TD de Géométrie Différentielle du Septembre 2009
UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT
14 OCTOBRE 2009

Connexion

Exercice 1
Soit ∇ une connexion sur le fibré tangent d'une variété M. Montrer qu'il existe une unique famille de connexions $\nabla_{p,q}$ sur le fibré des (p,q)-tenseurs $T^p_q M = TM^{\otimes p} \otimes TM^{*\otimes q}$ telle que $\nabla(T \otimes S) = \nabla T \otimes S + T \otimes \nabla S$, et $\nabla[c(T)] = c(\nabla T)$ pour toute contraction.

Exercice 2
Soit ∇ une connexion sur le fibré tangent d'une variété M. Soit T une section de $TM \otimes TM^* = \mathrm{End}(M)$. Calculer $(\nabla_X T)(Y)$ où X et Y sont deux champs de vecteurs donnés. En termes de quoi dépend la valeur $(\nabla_X T)(Y)$ en un point $p \in M$. Calculer $\mathrm{tr}(\nabla_X T)$ dans le cas général puis lorsque $T = f\,\mathrm{id}$ avec f une fonction lisse.

Exercice 3
Soit ∇ une connexion sur le fibré tangent d'une variété M.

- Montrer que $T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$ est un champ de $(0,2)$-tenseur antisymétrique (appelé la torsion de ∇).
- Montrer que $T = 0$ ssi pour tout point $p \in M$ il existe des coordonnées $(x_1, ..., x_n)$ au voisinage de p telles que $\nabla_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j} = 0$ au point p.

  On pourra considérer l'application suivante: $\Phi(t_1, ..., t_n)$ est le point construit en parcourant pendant le temps t_1 la géodésique partant de p avec la direction ∂_{x_1}; puis en parcourant pendant le temps t_2 la géodésique partant de $\Phi(t_1, 0)$ avec la direction le transport parallèle de ∂_{x_2} en $\Phi(t_1, 0)$, etc.
- On suppose que ∇ est la connection de Levi-Civita d'une métrique riemannienne et que sa courbure s'annulle identiquement.
  - Montrer que pour tout vecteur $v \in T_p M$, il existe un champ de vecteurs X défini dans un voisinage de p tel que $\nabla X = 0$ et $X(p) = v$.
  - Montrer que (M, g) est localement isométrique à l'espace euclidien.

Connexion de Levi-Civita

Exercice 4

- Soit g et g' deux métriques conformes sur une variété M donnée, c'est-à-dire telle que $g' = e^{2f} g$ pour une fonction f lisse sur M. Montrer que la connexion de Levi-Civita ∇' de g' s'exprime en termes de la connexion ∇ de g sous la forme:
$$\nabla'_X Y = \nabla_X Y + df(X)\, Y + df(Y)\, X - g(X,Y)\, \mathrm{grad}(f) \ ,$$
où $\mathrm{grad}(f)$ dénote le gradient de f ie l'unique vecteur tel que l'on ait $g(\mathrm{grad}(f), Z) = df(Z)$ pour tout champ Z.
- Soit (M,g) et (M',g') deux variétés riemanniennes. Calculer la connexion de Levi-Civita de la métrique produit.

Exercice 5

- On se place sur la sphère S^2 munie de sa métrique canonique. Calculer $\nabla_{\partial_\theta}\partial_\theta$, $\nabla_{\partial_\varphi}\partial_\varphi$, $\nabla_{\partial_\varphi}\partial_\theta$ dans les coordonnées polaires $(\varphi,\theta) \mapsto (\cos\varphi\cos\theta, \cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi)$.
- On se place maintenant sur le tore T^2. Calculer la connexion de Levi-Civita de la métrique produit $g_{\mathrm{can}} \times g_{\mathrm{can}}$ sur $T^2 = S^1 \times S^1$. On plonge $T^2 \to \mathbb{R}^3$ par l'application $F : (\theta,\varphi) \mapsto ((2+\cos\theta)\cos\varphi, (2+\cos\theta)\sin\varphi, \sin\theta)$. Calculer la connexion de Levi-Civita de la métrique $F^* g_{\mathrm{can}}$.
- Calculer la courbure des surfaces précédentes. En déduire la courbure de la sphère S^2 et de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^2$. Puis calculer la courbure sectionnelle de S^n et $\mathbb{H}^n$.

Exercice 6

Soit $N \subset (M,g)$ une sous-variété d'une variété riemannienne. On munit N de la métrique induite. On note ∇^M et ∇^N les connexions de Levi-Civita de ces métriques.

