssi  $\rho = \rho'$ .

Plusieurs explications sont ici nécessaires. Notons tout d'abord que toute mesure positive est localement le Laplacien d'une fonction sous-harmonique. On appelle une telle fonction un potentiel. La condition portant sur la continuité de  $g$  est en fait équivalente à l'existence d'une mesure  $\rho_0$  telle que les deux mesures  $\rho - \rho_0$  et  $\rho' - \rho_0$  restent positives, et admettent localement en tout point un potentiel continu. Il est alors classique que toute fonction sous-harmonique et continue (en fait localement bornée suffit) est à dérivée  $L^2$ .

Ensuite, on pose  $d^c g := \frac{1}{2\pi i}(\partial g - \bar{\partial} g)$ , où  $\partial g$  (resp.  $\bar{\partial} g$ ) dénote la composante de type  $(1, 0)$  (resp.  $(0, 1)$ ) de la différentielle  $dg$ . On vérifie que

$$dg \wedge d^c g = \left( \left| \frac{\partial g}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial g}{\partial y} \right|^2 \right) \frac{dx \wedge dy}{2\pi}.$$

Il est maintenant clair que si  $\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} dg \wedge d^c g = 0$ , alors la différentielle de  $g$  est bien nulle, et donc  $\rho = \rho'$ . La preuve de (19) résulte elle d'une intégration par partie.

On va maintenant énoncer un résultat analogue à la Proposition 5.14 dans le cas non-archimédien. On fixe donc un nombre premier  $p$ .

Fixons un point base  $\mathcal{S}_0 \in \mathbb{H}_p$ , par exemple correspondant à la boule unité de  $\mathbb{C}_p$ . On définit la relation d'ordre  $\preccurlyeq$  définie par,  $\mathcal{S} \preccurlyeq \mathcal{S}'$  si et seulement si  $\mathcal{S} \in [\mathcal{S}_0, \mathcal{S}']$ . Etant donnée une mesure borélienne  $\rho$ , on désigne par  $f_\rho : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction nulle sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$  et telle que pour  $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$  on ait  $f_\rho(\mathcal{S}) = \rho\{\mathcal{S} \preccurlyeq \cdot\}$ . On introduit aussi  $\lambda$  la mesure sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$  qui est nulle sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$  et qui coïncide avec la mesure de Hausdorff de dimension 1 sur  $\mathbb{H}_p$ , pour la distance  $d$ . En particulier,  $\lambda[\mathcal{S}, \mathcal{S}'] = d(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$  pour tout  $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in \mathbb{H}_p$ .

**PROPOSITION 5.15.** Soient  $\rho$  et  $\rho'$  deux mesures de probabilités sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ , telles que  $\rho - \rho' = \Delta g$  pour une fonction  $g$  continue. Alors la fonction  $f_{\rho - \rho'}$  définie ci-dessus est dans  $L^2(\lambda)$  et on a

$$(\rho - \rho', \rho - \rho') = \int_{\mathbb{H}_p} f_{\rho - \rho'}^2 d\lambda \geq 0. \quad (20)$$

De plus  $(\rho - \rho', \rho - \rho') = 0$  ssi  $\rho = \rho'$ .

**5.2.3. Contrôle des termes locaux : régularisation.** Notre but est de contrôler la différence entre deux mesures de probabilité  $[F] - \rho_{R,v}$  à l'aide d'informations sur l'énergie. On ne peut cependant pas appliquer directement les Propositions 5.15, 5.14 précédentes, car  $[F]$  est une mesure atomique, et en particulier ne possède pas de potentiel continu.

On est donc amené à *régulariser* ces mesures, i.e. remplacer  $[F]$  par une mesure proche  $[F]_\varepsilon$  à potentiel continu, puis à estimer la variation d'énergie lorsque l'on remplace  $[F]$  par  $[F]_\varepsilon$ .

