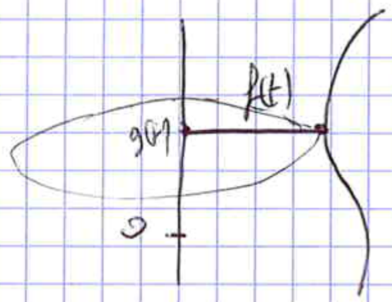
1/

$\boxed{\text{Exo 1}}$

① $d\varphi = \begin{bmatrix} f'\cos\theta & -f\sin\theta \\ f'\sin\theta & f\cos\theta \\ g' & 0 \end{bmatrix}$

$\|.\|^2 = (f')^2 + (g')^2 \qquad \|.\|^2 = f^2$



② $g_{can} = \varphi^*(dx^2 + dy^2 + dz^2)$

③ $\underbrace{s \mapsto (t(s), \theta(s))}_{c} \to (f(t)\cos\theta, f(t)\sin\theta, g(t))$

$\ddot{c}(s) \perp T\Sigma.$

ie $\begin{cases} (g'g'' + f'f'')\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - (ff')\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 + \left[(f')^2 + (g')^2\right]\frac{d^2t}{ds^2} = 0 \\ 2ff'\frac{dt}{ds}\frac{d\theta}{ds} + f^2\frac{d^2\theta}{ds^2} = 0. \end{cases}$

④ $s \mapsto (t(s), \theta_0)$ (2) est vérifié.

(1) $\frac{d^2t}{ds^2} = \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \left[\frac{g'g'' + f'f''}{(f')^2 + (g')^2}\right].$

$s \mapsto (t_0, \theta(s)) \qquad \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 ff' = 0 \qquad$ or $\theta' \neq 0.$

soit $f(t_0) = 0$ soit $f'(t_0) = 0.$

⑤ $-|c'|^2 = $ cst car $\nabla_{\dot c}\dot c = 0$

or $|c'|^2 = [(f')^2 + (g')^2]\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + f^2\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2$

$-f\cos\beta = f\,\dot c \cdot \begin{pmatrix} f\sin\theta \\ f\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \Big/ |\dot c|\,|\cdot| = f^2\frac{d\theta}{ds}.$

$\frac{d}{ds}(f\cos\beta) = 2ff'\frac{d\theta}{ds} + f^2\frac{d^2\theta}{ds^2} = 0.$

(5) unique parallèle qui est une géodésique est Θ. Σ est complète.

γ géodésique $\neq 0$ $\neq$ méridien. on note $r\cos\beta = c = c(\gamma)$.

On note $p_0 = (r_0, \theta_0)$ le pt pour lequel r est minimal. On

~~Par symétrie~~ paramètre γ de telle sorte que $\gamma(0) = p_0$.

- Comme la symétrie orthogonale σ % le plan contenant p_0 et l'axe des z est une isométrie de la surface : On suppose $\theta'(0) > 0$.

$$\sigma\gamma(s) = \gamma(-s)$$

- il faut donc montrer $\lim_{s\to\infty} \Theta(s) = +\infty$. On a $\theta' > 0$ sinon γ tangente à un méridien.

de $|\dot{c}|^2 = \dots$ on tire

$$\Theta(s) - \theta(0) = \int_{\gamma}^{s} \frac{1}{f} \sqrt{(f')^2 + (g')^2}\, dt = \int_{\gamma}^{\infty} \frac{\sqrt{1+4r^2}}{r}\, dr$$

$\int$ le long du chemin γ.

Or l'éq. de Clairaut donne $r(s)\cos\beta(s) = \text{cst}$

donc $r \to \infty$.

Contradiction $\frac{\sqrt{1+4r^2}}{r} \to 2$.

3/

Exo 2

① (M,g) complète   c ~~géodésique~~ chemin

- Si c est de longueur finie et $t_n \nearrow +\infty$

$d(c(t_n), c(t_m)) \to 0 \Rightarrow c(t_n)$ cvg. donc c pas divergent

② $p \in M$ $v \in T_p M$ si (M,g) pas complet alors

$T = \sup \{t, \exp_p(tv)$ bien défini$\} < +\infty$

comme $L(\exp_p(tv)\ 0 \leq t \leq T) = T$ cette géodésique n'est

pas divergente. Donc $\exists t_n \nearrow T$ $\exp_p(t_n v) \to x \in M$.

