TD de Géométrie Différentielle
UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT
23 SEPTEMBRE 2009

---

## Fibrés vectoriels et espace tangent

**Exercice 1** Soient $E$ et $F$ deux fibrés vectoriels.

- Soit $g : E \to F$ une application fibrée. Montrer que si $g$ est bijective, alors c'est un homéomorphisme.
- Montrer qu'un fibré vectoriel $E$ de rang $l$ est trivial ssi il existe $l$ sections $\sigma_1, ..., \sigma_l$ telles que pour tout $p \in M$, la famille $\{\sigma_i(p)\}$ engendre la fibre $E_p$.
- Soit $U_i$ une famille d'ouverts recouvrant $M$, telles que $E$ et $F$ sont données par des applications de recollement $g_{ij} \in \mathcal{C}^\infty(U_i \cap U_j, \mathrm{GL}(l, \mathbb{R}))$, et $h_{ij} \in \mathcal{C}^\infty(U_i \cap U_j, \mathrm{GL}(k, \mathbb{R}))$. Trouver les applications de recollement pour le fibré $\mathrm{HOM}(E, F)$ dont la fibre en $p$ est donnée par les applications linéaires de $E_p$ dans $F_p$.

**Exercice 2**

- Soit $M$ et $N$ deux variétés différentiables. Montrer qu'il existe un isomorphisme de fibré vectoriel entre $T(M \times N)$ et $TM \oplus TN$. En déduire que les variétés $T(M \times N)$ et $TM \times TN$ sont difféomorphes.
- En considérant $T(S^n \times \mathbb{R})$ comme un sous-fibré de $T\mathbb{R}^{n+1}$, montrer que le fibré $TS^n \oplus \mathbb{R}$ sur $S^n$ est trivialisable. En déduire que les variétés $TS^n \times \mathbb{R}$ et $S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ sont difféomorphes.

**Exercice 3**

Montrer que $V_n = \{(p, l) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}P^{n-1},\ p \in l\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}P^{n-1}$. Montrer que la seconde projection $\pi_2(p, l) = l$ détermine un fibré de rang 1 sur $\mathbb{R}P^{n-1}$. Montrer que pour $n = 2$, ce fibré n'est pas trivial.

**Exercice 4**

Soit $M$ une variété différentiable et $E \to M$ un fibré vectoriel.

- En utilisant une partition de l'unité, montrer que l'on peut munir chaque fibre $E_x$ d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ dépendant différentiablement de $x$.
- Montrer que si il existe une section de $E$ en tout point non nulle, alors il existe un fibré vectoriel $F$ tel que $E \equiv F \oplus \mathbb{R}$. La notation $\mathbb{R}$ désigne ici le fibré trivial de rang 1 sur $M$.

**Exercice 5** (groupe de Lie)

Un groupe de Lie $G$ est une variété différentiable telle que l'application $(g, h) \mapsto gh^{-1}$ soit différentiable. On notera $L_g : G \to G$ l'application $L_g(h) = gh$, et $e$ l'élément unité de $G$.

(1) Montrer que $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$ sont des groupes de Lie. Calculer l'espace tangent en l'identité pour chacun des groupes précédents.
(2) Soit $x$ un vecteur de l'espace tangent à $G$ en $e$. Montrer qu'il existe un unique champ de vecteur $X$ sur $G$ invariant à gauche, ie $(L_g)_*X = X$ pour tout $g \in G$, et tel que $X(e) = x$.
(3) En déduire que l'espace tangent $TG$ est trivialisable.
(4) Soit $x \in M(n,\mathbb{R})$, montrer que $x \mapsto \exp(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!}$ définit une application lisse à valeurs dans $M(n,\mathbb{R})$ dont la différentielle est $d\exp(x).y = \exp(x).(y)$ dès que $x$ et $y$ commutent.
(5) Soit $X$ un champ de vecteur invariant à gauche sur un sous-groupe de Lie $G \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Notons $x = X(0) \in M(n,\mathbb{R})$. Montrer que $\exp(tX).H = H \cdot \exp(tx)$ pour tout $H \in G$.