Dans le cas complexe, on utilise un procédé classique de régularisation par convolution. On fixe donc une fonction lisse non croissante  $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ , telle que  $\varphi \equiv 0$  hors du segment  $[0, 1]$  et  $\int_0^1 \varphi = 1$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on note  $\varphi_\varepsilon(r) = \varepsilon^{-1} \varphi(\frac{r}{\varepsilon})$ . Pour  $z \in \mathbb{C}$ , on définit la convolée  $[z]_\varepsilon := \varphi_\varepsilon * [z]$ . Pour toute

fonction continue  $\chi$ , on a donc

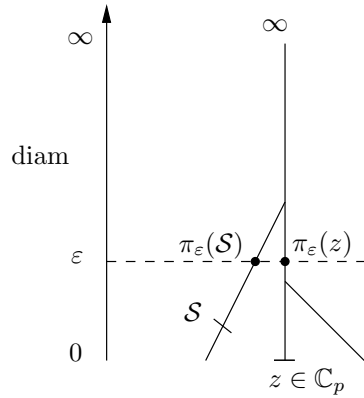
$$\int \chi d([z]_\varepsilon) = \int \chi d(\varphi_\varepsilon * [z]) := \int_0^\varepsilon \left[ \int_0^{2\pi} \chi(z + re^{it}) \frac{dt}{2\pi} \right] \varphi_\varepsilon(r) dr. \quad (21)$$

Par conséquent,  $[z]_\varepsilon$  est une mesure de probabilité à potentiel continu. On obtient alors sans peine le résultat suivant.

**PROPOSITION 5.16.** Soit  $\rho$  une mesure de probabilité à potentiel continu sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ . Alors il existe une constante  $C > 0$  et une fonction  $\eta$  telle que  $\lim_0 \eta = 0$  et pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout sous ensemble fini  $F$  de  $\mathbb{C}$ , on ait

$$([F] - \rho, [F] - \rho) \geq ([F]_\varepsilon - \rho, [F]_\varepsilon - \rho) - \eta(\varepsilon) - |F|^{-1}(C + \log \varepsilon^{-1}) \quad (22)$$

On tire de cette inégalité une estimation de la positivité de  $([F] - \rho, [F] - \rho)$  en appliquant la Proposition 5.14 à  $([F]_\varepsilon - \rho, [F]_\varepsilon - \rho)$ . Notons enfin que plus la cardinalité de  $F$  est grande, plus le dernier terme de (22) est petit. On verra que ceci explique l'hypothèse  $|F_n| \rightarrow \infty$  dans l'énoncé du théorème principal du chapitre.



Dans le cas non-archimédien, le procédé de régularisation est lui de nature élémentaire, illustré par la figure ci-contre. Étant donné  $\varepsilon \geq 0$ , on désigne par  $\pi_\varepsilon : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$  l'application envoyant  $\mathcal{S}$  sur l'unique point  $\mathcal{S}' \in [\mathcal{S}, \infty]$  tel que  $\text{diam}(\mathcal{S}') = \max\{\text{diam}(\mathcal{S}), \varepsilon\}$ . Sur l'ensemble  $H_\varepsilon = \{\mathcal{S} \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p), \text{diam}(\mathcal{S}) \geq \varepsilon\}$  on a  $\pi_\varepsilon = \text{id}$ , tandis que  $\pi_\varepsilon(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)) = H_\varepsilon$ . Il est clair que  $H_0 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$  et que  $\pi_0 = \text{id}$  sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ . Enfin pour tout  $\varepsilon, \varepsilon' \geq 0$ , on a  $\pi_\varepsilon \circ \pi_{\varepsilon'} = \pi_{\max\{\varepsilon, \varepsilon'\}}$ .

Cette projection  $\pi_\varepsilon$  est continue, et on peut donc définir la régularisée d'une mesure borélienne  $\rho$  sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ , en posant  $\rho_\varepsilon = \pi_{\varepsilon*}\rho$ . On vérifie alors le lemme suivant.

