TD de Géométrie Différentielle du Septembre 2009

UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT

Exercice 1

- On fixe $h_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ un atlas de M, alors $U_i \times \{\pm 1\}$ est un atlas de $\tilde{M}$ (ici 1 est l'orientation positive de $\mathbb{R}^n$, et -1 l'orientation opposée). L'application $\pi : \tilde{M} \to M$ est un revêtement de degré 2. Donc $\tilde{M}$ admet une structure différentiable canonique rendant π différentiable.
- Si M est orientable, alors on peut trouver une application $\sigma : M \to \tilde{M}$ telle que $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}$. Alors $\sigma(M)$ est connexe et $\tilde{M}$ est l'union disjointe $\sigma(M)$ et de son complémentaire. Si $\tilde{M}$ n'est pas connexe, alors il possède deux composantes M_{-1} et M_1. Comme π est un revêtement, $\pi(M_1) = \pi(M_{-1}) = M$. On peut alors définir une orientation en T_pM associée à la composante M_1.
- Pour orienter S^n, on choisit les bases ordonnées $e_1, ..., e_n$ de T_pS^n telles que $N_p, e_1, ..., e_n$ est orientée positivement dans $\mathbb{R}^n$ où N_p est la normale en p. Si n est impair, l'application $-\mathrm{id}$ préserve l'orientation dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Donc $T_p\mathbb{R}P^n$ est orienté par l'orientation de T_qS^n pour n'importe lequel des deux points préimages q de p. Si n est pair on regarde $\pi : \pi : S^n \to \mathbb{R}P^n$. A chaque point $p \in S^n$ on associe une orientation ε_q au point $q = \pi(p)$ image par $d\pi$ de l'orientation canonique sur S^n. Comme $-\mathrm{id}$ renverse l'orientation, on voit que π identifie S^n à $\widetilde{\mathbb{R}P^n}$. Donc ce dernier n'est pas orientable.
- Le groupe $G_1 = (x, y+1), (x+1, 1-y)$ contient $G_2 = (x, y+1), (x+2, y)$ comme sous-groupe d'indice 2. Le quotient $\mathbb{R}^2/G_2$ est le tore et l'application $\mathbb{R}^2/G_2 \to \mathbb{R}^2/G_1$ est induite par l'involution $(x+1, 1-y)$ qui renverse l'orientation. On conclut de la même manière que dans le cas des espaces projectifs.
- Utiliser le fait que la normale se retourne lorsque l'on fait un tour.
- On prends des cartes U_i de M (dimension $= m$), V_k de N (dimension $= n$), et on note h_{ij} et g_{kl} les applications de recollement de U_i à U_j et de V_k à V_l respectivement. Alors l'application de recollement de $U_i \times V_k$ à $U_j \times V_l$ est donnée par $H_{ijkl} = (h_{ij}(x), g_{kl}(y))$ où $x \in \mathbb{R}^m$, et $y \in \mathbb{R}^n$. Le determinant de la différentielle est donc $\det dH_{ijkl} = \det dh_{ij} \times \det dg_{kl}$. Si M et N sont orientables, on peut choisir les cartes telles que $\det dh_{ij}, \det dg_{kl} > 0$. Donc $\det dH_{ijkl} > 0$ et $M \times N$ est orientable. Si $M \times N$ est orientable, alors tous les determinants $\det dh_{ij}$, $\det dg_{kl}$ ont le même signe. Si celui-ci est positif, M et N sont orientables. Sinon on remplace chaque h_{ij} en la composant avec un difféo global de $\mathbb{R}^m$ renversant l'orientation par exemple $(x_1, ..., x_m) \mapsto (-x_1, x_2, ..., x_m)$ (idem pour les g_{kl}). A nouveau M et N sont orientables.

- Dans une carte U_i de M les coordonnées sont x. On fixe une base de $\mathbb{R}^n$, et on obtient y pour les coordonnées dans l'espace tangent. Les applications de recollement pour la variété TM sont données par: $H_{ij}(x,y) = (h_{ij}(x), dh_{ij}(x)y)$ dont le déterminant de la différentielle est $\det dH_{ij} = (\det h_{ij}(x))^2 > 0$.
- Le fibré tangent d'un groupe de Lie est trivialisable donc orientable.

Exercice 2

Localement sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ on s'est donnée une application $p : U \to \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n*})$ lisse où $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n*})$ désigne l'espace des droites de l'espace des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$. Fixons $e_1^*, ..., e_n^*$ une base de $\mathbb{R}^{n*}$, alors dans une carte adéquate disons $e_1^* \neq 0$, on peut écrire de manière unique $p(x) = e_1^* + f_2(x)e_2^* + ... + f_n(x)e_n^*$. On pose $\omega(x) = dx_1 + \sum_2^n f_i(x)dx_i$. On a alors $\ker \omega = \xi(p)$. Une telle forme n'est pas unique mais définie à multiplication par une fonction lisse non nulle en tout point près.