Dans un voisinage de x : $\exp_y$ est def. sur $B(0,\varepsilon)$ $\varepsilon>0$ fixe.

Exo 3

+ exemple non-homogène : variété telle que $K<0$ en p et $K>0$ en q.

+ $\varphi : O(n) \to G(k,n)$

$(e_1 \dots e_n) \mapsto \mathrm{Vect}\, \varphi(e_i)$.

$O(n-k) \times O(k) \subseteq O(n)$

$$g \in \begin{cases} g(e_j) \in \mathrm{Vect}(e_i,\ i \geq k+1) & \forall j \geq k+1 \\ g(e_j) \in \mathrm{Vect}(e_i,\ i \leq k) & \forall j \leq k \end{cases}$$

Si $g \sim g'$ i.e. $g(g')^{-1} \in O(n-k)\times O(k)$ alors $\varphi(g) = \varphi(g')$.

Récipr. $\varphi(g) = \varphi(g')$ ssi $g^{-1}g' \in O(n-k) \times O(k)$

donc φ bijection $O(n) / O(n-k) \times O(k) \longrightarrow G(k,n)$

On munit $O(n)$ métrique bi-invariante

$\Rightarrow G(k,n)$ métrique naturelle

$O(n)$ agit transitivement par isométrie

- $\exp_p : T_pM \to M$

$v \in T_pM$ fixé $I = \{ t\ ,\ \exp_p(tv)$ est bien défini $\}$.

- I ouvert $t_0 \in I$ fait général

- I fermé $t_n \to t_\infty$ f isométrie $f(p) = \exp_p(t_n v)$.

~~dans un~~ Comme f préserve les géodésiques, la géodésique $\exp_p(tv)$ se prolonge en $t_n v$ sur un intervalle de longueur fixe.

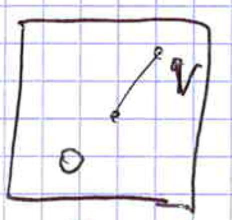
Exo 4

$\Omega = \{ p,\ tq\ f(p) = p$ et $df(p) = id \}$

Ω est fermé !

Ω est ouvert. $p_0 \in \Omega$ $q \in \exp_p(B(0,\varepsilon))$

$q = \exp_p(v)$



$T_{p_0}M$

$t \mapsto f \exp_p(tv)$ géodésique partant de p et à la vitesse v donc $f \exp_p(tv) = \exp_p(tv)$.

Exo 5

- $T_e O(n) = \{ {}^tH + H = 0 \}$ $-Tr(X^2) = Tr({}^tHH) > 0$

- $L_x R_y = R_y L_x$ $x \overset{\phi}{\mapsto} y^{-1} x y$

- $I(x) = x^{-1}$ isométrie $I L_x = R_{x^{-1}} I$ et $dI_{id} \cdot v = -v$.

- $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) = \{ tr A = 0 \}$ $\exp \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$ toujours diagonalisable

$SL(2,\mathbb{R}) = \{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \}$

mais pas $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

3/

Exo6

① $\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x' & y' \\ 0 & 1 & z' \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+x' & y+y'+xz' \\ 0 & 1 & z+z' \\ & & 1 \end{pmatrix}$

$dL_M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad dR_M = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ z & 1 & \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

invariant à gauche $\Leftrightarrow$ $dL_M \cdot X(e) = X(M)$

$[X_1, X_2] = X_3 \qquad [X_1, X_3] = [X_2\ X_3] = 0$

L_M isométrie car X_i inv. à gauche

$R_M X_1(e) = X_1 + z X_3 \qquad R_M X_2(e) = X_2(M) - x X_3(M)$

$(D_X Y, Z) = X \underbrace{g(Y,Z) + Y g(XZ) - Z g(XY)}_{=0} + g([XY]Z) + g[ZX]Y - g([YZ]X)$

$$\begin{cases} D_{X_1} X_1 = 0 \quad D_{X_2} X_2 = 0 \quad D_{X_3} X_3 = 0 \\ D_{X_1} X_2 = \frac{X_3}{2} \qquad D_{X_2} X_1 = -\frac{X_3}{2} \\ D_{X_1} X_3 = D_{X_3} X_1 = -\frac{X_2}{2} \\ D_{X_2} X_3 = D_{X_3} X_2 = \frac{X_1}{2}. \end{cases}$$

$c(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad \dot{c}(t) = \dot{x} X_1 + \dot{z} X_2 + (\dot{y} - x\dot{z}) X_3$.