**LEMME 5.17.** Soit  $F \subset \mathbb{A}^1(\mathbb{C}_p)$  un ensemble fini et notons  $[F]$  la mesure équilibrée sur les points de  $F$ . Alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , la mesure de probabilité  $[F]_\varepsilon$  est à potentiel continu et  $[F]_\varepsilon$  converge vaguement vers  $[F]$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Finalement, on peut énoncer la

**PROPOSITION 5.18.** Soit  $\rho$  une mesure de probabilité à potentiel continu sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ . Alors il existe une fonction  $\eta$  telle que  $\lim_0 \eta = 0$  et pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout sous ensemble fini  $F$  de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ , on ait

$$([F] - \rho, [F] - \rho) \geq ([F]_\varepsilon - \rho, [F]_\varepsilon - \rho) - \eta(\varepsilon) - |F|^{-1} \log \varepsilon^{-1} \quad (23)$$

**5.2.4. Preuve du Théorème 5.2.** Soit donc  $\{F_n\}_{n \geq 0}$  une suite d'ensembles finis de la droite projective  $\mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{Q}})$ , invariants sous l'action du groupe de Galois  $\text{Gal}(\overline{K}/K)$  et tels que  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} h_\rho(F_n) \leq 0$ . On suppose de plus que  $|F_n| \rightarrow \infty$ . Pour simplifier les notations, on pose  $\rho_v := \rho_{R,v}$ .

Soit  $B$  le sous ensemble de  $M_{\mathbb{Q}}$  des places finies  $v$  telles que la réduction de  $R$  dans le corps résiduel  $\mathbb{F}_v$  est de degré  $\deg(R)$ , i.e. en lesquelles  $R$  a bonne réduction vu comme fraction à coefficients dans  $\mathbb{C}_v$ . Le complémentaire  $N = M_K \setminus B$  est un ensemble fini qui contient la place infinie. Lorsque  $v \in B$ , on a  $\rho_v = \lambda_v$  et on montre facilement que pour tout  $n \geq 1$  on a  $(\rho_v - [F_n], \rho_v - [F_n])_v \geq 0$ . On a donc

$$h_R(F_n) \geq \frac{1}{2} \sum_{v \in N} (\rho_v - [F_n], \rho_v - [F_n])_v .$$

Soit  $v \in M_{\mathbb{Q}}$  (pour fixer les idées, on supposera  $v$  finie). Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on note  $[F_n]_{\varepsilon}$  la régularisée au sens de §5.2.3 de la mesure de probabilité  $[F_n]$ , c'est une mesure à potentiel continue. Les estimations de positivité Proposition 5.15 appliquée aux mesures  $\rho_v - [F_n]_{\varepsilon}$ , puis (23) fournissent l'inégalité

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\rho_v - [F_n], \rho_v - [F_n])_v \geq 0 .$$

Fixons maintenant  $v_0 \in M_{\mathbb{Q}}$  (finie). On a alors

$$\begin{aligned} 0 \leq (\rho_{v_0} - [F_n]_{\varepsilon}, \rho_{v_0} - [F_n]_{\varepsilon})_{v_0} &\leq (\rho_{v_0} - [F_n], \rho_{v_0} - [F_n])_{v_0} + \eta(\varepsilon) + \frac{\log \varepsilon}{|F_n|} \\ &\leq h_R(F_n) - \sum_{N \cup \{v_0\}} (\rho_v - [F_n], \rho_v - [F_n])_v + \eta(\varepsilon) + \frac{\log \varepsilon}{|F_n|} \end{aligned}$$

Finalement, on obtient  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} (\rho_{v_0} - [F_n]_{\varepsilon}, \rho_{v_0} - [F_n]_{\varepsilon})_{v_0} = 0$ . On conclut en appliquant (20). La fonction  $f_{\rho_v - [F_n]_{\varepsilon}}$  tend en effet vers zéro dans  $L^2(\lambda)$ , et donc  $[F_n]_{\varepsilon}$  tend vers  $\rho_{v_0}$  faiblement (quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  et  $n \rightarrow \infty$ ). Ceci implique  $[F_n] \rightarrow \rho_{v_0}$ , et termine la preuve du théorème.