Soit U_i un atlas orienté de telle sorte que les recollements vérifient $\det(dh_{ij}) > 0$. Pour tout p, on choisit un vecteur $n(p)$ transverse à $\xi(p)$ et tel que pour toute base orientée positivement $e_1, ..., e_n$ de $\xi(p)$, la base $n(p), e_1, ..., e_n$ est orientée positivement dans M. Pour chaque i, on fixe une 1-forme ω_i définissant ξ et telle que $\omega_i(n(p)) > 0$ pour tout p. Ensuite on pose $\omega = \sum \varphi_i \omega$ où φ_i est une partition de l'unité associée aux U_i. Comme $\omega(n(p)) > 0$, ω est non nulle en tout point et définit ξ.

Si ξ est involutive, par le théorème de Frobenius cette distribution est définie par la 1-forme dx_1 dans des coordonnées adéquates. Une 1-forme définissant ξ est donc du type $\omega = f(x)\, dx_1$ avec f lisse. On a alors $\omega \wedge d\omega = f\, dx_1 \wedge (df \wedge dx_1) = 0$.

On se place en un point p. On peut donc supposer que $\omega(p) = dx_1$ (cette équation est valable seulement au point p et non dans un voisinage de p). Dans ce cas $d\omega(p) = \sum a_{ij} dx_i \wedge dx_j$. De $\omega \wedge d\omega = 0$ on en déduit que $a_{ij} = 0$ lorsque $i, j \neq 1$. Donc il existe une 1-forme lisse θ telle que $d\omega = \theta \wedge \omega$.

Pour montrer que ξ est intégrable, on prends deux champs de vecteurs $X_1, X_2 \in \xi(p)$, i.e. $\omega(X_1) = \omega(X_2) = 0$. On a $d\omega(X_1, X_2) = X_1 \cdot \omega(X_2) - X_2 \cdot \omega(X_1) - \omega([X_1, X_2]) = \omega([X_1, X_2])$. Or $d\omega(X_1, X_2) = \theta \wedge \omega(X_1, X_2) = 0$. Donc $\omega([X_1, X_2]) = 0$. La distribution ξ est donc intégrable.

Exercice 3

On a $\theta \in [0, 2\pi]$ et $\varphi \in [0, \pi]$. On note $\Phi(\varphi, \theta) = (\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi)$. Alors $\Phi^*\omega = \sin^3\varphi\cos^2\theta\, d\varphi \wedge d\theta$. On montre que l'orientation induite par $\mathbb{R}^3$ sur S^2 est celle donnée par $d\varphi \wedge d\theta$: pour celà on vérifie que le déterminant de la normale en $H(\varphi, \theta)$, $\frac{\partial H}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial H}{\partial \theta}$ est positif. Ensuite la formule de changement de variables donne: $\int_{S^2} \omega = \int H^*\omega = \frac{4\pi}{3}$. Stokes dit $\int_{B(0,1)} dx \wedge dy \wedge dz = \frac{4\pi}{3}$. Le nombre de droite est le volume de la boule unité.

Le fait que $d\omega = 0$ est un long calcul... On note $i_r(\varphi, \theta) = (r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)$. On utilise à nouveau les coordonnées polaires: $i_r^*\omega = \sin\varphi\, d\varphi \wedge d\theta$ donc

$\int i_r^*\omega = 2$. Si $\omega = d\alpha$ était exacte on aurai par Stokes $\int_{S^2} d\alpha = 0$. Donc ω n'est pas exacte.

Exercice 4

- On sait que $\omega \in \Omega^n(M) \mapsto \int_M \omega$ est un isomorphisme. Donc $\omega - \psi$ est nulle dans $H^n(M)$. En particulier il existe une $n-1$-forme η telle que $\omega - \psi = d\eta$.
- Comme ω et ψ sont deux formes volumes, il existe une fonction f lisse non nulle en tout point telle que $\omega = f\,\psi$. Or $\int \omega = \int f\,\psi = \int \psi$ donc $f > 0$ partout. On en déduit que $\omega_s = (1-s)\omega + s\psi$ est non nulle en tout point. Plaçons nous en un point p et choisissons une base $e_1, ..., e_n$ de T_pM. Alors $\omega_s = e_1^* \wedge ... \wedge e_n^*$ et $-\eta = \sum_1^n c_i e_1^* .. \wedge \hat{e_i^*} \wedge dx_n$. On a donc un unique vecteur $\xi_s = \sum (-1)^i c_i e_i$ tel que $\xi_s \lrcorner \omega_s = -\eta$. Le théorème de Cauchy-Lipshitz à paramètre montre l'existence d'un flot φ_s.
- On calcule en utilisant les formules de Cartan.