- Soit X, Y deux champs de vecteurs sur M. Montrer que $\nabla^N_X Y$ est la composante tangentielle à N de $\nabla^M_X Y$.
- On suppose que N est une hypersurface de M et que l'on peut définir une normale unitaire $\vec{n}(p)$ à N pour tout point $p \in N$. Montrer que $\nabla^M_X Y - \nabla^N_X Y = \mathrm{II}(X,Y)\,\vec{n}$ où $\mathrm{II}(.,.)$ est une forme bilinéaire symétrique sur TN.
- Montrer que $\mathrm{II}(X,Y) = -\langle X, \nabla_Y \vec{n}\rangle$
- On note $X \wedge Y$ le 2-plan engendré par X et Y. Calculer la différence des courbures sectionnelles $K^M(X\wedge Y) - K^N(X \wedge Y)$ en termes de $\mathrm{II}(.,.)$.
- On suppose que $M = \mathbb{R}^3$ et N est une surface. Soit $c : [0,1] \to \Sigma$ une courbe tracée sur la surface et $t \mapsto V(t) \in T_{c(t)}\Sigma$ un champ de vecteur défini le long de c. Montrer que V est parallèle pour la connexion de Levi-Civita ssi $\frac{dV}{dt}$ est perpendiculaire à $T_{c(t)}\Sigma$.

- Montrer que $K^N(X \wedge Y)$ s'identifie à la courbure de Gauss ie au déterminant de l'application de Gauss.
- Montrer que le long des grands cercles de la sphère S^2 paramétré par la longueur d'arc le champ de vitesse $\frac{dc}{dt}$ est un champ parallèle.

Exercice 7

Soit (M, g) une variété riemannienne. Un champ de Killing est un champ de vecteur X pour lequel $L_X g = 0$.

- Montrer que X est un champ de Killing ssi $g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X) = 0$.
- Montrer que X est un champ de Killing ssi pour tout temps t assez petit, le flot $\phi_{X,t}$ est une isométrie.
- Montrer que le crochet de Lie de deux champs de Killing est de Killing
- Montrer que sur la sphère $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ munie de sa métrique canonique, les champs $x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i}$ sont de Killing.

<u>Courbure</u>

Exercice 8 (Identité de Bianchi différentielle)

Soit (M, g) une variété riemannienne R son tenseur de courbure (vu comme $(0, 4)$ tenseur), et ∇ sa connexion de Levi-Civita: ∇R est un $(0, 5)$-tenseur et on note $\nabla_X R(.) = \nabla R(X, .)$.

- Pour tout champ V, W, X, Y, Z montrer que l'on a

  $$\nabla R(V, W, X, Y, Z) + \nabla R(W, X, V, Y, Z) + \nabla R(X, V, W, Y, Z) = 0$$

  Indication: se placer en un point p et choisir des coordonnées x_i dans lesquels $\nabla_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j}(p) = 0$.
- Montrer que $\delta(\mathrm{Ric}) + \frac{1}{2} d(\mathrm{Scal}) = 0$ où δ est l'application linéaire de l'espace des $(0, 2)$ tenseurs symétriques vers les 1-formes donnée par $\delta(T) = -\mathrm{Tr}_{12}(\nabla T)$ (ici ∇T est vu comme $(0, 2)$-tenseur et Tr_{12} est la trace prise sur les deux premières composantes).
- En déduire que si $\mathrm{Ric} = f \times g$ pour une fonction lisse f, et $\dim(M) \geq 3$ alors f est constante.
- On suppose que $\dim M \geq 3$ et que pour tout point $p \in M$ il existe une constante $K(p)$ telle que la courbure sectionnelle de tout 2-plan $\sigma \subset T_p M$ est égale à $K(p, \sigma) = K(p)$.
  - On introduit le tenseur $R'(W, Z, X, Y) = g(W, X)g(Z, Y) - g(Z, X)g(W, Y)$. Montrer que $R = K R'$.
  - En utilisant l'identité de Bianchi différentielle montrer que

$$\begin{aligned} 0 = T \cdot K\,(g(W, X)g(Z, Y) - g(Z, X)g(W, Y)) &+ \\ X \cdot K\,(g(W, Y)g(Z, T) - g(Z, Y)g(W, T)) &+ \\ Y \cdot K\,(g(W, T)g(Z, X) - g(Z, T)g(W, X)) & \end{aligned}$$

– En déduire que $X \cdot K = 0$ pour tout champ X, ie M est à courbure sectionnelle constante.