**5.2.5. Généralisations effectives.** En dehors de celle que nous présentons, plusieurs démonstrations du Théorème 5.2 sont aussi disponibles, [BR, CL], et suivent sensiblement le même cheminement. Le point clé réside dans une estimation de positivité lorsque l'on régularise des mesures atomiques. L'avantage de notre présentation est qu'elle permet d'obtenir sans plus d'effort des résultats effectifs que les autres méthodes ne semblent pas redonner aussi facilement.

**THÉORÈME 5.5.** *Soit  $R$  une fraction rationnelle de degré  $D \geq 2$ , et définie sur  $\mathbb{Q}$ . Alors il existe une constante  $C > 0$  ne dépendant que de  $R$  pour toute fonction  $\varphi$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ , et pour tout ensemble fini  $F \subset \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{Q}})$  qui soit  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -invariant, on ait*

$$\left| \frac{1}{|F|} \sum_{\alpha \in F} \varphi(\alpha) - \int \varphi d\rho_v \right| \leq \left( h_R(F) + C \frac{\log |F|}{|F|} \right) \times \text{Lip}(\varphi) , \quad (24)$$

où  $\text{Lip}(\varphi) = \sup_{x \neq y} |\varphi(x) - \varphi(y)| / d(x, y)$  et  $d$  est la métrique sphérique sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ .

Notons que bien que d'énoncé un peu plus compliqué, on a exactement les mêmes résultats aux places finies, pour lesquels on renvoie à [FRL, Théorème 6]. Ce résultat est plus fort que le Théorème 5.2. En effet si  $|F_n| \rightarrow \infty$  et  $h_R(F_n) \rightarrow 0$ , le terme de droite de (24) tend bien vers zéro pour toute fonction  $\varphi$ , et donc  $[F_n] \rightarrow \rho_{R,v}$ .



Afin de comprendre la force de l'énoncé ci-dessus, mentionnons les deux corollaires suivants. Ici,  $\lambda_\infty$  est la mesure de Haar sur le cercle unité.

**COROLLAIRE 5.6.** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout ensemble fini  $F \subset \overline{\mathbb{Q}}$ , invariant par l'action du groupe de Galois et de cardinalité  $|F|$ , et pour toute fonction  $\varphi$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ , on a*

$$\left| \frac{1}{|F|} \sum_{\alpha \in F} \varphi(\alpha) - \int \varphi d\lambda_\infty \right| \leq \left( h_{\text{nv}}(F) + C \frac{\log |F|}{|F|} \right) \times \text{Lip}(\varphi) .$$

Dans un travail récent, Petsche [**Pet03**] a obtenu une estimation moins forte, mais pour une classe de fonctions plus générales.

En appliquant le Théorème 5.5 à la suite  $R^{-n}\{z\}$  on obtient aussi :

**COROLLAIRE 5.7.** *Soit  $R$  une fraction rationnelle de degré  $D \geq 2$ , et définie sur  $\mathbb{Q}$ , et notons  $\rho_R$  sa mesure d'équilibre sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ . Alors il existe une constante  $C > 0$  telle que pour toute fonction  $\varphi$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ , pour tout point  $z \in \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{Q}})$  non exceptionnel, et pour tout  $n \geq 0$ , on ait*

$$\left| \frac{1}{D^n} \sum_{\alpha \in R^{-n}\{z\}} \varphi(\alpha) - \int \varphi d\rho_R \right| \leq \left( \frac{h_R(z) + Cn}{D^n} \right) \times \text{Lip}(\varphi) .$$

Ce résultat est tout à fait surprenant dans la mesure où pour une fraction rationnelle à coefficients complexes quelconques, l'estimation en  $nD^{-n}$  ne semble pas connue. Des estimations en  $\exp(-\sqrt{n})$  ont été obtenues dans [**DPU96**] (et pour des fonctions  $f$  Hölder), et raffinées en  $\sigma^n$  pour un  $\sigma < 1$  proche 1 dans [**Hay99**], voir aussi [**PS96**] pour des résultats plus faibles.



