TD de Géométrie Différentielle
UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT
7 OCTOBRE 2009

Orientation

Exercice 1

- Soit M une variété différentiable. Considérons pour chaque $p \in M$ l'ensemble des orientations ε_p en T_pM, et notons $\tilde{M}$ l'ensemble de tous les ε_p. Montrer que $\tilde{M}$ possède une structure différentiable unique, telle que la projection canonique $\pi : \tilde{M} \to M$, $\pi(\varepsilon_p) = p$ soit un difféomorphisme local.
- Lorsque M est connexe, montrer que M est non orientable ssi $\tilde{M}$ est connexe.
- Montrer que S^n est orientable. En utilisant la projection canonique $\pi : S^n \to \mathbb{R}P^n$, et en remarquant que $\pi \circ (-\mathrm{id}) = \pi$, montrer que $\mathbb{R}P^n$ est orientable ssi n est impair.
- Montrer que $\mathbb{R}^2$ quotienté par le groupe engendré par $(x, y) \mapsto (x, y+1)$ et $(x + 1, 1 - y)$ est une surface K (c'est la bouteille de Klein). Montrer qu'il existe une submersion $\pi : (S^1)^2 \to K$ dont chaque fibre est de cardinalité 2. En déduire que K n'est pas orientable.
- Montrer que la bande de Möbius n'est pas orientable
- Montrer que le produit $M \times N$ est orientable ssi M et N sont orientables.
- Pour toute variété M, montrer que la variété TM est orientable.
- Montrer que tout groupe de Lie est orientable.

Exercice 2

Soit ξ une distribution d'hyperplan dans TM, c'est-à-dire le choix pour tout $p \in M$ d'un hyperplan $\xi(p) \subset T_pM$ tel que $p \to \xi(p)$ soit une application lisse.

- Montrer que localement en tout point, il existe une 1-forme ω telle que $\ker \omega(p) = \xi(p)$ pour tout p. Cette forme est-elle unique?
- On suppose que M est orientée, et que chaque plan $\xi(p)$ est orientée de manière continue. Montrer qu'il existe alors une 1-forme globale ω sur M telle que $\ker \omega(p) = \xi(p)$ pour tout p.
- On fixe une 1-forme ω définissant ξ au sens où $\ker \omega(p) = \xi(p)$ pour tout p. Montrer que si ξ est involutive alors $\omega \wedge d\omega = 0$.
- Montrer que pour toute 1-forme ω telle que $\omega(p) \neq 0$, et $\omega \wedge d\omega = 0$, il existe une 1-forme θ au voisinage de p telle que $\omega = \theta \wedge \omega$. Conclure que la distribution $\xi(p) = \ker \omega(p)$ est involutive.

Intégration

Exercice 3

- On considère la 2-forme extérieure de $\mathbb{R}^3$: $\omega = x\,dy\wedge dz$. En utilisant les coordonnées sphériques
$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$
calculer $\int_{S^2} \omega|S^2$ où S^2 est muni de son orientation canonique. Intepréter ce résultat en appliquant la formule de Stokes.
- On considère la 2-forme sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ définie par:
$$\omega = \frac{x\,dy\wedge dz - y\,dx\wedge dz + z\,dx\wedge dy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$
Montrer que ω est fermée. Calculer $\int_{S^2(r)} i_r^*\omega$ où i_r désigne le plongement de la sphère de rayon r dans $\mathbb{R}^3$. La forme ω est-elle exacte?

Exercice 4 (théorème de Moser)

Une forme volume sur une variété de dimension n est une n-forme non nulle en tout point. Soient ω et ψ deux formes volumes sur une variété compacte orientée M. On suppose que $\int_X \omega = \int_X \psi$. Pour tout $0 \leq s \leq 1$, on note $\omega_s = (1-s)\omega + s\psi$.

- Montrer qu'il existe une $n-1$-forme η telle que $\omega - \psi = \eta$.
- Montrer que pour tout s, il existe un champs de vecteurs ξ_s tel que $\xi_s \lrcorner \omega_s = -\eta$. On note φ_s son flot au temps 1.
- En calculant $\frac{d}{ds}\varphi_s^*\omega_s$, montrer qu'il existe un difféo $\varphi : M \to M$ tel que $\varphi^*\omega = \psi$.

