TD de Géométrie Différentielle du Septembre 2009
UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT
30 SEPTEMBRE 2009

Algèbre tensorielle et extérieure

Exercice 1

Soit V un espace vectoriel de dimension n, et $\varphi : V \to V$ un endomorphisme. Montrer que $\det(\lambda \mathrm{Id} - \varphi) = \sum (-1)^d \mathrm{Tr}(\bigwedge^d \varphi)\lambda^{n-d}$ où $\bigwedge^d \varphi$ est l'endomorphisme induit sur $\bigwedge^d V$.

Exercice 2

Soit V un espace vectoriel de dimension 4.

- Donner la dimension des espaces $\Lambda^k V$ pour tout $k \geq 0$.
- On fixe un isomorphisme $\theta : \Lambda^4 V \to \mathbb{R}$. On définit $Q : \Lambda^2 V \times \Lambda^2 V \to \mathbb{R}$ par la formule $Q(\alpha, \beta) = \theta(\alpha \wedge \beta) \in \mathbb{R}$. Montrer que Q est une forme bilinéaire non-dégénérée de type $(3, 3)$ (c'est-à-dire ayant 3 valeurs propres positives et 3 autres négatives).

Exercice 3

Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie. Notons $\mathrm{Sym}^p V^*$ le sous-espace de $(V^*)^{\otimes p}$ des tenseurs symétriques, et $\mathrm{Poly}^p(V)$ l'espace des fonctions polynomiales sur V homogènes de degré p i.e. vérifiant $P(tx) = t^p P(x)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $x \in V$. Montrer que l'on a un isomorphisme $\mathrm{Sym}^p V^* \simeq \mathrm{Poly}^p(V)$ en traitant tout d'abord le cas $p = 2$.

Exercice 4

Soit V un espace vectoriel de dimension $n+1$ et $\mathbb{P}(V)$ l'espace des droites de V: c'est une variété difféomorphe à $\mathbb{R}P^n$.

- Montrer que l'application $x \mapsto x^{\otimes d}$ de V dans $\mathrm{Sym}^d V \subset V^{\otimes d}$ induit un plongement ν_d de $\mathbb{P}(V)$ dans $\mathbb{P}(\mathrm{Sym}^d V)$ (appelé application de Veronese).
- Calculer en coordonnées homogènes ν_d pour $n = 1$, et ν_2 pour $n = 2$. Dans ce dernier cas, trouver des équations de la surface obtenue (surface de Veronese).

Exercice 5

Soit V et W deux espaces vectoriel réels de dimension finie. Montrer que l'application $V \times W \to V \otimes W$ induit un plongement (dit de Segre) $\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}(V \otimes W)$.

Exercice 6

- Soit V un espace vectoriel de dimension finie. Montrer par récurrence sur la dimension de V qu'un vecteur $\alpha \in \bigwedge^2 V$ est décomposable ssi $\alpha \wedge \alpha = 0$. On rappelle que α est décomposable si il existe $x, y \in V$ tels que $\alpha = x \wedge y$.
- Rappeler la construction du plongement de Plücker d'une grassmanienne dans un espace projectif. Calculer en coordonnées l'application de Plücker pour la Grassmanienne $G(2,4)$ à valeurs dans $\mathbb{P}^5$, et une équation de l'image.

Tenseurs

Exercice 7

Soit φ un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$, et T un tenseur de type (p,q) avec $p+q=2$. On écrit en coordonnées $T = \sum T_i^j dx_j \otimes \frac{\partial}{\partial x_i}$. Calculer les coordonnées du tenseur $\varphi_* T$.

Exercice 8

Soit p, q, r, s quatre entiers, et $P : \Gamma(T_q^p M) \to \Gamma(T_s^r M)$ une application $\mathbb{R}$-linéaire. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes:

(1) P est $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéaire i.e. $P(fT) = fP(T)$ pour tout fonction lisse f;

(2) pour tout $\sigma, \sigma' \in \Gamma(T_q^p M)$ et $m \in M$ tels que $\sigma(m) = \sigma'(m)$ alors $P(\sigma)(m) = P(\sigma')(m)$.

Montrer que si ces conditions sont satisfaites P peut être interprété comme un tenseur et donner son type.

En déduire que l'application $\Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$ donnée par $X, Y \mapsto [X, Y]$ n'est pas un tenseur. Idem avec $X, Y \to L_X Y$.

Formes extérieures

Exercice 9

- Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, donnée par $F(x,y) = (u,v) = (x^2+y^2, xy)$. Calculer $F^*(u\,du + v\,dv)$.
- Soit ω la 1-forme $\omega = (-y\,dx + x\,dy)/(x^2+y^2)$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Calculer $c^*\omega$ où $c(t) = (\cos t, \sin t)$.

Exercice 10

- Sur $\mathbb{R}^3$ on définit la 2-forme différentielle α et la 1-forme β par: $\alpha = xy\,dx \wedge dy + z^2\,dx \wedge dz + x\,dy \wedge dz$, $\beta = x\,dx + y^2\,dz$. Calculer $\alpha \wedge \beta$, $d\alpha$, $\beta(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z})$.
- Sur $\mathbb{R}^4$, on considère la 2-forme différentielle: $\omega = (x^2+t)\,dx \wedge dy + dx \wedge dz + dy \wedge dt + (y^2+z)\,dz \wedge dt$. Calculer $\omega \wedge \omega$. On note ensuite V la partie de $\mathbb{R}^4$ sur laquelle $\omega \wedge \omega$ s'annule. Montrer que V est une sous-variété de $\mathbb{R}^4$ et donner sa dimension.

Exercice 11

- Soit $f(x,y)$ une submersion lisse de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$. Construire une 1-forme partout non nulle sur $f^{-1}\{0\}$.
- Soit $f(x,y,z)$ une submersion lisse de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}$. Soit f_x, f_y, f_z les dérivées partielles de f par rapport à x, y, z respectivement. Montrer que
$$\frac{dx \wedge dy}{f_z} = \frac{dy \wedge dz}{f_x} = \frac{dz \wedge dx}{f_x}$$
sur $f^{-1}\{0\}$. En déduire qu'il existe une 2-forme sur $f^{-1}\{0\}$ partout non nulle.
- Généraliser le problème en dimension quelconque avec $f(x_1, ..., x_n)$ une submersion de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12 (théorème de Darboux)

- Soit V un espace vectoriel de dimension finie, et $\omega \in \bigwedge^2 V^*$ non-dégénérée (on dit que ω est symplectique). Montrer que la dimension de V est paire disons égale à $2n$, et qu'il existe une base $e_1, ..., e_n$, $e_{n+1}, ..., e_{2n}$ de V telle que $\omega = e_1^* \wedge e_{n+1}^* + ... + e_n^* \wedge e_{2n}^*$.
  On notera ω_0 la forme symplectique précédente.
- Soit ω une 2-forme sur la boule unité de $\mathbb{R}^{2n}$ fermée et non-dégénérée en tout point. On suppose que $\omega(0) = \omega_0$, et on pose $\omega_t = t\omega + (1-t)\omega_0$.
  - Montrer qu'il existe une 1-forme λ telle que $\omega - \omega_0 = -d\lambda$.
  - Montrer que pour tout t, il existe un unique champ de vecteur X_t tel que $X_t \lrcorner \omega_t = \lambda$.
  - Montrer que pour tout t, il existe un difféomorphisme Ψ_t tel que $\frac{d}{dt}\Psi_t = X_t(\Psi_t)$.
  - Calculer $\frac{d}{dt}\Psi_t^*\omega_t$ et conclure que $\Psi_1^*\omega = \omega_0$.