## Bibliographie

- [Aut01] Pascal Autissier. Points entiers sur les surfaces arithmétiques. *J. Reine Angew. Math.*, 531 :201–235, 2001.
- [Ben02a] Robert L. Benedetto. Components and periodic points in non-Archimedean dynamics. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 84(1) :231–256, 2002.
- [Ben02b] Robert L. Benedetto. Examples of wandering domains in  $p$ -adic polynomial dynamics. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 335(7) :615–620, 2002.
- [BH] Matthew Baker and Liang-Chung Hsia. Canonical Heights, Transfinite Diameters, and Polynomial Dynamics. arxiv :math.nt/0305181.
- [Bil97] Yuri Bilu. Limit distribution of small points on algebraic tori. *Duke Math. J.*, 89(3) :465–476, 1997.
- [BR] Matthew Baker and Robert Rumely. Equidistribution of small points, rational dynamics, and potential theory. arxiv :math.nt/0407426.
- [Bro65] Hans Brolin. Invariant sets under iteration of rational functions. *Ark. Mat.*, 6 :103–144 (1965), 1965.
- [CL] Antoine Chambert-Loir. Mesures et équidistribution sur les espaces de Berkovich. arxiv :math.nt/0304023.
- [DPU96] Manfred Denker, Feliks Przytycki, and Mariusz Urbański. On the transfer operator for rational functions on the Riemann sphere. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 16(2) :255–266, 1996.
- [FLM83] Alexandre Freire, Artur Lopes, and Ricardo Mañé. An invariant measure for rational maps. *Bol. Soc. Brasil. Mat.*, 14(1) :45–62, 1983.
- [FRL] Charles Favre and Juan Rivera-Letelier. Equidistribution des points de petite hauteur. arxiv :math.nt/0407471.
- [FRL04] Charles Favre and Juan Rivera-Letelier. Théorème d'équidistribution de Brolin en dynamique  $p$ -adique. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 339(4) :271–276, 2004.
- [Hay99] Nicolai Haydn. Convergence of the transfer operator for rational maps. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 19(3) :657–669, 1999.
- [HS00] Marc Hindry and Joseph H. Silverman. *Diophantine geometry*, volume 201 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2000. An introduction.
- [Hsi00] Liang-Chung Hsia. Closure of periodic points over a non-Archimedean field. *J. London Math. Soc. (2)*, 62(3) :685–700, 2000.
- [HY83] M. Herman and J.-C. Yoccoz. Generalizations of some theorems of small divisors to non-Archimedean fields. In *Geometric dynamics (Rio de Janeiro, 1981)*, volume 1007 of *Lecture Notes in Math.*, pages 408–447. Springer, Berlin, 1983.
- [Lan62] Serge Lang. *Diophantine geometry*. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 11. Interscience Publishers (a division of John Wiley & Sons), New York-London, 1962.
- [Lju83] M. Ju. Ljubich. Entropy properties of rational endomorphisms of the Riemann sphere. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 3(3) :351–385, 1983.

- [Lub94] Jonathan Lubin. Non-Archimedean dynamical systems. *Compositio Math.*, 94(3) :321–346, 1994.
- [MJ95] P. Morton and Silverman J. Periodic points, multiplicities, and dynamical units. *J. Reine und Angewandte Math.*, 461(7) :81–122, 1995.
- [Pet03] Clayton Petsche. *The distribution of Galois orbits of low height*. PhD thesis, The University of Texas at Austin, 2003.
- [PS96] Mark Pollicott and Richard Sharp. Large deviations and the distribution of pre-images of rational maps. *Comm. Math. Phys.*, 181(3) :733–739, 1996.
- [RL03a] Juan Rivera-Letelier. Dynamique des fonctions rationnelles sur des corps locaux. *Astérisque*, (287) :xv, 147–230, 2003. Geometric methods in dynamics. II.
- [RL03b] Juan Rivera-Letelier. Espace hyperbolique  $p$ -adique et dynamique des fonctions rationnelles. *Compositio Math.*, 138(2) :199–231, 2003.
- [SUZ97] L. Szpiro, E. Ullmo, and S. Zhang. Équirépartition des petits points. *Invent. Math.*, 127(2) :337–347, 1997.
- [Ull02] Emmanuel Ullmo. Théorie ergodique et géométrie arithmétique. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002)*, pages 197–206, Beijing, 2002. Higher Ed. Press.