Cohomologie

Exercice 5

- Donner la dimension de $H^p(S^1)$ pour tout p.
- Donner un isomorphisme de $H^n(S^n)$ sur $\mathbb{R}$ pour tout n.
- Soit $n \geq 2$. On fixe deux points $p_0, p_1 \in S^n$, et on pose $S^n = U_0 \cup U_1$ avec $U_\varepsilon = S^n \setminus \{p_\varepsilon\}$.
  - Donner la dimension de $H^p(U_\varepsilon)$.
  - Montrer que $U_0 \cap U_1$ est difféomorphe à $]0,1[\times S^{n-1}$. En utilisant le lemme d'homotopie montrer que $H^p(U_0\cap U_1) = H^p(S^{n-1})$ pour tout p.
  - Montrer par récurrence sur n que $H^p(S^n) = 0$ pour tout $0 < p < n$. Pour celà, on prendra ω une p-forme fermée sur S^n, et on regardera $\omega|U_\varepsilon$ pour $\varepsilon = 0, 1$.

Exercice 6

On fixe $n \geq 1$, et on note T^n le tore de dimension n, vu comme quotient $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, et $\pi : \mathbb{R}^n \to T^n$ la projection canonique. Pour tout $x, y \in T^n$, tels que $x = \pi(X)$, $y = \pi(Y)$ on note $\tau_x(y) = x + y = \pi(X + Y) \in T^n$.

- Vérifier que $x + y$ est bien définie et induit une loi pour laquelle T^n est un groupe de Lie commutatif.
- On fixe des coordonnées $x_1, ..., x_n$ sur $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe une mesure de probabilité $d\lambda$ sur T^n telle que $\int f \circ \tau_x \, d\lambda = \int f \, d\lambda$ pour tout $x \in T^n$.
- Une p-forme $\omega \in \Omega^p(T^n)$ est dite invariante ssi $\tau_x^*\omega = \omega$ pour tout $x \in T^n$. Montrer que pour toute forme invariante il existe des constantes $c_I \in \mathbb{R}$ telles que $\pi^*\omega = \sum c_I dx^I$ où la somme est prise sur les multi-indices $I = (i_1, ..., i_p)$ de longueur p.
- Soit $\omega \in \Omega^p(T^n)$ une p-forme fermée. En remarquant que τ_{tx}^* est le flot d'un champ de vecteurs sur T^n, montrer que $\bar{\omega} = \int_{T^n} \tau_x^*\omega \, d\lambda(x)$ est une forme fermée cohomologue à ω.
- Calculer la dimension de $H^p(T^n)$ pour tout p.

Métrique riemannienne

Exercice 7 $\circledast$

Soit M une variété connexe (avec ou sans bord) de dimension 1. En utilisant une métrique riemannienne sur M, et en la paramétrant par la longueur d'arcs, montrer que M est difféomorphe au cercle ou à un intervalle.

Exercice 8

On munit $\mathbb{R}^2$ de sa métrique standard. Soit $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ une application lisse $c(t) = (r(t), z(t))$ paramétrée par la longueur d'arc i.e. $|\frac{dc}{dt}| = 1$. On pose $S(t, \theta) = (r(t)\cos(\theta), r(t)\sin(\theta), z(t))$.

- A quelles conditions $c[0,1]$ est une sous-variété (à bord) de $\mathbb{R}^2$? A quelles conditions $\Sigma = S([0,1] \times \mathbb{R})$ est-elle une sous-variété à bord de $\mathbb{R}^3$?
- Écrire la restriction de g_{can} à Σ dans les coordonnées (t, θ).
- Calculer la longueur des parallèles $\gamma_z = \Sigma \cap \{z = \text{cte}\}$.
- On prend $c(t) = (t - \tanh t, \frac{1}{\cosh t})$. Montrer que Σ est localement isométrique à $(\mathbb{R}^2, \frac{dx^2 + dy^2}{y^2})$.

Exercice 9

Dans $\mathbb{R}^{n+1}$ on note $\langle x, x \rangle = -x_0^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2$, et $|x|^2 = \sum_{i=0}^n x_i^2$. On définit $\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}, \langle x, x \rangle = -1, x_0 > 0\}$.

- Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle | T\mathbb{H}^n$ est une forme définie positive. On note $(\mathbb{H}^n, g)$ la variété riemannienne ainsi définie.

- Soit $f_0(x) = s - \frac{2(x-s)}{\langle x-s, x-s\rangle}$ avec $s = (-1, 0, ..., 0)$. Montrer que f_0 induit une isométrie de $(\mathbb{H}^n, g)$ sur $(\mathbb{B}^n, 4\frac{\sum_1^n dx_i^2}{(1-|x|^2)^2})$ où $\mathbb{B}^n$ désigne la boule unité de $\mathbb{R}^n$.
- Soit $f_1(x) = t + \frac{2(x-t)}{|x-t|^2}$ avec $t = (-1, 0, ..., 0)$. Montrer que f_1 induit une isométrie de $(\mathbb{B}^n, 4\frac{\sum_1^n dx_i^2}{(1-|x|^2)^2})$ sur $(\{x_1 > 0\}, \frac{\sum_1^n dx_i^2}{x_1^2})$.