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\varphi_s^*\omega_s &= \varphi_s^*(\psi - \omega) + (\frac{d}{ds}\varphi_s^*)\omega_s \\ &= \varphi_s^*(\psi - \omega) + \varphi_s^*(L_{\xi_s}\omega_s) \\ &= \varphi_s^*(\psi - \omega) + \varphi_s^* d(\xi_s \lrcorner \omega_s) = 0\ .\end{aligned}$$

  On a donc $\varphi_1^*\omega_1 = \varphi_0^*\omega_0$ ie $\varphi_1^*\psi = \omega$.

Exercice 5

Pour $p \geq 2$: $\dim H^p(S^1) = 0$; $\dim H^0(S^1) = 1$ car S^1 est connexe. Comme S^n est connexe compact orienté, $\omega \mapsto \int_{S^n} \omega$ est un isomorphisme de $H^n(S^n)$ sur $\mathbb{R}$.

Comme U_ε est difféo à une boule, le lemme de Poincaré montre que $H^p(U_\varepsilon) = 0$ pour tout $p \geq 1$.

On prend $p_0 = (1, 0, ..., 0)$ et $p_1 = (-1, 0, ..., 0)$. On a $U_0 \cap U_1 = S^n \cap \{-1 < x_0 < 1\} = \{-1 < x_0 < 1\} \times \{(x_1, ..., x_n) \sum x_i^1 = 1 - x_0^2\}$. Donc $U_0 \cap U_1$ est difféo à $M =]-1, +1[\times S^{n-1}$. On note $j : S^{n-1} \to M$, $j(x) = (0, x)$, et $\pi : M \to S^{n-1}$, $\pi(r, x) = x$.

On définit l'homotopie $H : [0,1] \times M \to M$ par $H(t, r, x) = (tr, x)$. On pose $j_0(r, x) = (0, r, x)$ et $j_1(r, x) = (1, r, x)$. Soit $\omega \in \Omega^p(M)$ fermé. Le lemme d'homotopie appliqué à $H^*\omega$ donne $j_1^*H^*\omega - j_0^*H^*\omega$ est exacte dans M. C'est-à-dire $\omega - p^*j^*\omega = 0$ dans $H^p(M)$. Par ailleurs $p \circ j = \text{id}$ sur S^{n-1} donc $j^*p^* = \text{id}$. Finalement $j^* : H^p(M) \to H^p(S^{n-1})$ est un isomorphisme.

Soit ω une p-forme fermée $1 \leq p < n$. On veut montrer par récurrence sur n qu'elle est exacte. On écrit $\omega = d\theta_0$ sur U_0, et $\omega = d\theta_1$ sur U_1. Sur $U_0 \cap U_1$ on a alors $\theta_0 - \theta_1$ est fermée donc exacte par hypothèse de récurrence. Donc $\theta_0 = \theta_1 + \eta$. On pose $\theta = \theta_0$ sur U_0 et $\theta_1 + \eta$ sur U_1. On vérifie que $d\theta = \omega$ donc $H^p(S^n) = 0$.

Exercice 6

La mesure $d\lambda$ est l'image par la projection canonique de la mesure de Lebesgue sur le cube $[-1,1]^n$. Si $\tau_x^*\omega = \omega$ alors $T_x^*\pi^*\omega = \pi^*\omega$ avec $T_x(y) = x+y$ dans $\mathbb{R}^n$. Donc $\pi^*\omega = \sum c_I dx^I$. Que $\bar{\omega}$ soit fermée est facile. Pour montrer que $\bar{\omega}$ est cohomologue à ω on remarque que τ_{tx}^* est le flot du champ de vecteur x sur T^n. On a donc $\frac{d}{dt}(\tau_{tx}^*\omega) = \tau_{tx}^* d(i_X\omega)$, et $\tau_x^*\omega - \omega = d\int_0^1 \frac{d}{dt}(\tau_{tx}^* i_X\omega)dt$. La même formule en intégrant sur T^n donne $\bar{\omega}$ cohomologue à ω.

Soit $\omega = \sum c_I dx^I$ une p-forme invariante dont la classe de cohomologie est nulle. Pour chaque I on prend I_0 le multi-indice tel que $I \cup I^0 = \{1, ..., n\}$ et ordonné tel que $dx^I \wedge dx^{I_0} = dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$. Alors $\omega_0 = \sum c_I dx^{I_0}$ est une $n-p$-forme telle que $\omega \wedge \omega_0 = (\sum c_I^2) dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$. Comme la classe de ω est nulle, l'intégrale $\int_{T^n} \omega \wedge \omega_0 = (\sum c_I^2) = 0$. Donc $\omega = 0$. On a donc $\dim H^p(T^n) = \dim \Lambda^p \mathbb{R}^n$.