$0 = D_{\dot c} \dot{c} = \ddot{x} X_1 + \ddot{z} X_2 + (\ddot{y} - x\ddot{z} - \dot{x}\dot{z}) X_3 + \dot{x}\left[(\dot{y} - x\dot{z}) D_{X_3} X_1 + \dot{z} D_{X_2} X_1\right] + \dot{z}\left[\dot{x} D_{X_1} X_2 + (\dot{y} - x\dot{z}) D_{X_3} X_2\right]$
$+ (\dot{y} - x\dot{z})\left[\dot{x} D_{X_1} X_3 + \dot{z} D_{X_2} X_3\right]$

$$\begin{cases} \ddot{x} + (\dot{y} - x\dot{z})\dot{z} = 0 \\ \ddot{z} - \dot{x}(\dot{y} - x\dot{z}) = 0 \\ \ddot{y} - \dot{x}\dot{z} - x\ddot{z} = 0 \end{cases} \qquad \rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -c\dot{z} \\ \ddot{z} = c\dot{x} \\ \dot{y} - x\dot{z} = \text{cte} = c \end{cases}$$

géodésique $z = z_0 \quad x = x_0 \quad \ddot{y} = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & at+b \\ 0 & 1 & z_0 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$ n'est pas un sous-groupe.

$H_0 = \ker\left(\rho : \mathcal{H} \to (\mathbb{R}^2, +)\quad \rho(xyz) = (xy)\right)$.

→ les plans $\{ y = y_0 \}$ sont isométriques à $(\mathbb{R}^2, \text{can})$

$$\rightarrow \left|\begin{array}{l} x = a\cos(ct) + b\sin(ct) + x_0 \\ z = b\cos(ct) - a\sin(ct) + z_0 \\ y = ct + \int x\dot{z}\,dt + y_0 \end{array}\right.$$

<u>Exo 7</u> voir GHL. $\quad V_\theta = r\frac{\partial}{\partial\theta}$

- $V_\theta(0) = 0 \quad V'_\theta(0) = D_{\frac{\partial}{\partial r}}\left(r\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\Big|_0 = \frac{\partial}{\partial\theta} \quad V''_\theta(0) = -R\left(\frac{\partial}{\partial r}, r\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\frac{\partial}{\partial r} = 0$.

  $V'''_\theta(0) = D_{\frac{\partial}{\partial r}}\left[-R\left(\frac{\partial}{\partial r}, r\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\frac{\partial}{\partial r}\right]\Big|_0 = -R\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial\theta}\right)\frac{\partial}{\partial r}$

- $g = dr^2 + r^2 d\theta^2 + O(r^4)$.

  $|V_\theta(r)|^2 = \left|rV'_\theta(0) + \frac{r^3}{6}V'''_\theta(0) + O(r^4)\right|^2$

  $= r^2 - \frac{r^4}{3}K(\pi) + O(r^5)$

- on calcule $\exp_p^* v_g\,(e_1, Y_2 \cdots Y_n) = \sqrt{\det g(Y_i, Y_j)}$
  en re_1

  $v_{eucl}(e_1, Y_2 - Y_n) = r^{n-1} \qquad v_{eucl} = r^{n-1}\,dr\,dv_{can}$

4/

$$Y_i = r e_i - \frac{r^3}{6} R(e_1, e_i) e_1 + O(r^4)$$

$$\det(Y_i, Y_j) = r^{2n-2} \det\left(e_i - \frac{r^2}{6} R(e_1,e_i)e_1 \ldots, e_j - \frac{r^2}{6} R(e_1,e_j)e_1 \ldots\right)$$

$$= r^{2n-2}\left[1 + \mathrm{Tr}\left(-\frac{r^2}{6} R(e_1,e_i)e_1, e_j\right) + O(r^3)\right]$$