Exercice 10

Notons (S^n, g_{can}) la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ munie de sa métrique canonique.

- Soit $N = (1, 0, ..., 0) \in S^n$ et $p_N : S^n \setminus \{N\} \to \{x_0 = 0\}$ la projection stéréographique. Calculer $(p_N)_* g_{can}$ sur $\mathbb{R}^n$ en coordonnées.
- On note dr^2 la métrique standard sur $]0, +\infty[$, et on définit $g = r^2 g_{can} + dr^2$ sur $S^n \times]0, +\infty[$. Montrer que $(S^n \times]0, +\infty[, g)$ est isométrique à $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, g_{\text{can}})$.
- Montrer que la métrique g précédente n'est pas isométrique à la métrique produit $(S^n \times]0, +\infty[, g_{\text{can}} \times dr^2)$.

Exercice 11

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte orientée à bord munie de sa forme volume canonique dV.

(1) Montrer que pour tout champ de vecteurs X sur M il existe une unique fonction notée $\text{Div}(X)$ et vérifiant $d(i_X\, dV) = (\text{div}(X))\, dV$. Montrer que $\text{div}(fX) = f\,\text{div}(X) + \langle \text{grad}(f), X\rangle$.

(2) On note N la normale sortante en un point de ∂M et $d\tilde{V}$ la forme volume induite par la métrique restreinte $g_{\partial M}$. Montrer que

$$\int_M \text{div}(X)\, dV = \int_{\partial M} \langle X, N\rangle\, d\tilde{V}$$

(3) Montrer que

$$\int_M \langle \text{grad}(f), X\rangle\, dV = -\int_M f\,\text{div}(X)\, dV + \int_{\partial M} f\,\langle X, N\rangle\, d\tilde{V}$$

(4) Pour toute fonction lisse f, on définit son Laplacien: $\Delta(f) = \text{div}(\text{grad}(f))$. Montrer que

$$\int_M f\,\Delta g\, dV + \int_M \langle \text{grad}(f), \text{grad}(g)\rangle = \int_{\partial M} f\, Ng\, d\tilde{V}$$

$$\int_M (f\,\Delta g - g\Delta f)\, dV = \int_{\partial M} (f\, Ng - g\, Nf)\, d\tilde{V}$$

(5) En déduire que deux fonctions f, g pour lesquelles $\Delta f = \Delta g = 0$ telles que $f = g$ sur ∂M sont égales. En déduire que lorsque $\partial M = \emptyset$, les seules fonctions pour lesquelles $\Delta f = 0$ sont les fonctions constantes.

Exercice 12

On considère l'espace $\mathbb{C}P^n$ des droites complexes de $\mathbb{C}^{n+1}$

(1) Montrer que $\mathbb{C}P^n$ admet une structure de variétés différentiables de dimension $2n$ telle que la projection canonique $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\} \to \mathbb{C}P^n$ soit une submersion.

(2) On munit $\mathbb{C}^{n+1}$ de la métrique canonique (en coordonnées complexes $z_j = x_j + iy_j$, $\sum dz_j \otimes d\bar{z}_j = \sum dx_j^2 + \sum dy_j^2$). On note S^{2n+1} la sphère unité de $\mathbb{C}^{n+1}$. Montrer que $\pi : S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ est une submersion. Décrire $\pi^{-1}\{p\}$ pour $p \in \mathbb{C}P^n$.

(3) Montrer que le groupe unitaire $U(n+1) = \{g \in \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{C}),\ {}^t\bar{g}g = \mathrm{id}\}$ est un groupe de Lie. Montrer que l'action naturelle $U(n+1) \times \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ descend en une action $U(n+1) \times \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n$.

(4) Montrer qu'il existe une unique métrique g sur $\mathbb{C}P^n$ telle que pour tout couple de vecteurs tangent $v, w \in T_pS^{2n+1}$ orthogonaux à $\ker d\pi$, on a $g(d\pi(v), d\pi(w)) = g_{\mathrm{can}}(v, w)$. Montrer que le groupe des isométries de $(\mathbb{C}P^n, g)$ est égal à $U(n+1)$.