Exercice 7

Voir l'appendice du livre de Milnor Topology from the differential viewpoint.

Exercice 8

Comme c est paramétré par la longueur d'arcs, c est une immersion. Pour que $c[0,1]$ soit une sous-variété, il faut que c soit injective. Si on impose maintenant que c soit injectif et que $r(t) \neq 0$ alors $S(t,\theta)$ est un plongement.

$S^* g_{\text{can}} = ((\frac{dr}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2)dt^2 + r^2 d\theta^2$.

$L(\gamma_z) = 2\pi r(t)$.

$S^* g = \tanh^2(t) dt^2 + \frac{d\theta^2}{\cosh^2 t}$.

Exercice 9

$f_0(x) = (0, \frac{x_1}{1+x_0}, ..., \frac{x_n}{1+x_0})$

$f_0^{-1}(x) = (\frac{1+|t|^2}{1-|t|^2}, \frac{2t_1}{|t|^2}, ..., \frac{2t_n}{|t|^2})$

$f_{0*} \sum dt_i^2 = \frac{\sum dx_i^2}{(1+x_0)^2}$ (utiliser $\sum_1^n x_i^2 = x_0^2 - 1$ et $\sum_1^n x_i dx_i = x_0 dx_0$.

$f_1(x) = (\frac{1-x_1^2-\sum_2^n x_i^2}{(1+x_1)^2+\sum_2^n x_i^2}, \frac{2x_2}{(1+x_1)^2+\sum_2^n x_i^2}, ..., \frac{x_n}{(1+x_1)^2+\sum_2^n x_i^2})$

Exercice 10

(1) $p_N(x_0, ..., x_n) = (0, \frac{x_1}{1-x_0}, ..., \frac{x_n}{1-x_0})$

$p_N^{-1}(t_1, ..., t_n) = (\frac{|t|^2-1}{|t|^2+1}, \frac{2t_1}{|t|^1+1}, ..., \frac{2t_n}{|t|^1+1})$.

$p_N^* \sum dt_i^2 = \frac{\sum dx_i^2}{(1-x_0)^2}$. Donc $p_{N*} \sum dx_i^2 = \frac{4\sum dt_i^2}{(1+|t|^2)^2}$

(2) On utilise le difféomorphisme $S^n \times]0, +\infty[\to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ donné par $(r, x) \mapsto rx$. On tire en arrière $\sum dy_i^2 = \sum (x_i^2 dr^2 + r^2 dx_i^2 + 2r x_i dr dx_i) = dr^2 + r^2 \sum dx_i^2$ (à nouveau $\sum x_i dx_i = 0$ et $\sum x_i^2 = 1$).

(3) Soit $M = S^n \times]0, +\infty[$. Pour tout $\eta > 0$, il existe des compacts K (prendre $S^n \times [\varepsilon, 1]$) tel que le diamètre d'une des composantes connexes de $(M \setminus K, r^2 g_{\text{can}} + dr^2)$ est plus petit que η. D'un autre coté, pour tout compact

K, le diamètre de toutes les composantes connexe de $(M \setminus K, g_{\text{can}} + dr^2)$ est borné inférieurement.

Exercice 11

$\text{div}(fX)dV = d(i_{fX}dV) = f\text{div}(X)dV + df \wedge i_X(dV)$. On calcule en coordonnées $dV = dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$, $X = \sum X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. $i_x dV = \sum (-1)^{i-1} X_i dx_1 \wedge ... \hat{dx_i} \wedge ... dx_n$. $df \wedge i_X(dV) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} X_i dV = df(X)dV$.

Stokes donne $\int \text{div}(X)dV = \int_{\partial M} i_X dV$. Ensuite on prend un point du bord et une base orthornormée directe $e_2, ..., e_n$. Alors $N \wedge e_2^* ... \wedge e_n^*$ est orthonormée directe pour M donc $dV = N \wedge e_2^* ... \wedge e_n^*$. Si $X = aN + \sum X_i e_i$, on a $i_X dV = ae_2^* ... \wedge e_n^* + N \wedge \omega$ donc $i_X dV$ restreint à ∂M est $\langle N, X\rangle d\tilde{V}$.

Les questions (3) et (4) sont des conséquences de la formule de Stokes.

Si $\Delta f = \Delta g = 0$. Alors $\int \langle \text{grad} f, \text{grad} g\rangle dV = \int \langle \text{grad} f, \text{grad} f\rangle dV = \int \langle \text{grad} g, \text{grad} g\rangle dV = \int gNg d\tilde{V}$. Donc $\int |\text{grad} f - \text{grad} g|^2 dV = 0$ ie $f - g$ est constant. Comme $f = g$ au bord, $f = g$ partout. Si le bord est vide l'argument précdent s'applique et montre f est constant.