⚠ facteur 2 en position $(1,1)$

$$= r^{2n-2}\left[1 - \frac{r^2}{3} \mathrm{Ric}(e_1,e_1) + O(r^3)\right]$$

$$\exp_p^* v_g = v_{eucl}\left[1 - \frac{r^2}{6} \mathrm{Ric}(e_1,e_1) + O(r^3)\right]$$

- Calcul du volume

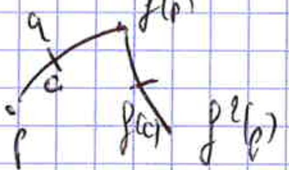
$$\mathrm{Vol}(B(0,r)) = \int_{B(0,r)} 1 - \frac{1}{6}\mathrm{Ric}(v,v) \, d\lambda(v)$$

$$= \mathrm{Vol}_{eucl}\, B(0,r) - \frac{1}{n(n+2)} \mathrm{vol}(S^{n-1})\, r^{n+2} s(p) + O(r^{n+3}).$$

q quadratique $\int_{B(0,r)} q(v)\, d\lambda(v) = \int_{B(0,r)} {}^t v \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} v \, d\lambda = \frac{1}{n} \mathrm{vol}(S^{n-1})\, \mathrm{Tr}(q) \times \frac{r^{n+2}}{n+2}$

diag. dans une BON

<u>Exo 8</u>

- transport parallèle est une isométrie
- 

q milieu de $(p f(p))$ $\quad f(q)$ milieu de $f(p)\, f^2(p)$

$q f(p)$ puis $f(p) f(q)$ minimise $d(q, f(q))$

$\Rightarrow df_p\, c'(0) =$ transporté de $c'(0)$ le long de c.

- $A \in O(n)$ $\det A > 0$ $\Rightarrow \exists v \quad Av = v$.

$$\cancel{\frac{d^2E}{ds^2} = \frac{d^2}{ds^2}\int_0^1 d\,\exp_{c(t)}}$$

$$\frac{1}{2}\frac{dE}{ds} = \left\langle \frac{\partial\Gamma}{\partial s}, \frac{\partial\Gamma}{\partial t}\right\rangle(1) - \left\langle \frac{\partial\Gamma}{\partial s}, \frac{\partial\Gamma}{\partial t}\right\rangle(0) - \int_0^1 \left\langle \frac{\partial\Gamma}{\partial s}, D_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial\Gamma}{\partial t}\right\rangle dt.$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2E}{ds^2}\Big|_0 = \underbrace{\left\langle D_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial\Gamma}{\partial s}, \frac{\partial\Gamma}{\partial t}\right\rangle(1)}_{=0 \text{ car } \Gamma(s,1) \text{ géod.}} + \left\langle \frac{\partial\Gamma}{\partial s}, D_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial\Gamma}{\partial t}\right\rangle(1)$$

$$+ \left\langle \frac{\partial\Gamma}{\partial s}, D_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial\Gamma}{\partial t}\right\rangle(0) - \left\langle \underbrace{D_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial\Gamma}{\partial s}}_{=0}, \frac{\partial\Gamma}{\partial t}\right\rangle(0)$$

$$- \int_0^1 \left\langle \underbrace{D_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial\Gamma}{\partial s}}_{=0}, \underbrace{D_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial\Gamma}{\partial t}}_{=0}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial\Gamma}{\partial s}, D_{\frac{\partial}{\partial s}} D_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial\Gamma}{\partial t}\right\rangle$$

$$D_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial\Gamma}{\partial t} = D_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial\Gamma}{\partial s}(1) \quad \text{or } \frac{\partial\Gamma}{\partial s} = e_1 \quad \text{donc ce terme} = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2E}{ds^2}\Big|_0 = -\int_0^1 \left\langle e_1, R\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial t}, \frac{\partial\Gamma}{\partial s}\right)\frac{\partial\Gamma}{\partial t}\right\rangle dt \quad < 0.$$

donc il existe c_s tq $E(c_s) < E(c_0)$ et $L(c_s) < L(c_0)$

Mais $f(c_0(0)) = c_0(1)$ contradiction.