# Perspectives



Dans un travail en cours avec S. Boucksom et M. Jonsson, nous tentons de développer une théorie du potentiel sur les espaces de valuations associés à des anneaux de germes de fonctions holomorphes en dimension  $\geq 3$ . Plutôt que de tenter de mettre en place une théorie générale de ce type, nous avons préféré nous laisser guider par un problème plus concret, à savoir la Conjecture d'Ouverture de Demailly-Kollàr que nous avons décrite au Chapitre 3.

Nous allons rapidement indiquer quelles sont les différences principales entre l'approche en dimension 2 que nous avons explicitée dans ce mémoire, et celle que nous développons actuellement en dimension quelconque. Dans toute la suite, on fixe donc une fonction psh  $u$  définie au voisinage de 0 dans  $\mathbb{C}^n$ , et on supposera alternativement  $n = 2$  et  $n \geq 3$ .

On associe tout d'abord à  $u$  une fonction  $g_u$  sur l'espace  $\mathcal{V}_{\text{qm}}$  des valuations quasimonomiales centrées en 0. En toute dimension, on définit  $\nu(u)$  pour une valuation  $\nu \in \mathcal{V}_{\text{qm}}$  en terme de nombres de Kiselman du relevé de  $u$  à un éclatement de  $\mathbb{C}^n$  adéquat. Dans ce cadre, le Théorème 3.2 reste valide, et on obtient une fonction positive et croissante  $g_u$  sur  $\mathcal{V}_{\text{qm}}$ . L'objectif suivant consiste à contrôler les zones où  $g_u$  croît de manière importante.

Rappelons qu'en dimension 2, la structure de  $\mathcal{V}_{\text{qm}}$  est simple. Pour toute suite d'éclatements  $\pi : X \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ , et tout système de coordonnées  $x_1, x_2$  en un point  $p \in \pi^{-1}(0)$ , l'image des valuations monomiales  $\nu_{s_1, s_2}^{x_1, x_2}$  par  $\pi_*$  et convenablement normalisées décrit un segment réel dans  $\mathcal{V}_{\text{qm}}$ . Cet espace est réunion de ces segments, et on montre que ceux-ci ne forment pas de cycle, donc  $\mathcal{V}_{\text{qm}}$  est un arbre. En dimension  $n$ , la même construction nous fournit un ensemble de *plaques* dans  $\mathcal{V}_{\text{qm}}$ , chacune étant un simplexe réel de dimension  $n - 1$  muni d'une structure affine. Il est cependant très délicat de comprendre la structure des recollements entre ces plaques, et l'on manque de vision géométrique claire décrivant l'espace  $\mathcal{V}_{\text{qm}}$ .

En toute dimension, la fonction  $g_u$  est concave sur chaque plaque. En dimension 2, nous avons même vu que  $g_u$  possédait des propriétés fortes de concavité au sens des arbres, voir § 1.2.3. L'analogie en dimension supérieure est cependant inconnu.

Toujours en dimension 2, on a vu qu'il existait une théorie du potentiel générale sur tout arbre métrisé, et que l'on pouvait appliquer celle-ci à  $\mathcal{V}_{\text{qm}}$ . Cela nous fournit une mesure positive  $\Delta g_u$  qui nous permet de contrôler les zones de croissance de  $g_u$ . Plusieurs problèmes empêchent d'étendre cette stratégie à la dimension supérieure. On ne peut tout d'abord pas s'attendre à l'existence d'un opérateur linéaire du type de  $\Delta$  envoyant  $g_u$  sur une mesure positive. Sur chacune des plaques, on peut plutôt associer à  $g_u$  son *Monge-Ampère* (au sens réel), et ce dernier est un opérateur fondamentalement non-linéaire. Il n'est cependant pas clair comment « recoller » ces différents opérateurs de Monge-Ampère entre les différentes plaques. De plus, même si cela est possible, il est peu probable que le Monge-Ampère de  $g_u$  contrôle simplement la croissance de  $g_u$ .