Exercice 9 (Métrique conforme dans $\mathbb{R}^n$)

Soit F une fonction positive sur $\mathbb{R}^n$, et $g = \frac{1}{F^2}\sum dx_i^2$. On notera $f = \log F$, et $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

- Calculer les symboles de Cristoffel $\sum \Gamma_{ij}^k \partial_k = \nabla_{\partial_i}\partial_j$:

$$\begin{cases} \Gamma_{ii}^i = -\partial_i f & \\ \Gamma_{jj}^i = \partial_i f & i \neq j \\ \Gamma_{ij}^i = \Gamma_{ji}^i = -\partial_j f & i \neq j \\ \Gamma_{jk}^i = 0 & i \neq j \neq k \end{cases}$$

- Calculer la courbure $R(\partial_j, \partial_k)\partial_l = \sum R_{jkl}^i \partial_i$:

$$\begin{cases} R_{ijk}^l = 0 & i \neq j \neq k \neq l \\ R_{ijk}^i = -\partial_{jk}^2 f - \partial_j f \times \partial_k f & i \neq j \neq k \\ R_{iji}^j = \partial_i^2 f + \partial_j^2 f - \sum_{k \neq i,j} |\partial_k f|^2 & i \neq j \end{cases}$$

- En dimension 2, montrer que la courbure sectionnelle est égale à $-F^2 \Delta f$ avec $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$.
- Montrer qu'une métrique est à courbure constante K ssi

$$g(R(X,Y)Z,T) = -K\left[g(X,T)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,T)\right]$$

- En déduire que g est à courbure constante ssi $F = \sum(a_i + b_i x_i + c x_i^2)$ avec $K = \sum(4ca_i - b_i^2)$.
- Calculer la courbure de la sphère ($2F = 1 + |x|^2$) et de l'espace hyperbolique ($2F = 1 - |x|^2$).

Exercice 10

Soit G un groupe de Lie, ie une variété différentiable munie d'une structure de groupe telle que $(x,y) \mapsto xy^{-1}$ soit lisse. On note $R_x(y) = yx$ la multiplication à droite, $L_x(y) = xy$ la multiplication à gauche. Un champ de vecteurs X est invariant à gauche si $L_x^* X = X$ pour tout x. On suppose donné une métrique riemannienne g sur G telle que $L_x^* g = g$ et $R_x^* g = g$ pour tout x.

- Soit X, Y, Z trois champs de vecteurs invariant à gauche. Montrer que $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y]$.
- Montrer que $R(X,Y)Z = \frac{1}{4}[[X,Y],Z]$.
- Montrer que si X et Y sont orthogonaux, la courbure sectionnelle $K(\sigma)$ du plan engendré par X et Y est donné par

$$K(\sigma) = \frac{1}{4}\|[X,Y]\|$$

.

Exercice 11

On suppose que (M, g) est une variété riemannienne orientée de dimension 3. On se propose de montrer que en un point donné la courbure de Ricci et la métrique détermine la courbure sectionnelle. Dans tout l'exercice on fixe un point $p \in M$.

- En utilisant la première identité de Bianchi montrer que $(X, Y, Z, T) \mapsto g(R(X, Y)Z, T)$ induit une forme bilinéaire symétrique sur $\beta : \Lambda^2 TM \times \Lambda^2 TM \to \mathbb{R}$.
- Soit e_1, e_2, e_3 une base de T_pM et e_i^* sa base duale. On note g_* la métrique naturelle sur T^*M. Montrer que les e_i forment une base orthonormale ssi les e_i^* forment une base orthonormale.
- On munit T_pM d'une orientation et on note dV_g la forme volume canonique. Montrer que la forme bilinéaire $\gamma : \Lambda^2 T_p^*M \times T_p^*M \to \mathbb{R}$ déterminée par $\alpha \wedge X = \gamma(\alpha, X) dV_g$ est non-dégénérée.
- On suppose que e_i est une base orthonormée directe. Expliciter l'isomorphisme $\Lambda^2 TM \simeq T^*M$ induit par γ.
- On transporte la forme β par l'isomorphisme $\Lambda^2 TM \simeq T^*M$ induit par γ. Montrer que la forme induite $\beta^* : T^*M_p \times T^*M_p \to \mathbb{R}$ se diagonalise dans une base orthonormale.
- Conclure que la donnée des $g(e_i, e_j)$ et $\mathrm{Ric}_p(e_k, e_k)$ détermine $\beta(e_i \wedge e_j, e_i \wedge e_j)$.