## Champs de vecteurs

### Exercice 6

- Considérons le tore $T$ de dimension 2 donné par le quotient de $\mathbb{R}^2$ par la relation d'équivalence $(x,y) \sim (x+k, y+l)$ avec $k,l \in \mathbb{Z}$. Montrer que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, le champ de vecteurs $a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$ induit un champ de vecteur $X$ sur $T$. A quelle condition sur $(a,b)$ les courbes intégrales de $X$ sont fermées? Que se passe-t'il sinon?
- On considère $\mathbb{R}^2$ comme un ouvert de $\mathbb{R}P^2$ par l'application $(x,y) \mapsto [x:y:1]$. Soit $P$ et $Q$ deux polynômes à deux variables. A quelle condition sur $P, Q$, le champs de vecteur $P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2$ s'étend à $\mathbb{R}P^2$.
- Notons $X_\lambda = x\frac{\partial}{\partial x} + \lambda y\frac{\partial}{\partial y}$. Calculer le flot de $X_\lambda$ et tracer les courbes intégrales de ce champ. A quelle condition sur $a$ et $b \in \mathbb{R}$ existe-t'il un difféomorphisme *local* $\varphi$ tel que $\varphi_* X_a = X_b$ au voisinage de 0.

### Exercice 7

- On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire standard. Rappelons que le produit vectoriel de deux vecteurs $u, v$ de $\mathbb{R}^3$, est l'unique vecteur $u \times v$ orthogonal au plan $\mathbb{R}u + \mathbb{R}v$, de norme $\sqrt{|u|^2|v|^2 - \langle u,v\rangle^2}$ et tel que le triplet $u, v, u\times v$ forme une base directe de $\mathbb{R}^3$. Donner en coordonnées cartésiennes l'expression du produit vectoriel.
- Considérons les trois champs de vecteurs suivants dans $\mathbb{R}^3$: $X = z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}$, $Y = x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}$, $Z = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$. Montrer que $(a,b,c) \mapsto aX + bY + cZ$ détermine une application linéaire injective de $\mathbb{R}^3$, de telle sorte que le crochet de Lie des champs de vecteurs corresponde au produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$.

### Exercice 8

Montrer qu'il n'existe aucune dérivation non nulle sur l'espace des fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}^n$.

**Exercice 9**

- Soit $p, q$ deux points de la boule unité de $\mathbb{R}^n$. Construire un champs de vecteurs $\xi$ à support compact dans la boule, et tel que $\exp(\xi)(p) = q$.
- Soit $M$ une variété différentiable connexe, $p, q$ deux points de $M$. Montrer qu'il existe un difféomorphisme de $M$ envoyant $p$ sur $q$.
- Lorsque $n \geq 2$, généraliser la question précédente à un nombre arbitraire de points: étant donné $p_1, ..., p_k$, et $q_1, ..., q_k$, construire un difféomorphisme de $M$ envoyant $p_i$ sur $q_i$ pour tout $i$.

**Exercice 10**

- Montrer que toute sphère de dimension impaire admet un champ de vecteur ne s'annulant en aucun point. Indication: considérer $S^{2p+1}$ comme la sphère de $\mathbb{C}^{p+1}$.
- Soit $K$ une partie compact de $\mathbb{R}^{n+1}$, $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$ contenant $K$ et $v : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ une application lisse. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on définit l'application $F_t(x) = x + tv(x)$ de $U$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Montrer qu'il existe un voisinage $V$ de $K$ dans $U$, et $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $|t| \leq \varepsilon$, $F_t$ soit un difféomorphisme de $V$ sur son image. En déduire que la mesure de Lebesgue de $F_t(K)$ est un polynôme en $t$.
- Soit $v$ un champ de vecteur unitaire sur $S^n$. Posons pour $t \in \mathbb{R}$, et $x \in S^n$, $F_t(x) = x + tv(x)$. Montrer que pour $t$ petit, $F_t$ est un difféomorphisme de $S^n$ sur la sphère de rayon $\sqrt{1+t^2}$.
- Conclure qu'une sphère de dimension paire n'admet pas de champ de vecteur non nul en tout point.

**Exercice 11**

Dans $\mathbb{R}^3 \ni p = (x, y, z)$, le champ de plan $\xi(p) = \{(X, Y, Z),\ Z + xY - yX = 0\}$ est-il intégrable?