Nous avons donc été amené à adopter une approche mélangeant de manière plus profonde géométrie des suites d'éclatements au dessus de  $(\mathbb{C}^n, 0)$ , et géométrie

de  $\mathcal{V}_{\text{qm}}$ . Il n'est pas possible ici de présenter notre théorie de manière complète, mais nous allons essayer d'en résumer les points forts.

**1.** A chaque suite d'éclatements  $\pi : X_\pi \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ , et à chaque fonction psh  $u$ , on associe le diviseur  $Z_\pi(u) = \sum \text{ord}_E(u \circ \pi)[E]$ , où  $E$  parcourt l'ensemble des diviseurs exceptionnels de  $\pi$  et  $\text{ord}_E$  désigne le nombre de Lelong en un point générique de  $E$ . Ce diviseur a des propriétés très spéciales de positivité au sein du groupe de Néron-Severi de  $X_\pi$ , qui garantissent la positivité des produits d'intersection que nous allons maintenant décrire.

**2.** Au lieu de regarder la fonction  $g_u$  définie sur  $\mathcal{V}_{\text{qm}}$ , on se penche sur la collection des  $Z(u) := \{Z_\pi(u)\}$  pour tous les  $\pi$ . En dimension  $n$ , on montre que si l'on se donne  $n$  fonctions psh  $u_1, \dots, u_n$ , les produits d'intersection  $Z_\pi(u_1) \cdot Z_\pi(u_2) \cdots Z_\pi(u_n)$  « convergent » (en un sens adéquat) vers un nombre positif (ou infini) lorsque  $\pi$  est une suite d'éclatements de plus en plus « longue ». Ceci nous fournit un nombre d'intersection  $Z(u_1) \cdot Z(u_2) \cdots Z(u_n)$  entre ces collections de diviseurs.

**3.** Sous certaines hypothèses de finitude, on associe alors à  $Z(u_1), \dots, Z(u_{n-1})$  une *mesure positive*  $\text{MA}(u_1, \dots, u_{n-1})$  dans la (complétion) de  $\mathcal{V}_{\text{qm}}$ , de telle sorte que

$$\int g_{u_n} d\text{MA}(u_1, \dots, u_{n-1}) = Z(u_1) \cdot Z(u_2) \cdots Z(u_n) ,$$

pour toute fonction psh  $u_n$ . Dans le cas  $n = 2$ , on retrouve exactement l'opérateur  $\Delta$ , au sens où  $\text{MA}(u_1) = \Delta g_{u_1}$ .

Notre sentiment est que cet « opérateur » de Monge-Ampère doit jouer un rôle fondamental dans la résolution de la conjecture d'ouverture. Bien évidemment, il reste encore de multiples obstacles à surmonter avant d'atteindre le but que nous nous sommes fixé. Il est en particulier peu clair comment arriver à relier la croissance de  $g_u$  à des mesures positives sur  $\mathcal{V}_{\text{qm}}$  provenant de Monge-Ampère au sens précédent.

Nous nous attendons aussi à voir intervenir cette théorie de l'intersection pour d'autres problèmes analogues à ceux développés au Chapitre 4 et 5 de ce mémoire.



# Liste des travaux présentés pour l'habilitation



- [FJ1] C. Favre et M. Jonsson. *The valuative tree*. Lecture Notes in Mathematics, 1853, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [FJ2] C. Favre et M. Jonsson. *Valuative analysis of plurisubharmonic functions*. À paraître dans *Inventiones Math.*, 2005
- [FJ3] C. Favre et M. Jonsson. *Valuations and multiplier ideals*. *J. Amer. Math. Soc.*, 18 (2005), no. 4, 655–684.
- [FJ4] C. Favre et M. Jonsson. *Eigenvaluations*. Prépublication 2004 téléchargeable à [www.arxiv.org](http://www.arxiv.org) (69 pages).
- [FRL1] C. Favre, et J. Rivera-Letelier. *Théorème d'équidistribution de Brolin en dynamique  $p$ -adique*. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 339 (2004), no. 4, 271–276.
- [FRL2] C. Favre, et J. Rivera-Letelier. *Équidistribution quantitative des points de petite hauteur sur la droite projective*. Prépublication 2004 à [www.arxiv.org](http://www.arxiv.org) (34 pages).



**Liste complète des publications par  
thème**



### Dynamique holomorphe à plusieurs variables

- [1] C. Favre. *Points périodiques d'applications birationnelles de  $\mathbf{P}^2$* . Ann. Inst. Fourier, 48 (1998), no. 4, 999-1023.
- [2] C. Favre. *Classification of 2-dimensional contracting rigid germs and Kato surfaces. I*. J. Math. Pures Appl. (9) 79 (2000), no. 5, 475–514.
- [3] C. Favre. *Multiplicity of holomorphic functions*. Math. Ann., 316 (2000), no. 2, 355-378.
- [4] J. Diller et C. Favre. *Dynamics of bimeromorphic maps of surfaces*. Amer. J. Math., 123 (2001), no. 6, 1135–1169.
- [5] C. Favre et V. Guedj. *Dynamique des applications rationnelles des espaces multiprojectifs*. Indiana Univ. Math. J. 50 (2001), no. 2, 881–934.
- [6] C. Favre et M. Jonsson. *Brolin's theorem for curves in two complex dimensions*. Ann. Inst. Fourier 53 (2003), 1461–1501.
- [7] C. Favre. *Equidistribution problems in holomorphic dynamics in  $\mathbb{P}^2$* . Dynamical systems. Part II, Publ. Cent. Ric. Mat. Ennio Giorgi, 79–111, Scuola Norm. Sup. di Pisa, 2003.
- [8] C. Favre. *Les applications monomiales en deux dimensions*. Michigan Math. J., 51 (2003), no. 3, 467–475.
- [9] S. Cantat et C. Favre. *Symétries birationnelles des surfaces feuilletées*. J. Reine Angew. Math., 561 (2003), 199–235.
- [10] S. Cantat et C. Favre. *Corrigendum à l'article : Symétries birationnelles des surfaces feuilletées*. J. Reine Angew. Math., 582 (2005), 229-231.

### Analyse des singularités de fonctions psh

- [11] C. Favre. *Note on pull-back and Lelong number of currents*. Bull. Soc. Math. France, 127 (1999), no. 3, 445-458.
- [12] C. Favre et M. Jonsson. *Valuative analysis of plurisubharmonic functions*. A paraître dans Inventiones Math., 2005.

- [13] C. Favre et M. Jonsson. *Valuations and multiplier ideals*. J. Amer. Math. Soc., 18 (2005), no. 4, 655–684.

### Espaces de valuations

- [14] C. Favre et M. Jonsson. *The valuative tree*. Lecture Notes in Mathematics, 1853, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [15] C. Favre et M. Jonsson. *Eigenvaluations*. Prépublication 2004 téléchargeable à [www.arxiv.org](http://www.arxiv.org) (69 pages).

### Dynamique $p$ -adique

- [16] C. Favre, et J. Rivera-Letelier. *Théorème d'équidistribution de Brolin en dynamique  $p$ -adique*. C. R. Math. Acad. Sci. Paris 339 (2004), no. 4, 271–276.
- [17] C. Favre, et J. Rivera-Letelier. *Equidistribution quantitative des points de petite hauteur sur la droite projective*. Prépublication 2004 à [www.arxiv.org](http://www.arxiv.org) (34 pages).