TD de Géométrie Différentielle du Septembre 2009

UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT

---

**Exercice 1**

Dans des ouverts de trivialisation, l'application est donnée par $(x, v) \mapsto (x, g(x) \cdot v)$ avec $g$ fonction continue à valeurs dans GL. L'inverse est donnée par $(x, g^{-1}(x) \cdot v)$ qui est aussi continue.

L'implication difficile: supposons que $E$ admettent $l$ sections. On a une application $M \times \mathbb{R}^l \to E$ donnée par $(m, t_1, ..., t_l) \mapsto \sum t_i \sigma(m) \in E$. C'est une application fibrée qui est bijective. C'est donc un isomorphisme de fibré.

**Exercice 2**

• Soit $\pi_1 : M \times N \to M$ et $\pi_2 : M \times N \to N$ les deux projections canoniques. L'application $H = (d\pi_1, d\pi_2)$ donne une application de fibré de $T(M \times N) \to TM \oplus TN$. Pour conclure il faut montrer que la restriction à chaque fibre est un isomorphisme. Comme la dimension des fibres est la même, il suffit de montrer la surjectivité. Pour le voir, on prends deux vecteurs tangents $v$ en $x \in M$, et $w$ en $y \in N$ que l'on représente par des courbes $\gamma_v$ et $\gamma_w$. Alors la courbe $t \mapsto (\gamma_v(t), \gamma_w(t))$ représente $(v, w)$. Enfin tout isomorphisme de fibré est en particulier un difféomorphisme.

• On a un difféo entre $S^n \times \mathbb{R}_+^*$ et $R^{n+1} \setminus \{0\}$. On a donc l'isomorphisme de fibré sur $S^n \times \mathbb{R}_+^*$: $T(S^n \times \mathbb{R}_+^*) \simeq T(R^{n+1} \setminus \{0\})$. Or le membre de droite est le fibré trivial. En restreignant k'isomorphisme précédent à la sphère $S^n \times \{1\}$, on obtient l'isomorphisme de fibré sur $S^n$: $T(S^n \times \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n+1}$. En particulier, les variétés $TS^n \times \mathbb{R}$ et $S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ sont difféomorphes.

**Exercice 3**

La préimage d'un point $\pi_2^{-1}\{l\}$ est une droite. Soit $U_1 = \{[l_1 : ... : l_n], \, l_1 \neq 0\}$, et $h : \mathbb{R}^{n-1} \to U \subset \mathbb{R}P^{n-1}$ la carte $(x_1, ..., x_{n-1}) \mapsto [1 : x_1 : ... : x_{n-1}]$. Alors on pose $H_1 : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \to \pi_2^{-1}(U)$ par $H_1(x, t) = (t, tx_1, ..., tx_{n-1}), [1 : x_1 : ... : x_{n-1}]$. On obtient ainsi $n$ difféo $H_1, ..., H_n$ associé à chacune des cartes standard de $\mathbb{R}P^{n-1}$. On calcule ensuite $H_2^{-1} \circ H_1$: c'est l'application $(x, t) \mapsto (1/x_1, x_2/x_1, ..., x_{n-1}/x_1, tx_1)$. Comme la dernière composante est linéaire en $t$, $\pi_2$ est un fibré vectoriel. Le rang de ce fibré est 1. Pour $n = 2$, l'espace total de ce fibré est la bande de Möbius.

**Exercice 4**

Soit $n$ le rang du fibré $E$. Soit $U_i$ un atlas muni de trivialisations $h_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R}^n$, $\varphi_i$ une partition de l'unité de $M$ relativement à $U_i$. Pour $v \in \pi^{-1}(x)$, on pose $|v|_x^2 = \sum_i \varphi_i(x)|h_i(v)|^2$ où $|h_i(v)|^2$ est la norme au carré de la projection de $h_i(v)$ sur le facteur $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire standard de $\mathbb{R}^n$.

Si $\sigma : M \to E$ est une section partout non nulle, on définit pour tout $x \in M$ le sous-espace $F_x$ de $\pi^{-1}\{x\}$ comme l'orthogonal de $\mathbb{R}\sigma(x)$, et $F$ est la réunion de tous les espaces $F_x$ pour $x \in M$.

Soit $U_i$ des ouverts de trivialisation de $E$, et $h_i$ des difféos de $\pi^{-1}(U_i) \to U_i \times R^n$. Les applications de transitions $h_j \circ h_i^{-1}$ sont de la forme: $(x, v) \mapsto (x, A(x).v)$ où $A(x) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

Fixons $i$ et $x_0 \in U_i$. On note $e_1, ..., e_n$ la base standard de $\mathbb{R}^n$, et $Q(x)$ la matrice symétrique associée au produit scalaire de $E_x$ dans la trivialisation $h_i$. On construit dans un voisinage de $x_0$ une application lisse $x \mapsto B(x) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ telle que $B(x)\sigma(x) = e_1$ , et ${}^tB(x)Q(x)B(x) = \mathrm{id}$. Tout d'abord on s'arrange pour que $Q(x_0) = \mathrm{id}$. Puis on pose $e_k(x) = e_k - \langle e_1, e_k\rangle_x e_1$ pour $k = 2, ..., n$. Ensuite on raisonne par récurrence sur la dimension.

On regarde maintenant les trivialisations $\tilde{h}_i$ obtenues en composant $h_i$ et $(x, t) \mapsto (x, B(x)t)$. Dans ces nouvelles trivialisations $F_x$ est l'hyperplan de $\mathbb{R}^n$ dont la première coordonnées s'annulent. Les applications de recollement $\tilde{h_j} \circ \tilde{h_i}^{-1}$ sont de la forme $(x, (v_1, ..., v_n)) \mapsto (x, (v_1, A'(x).(v_2, ..., v_n))$ oú $A'$ est à valeurs dans $\mathrm{O}(n-1)$. En particulier $F$ est un fibré vectoriel.

**Exercice 5**

• On a vu que c'était des variétés de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Par ailleurs l'application $(g, h) \mapsto gh$ est clairement différentiable, ainsi que $g \mapsto g^{-1}$ (le coefficient en position $(i, j)$ de l'inverse d'une matrice $M$ est donnée par le quotient du mineur associé par $\det(M)$).

$T_e\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \mathrm{M}(n, \mathbb{R})$, $T_e\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) = \{M,\ \mathrm{Tr}(M) = 0\}$, $T_e\mathrm{O}(n) = \{H \text{ anti-symétrique}\}$, $T_e\mathrm{SO}(n)$ = matrices antisymétriques de trace nulle, $T_e\mathrm{U}(n)$= matrices anti-hermitiennes, $T_e\mathrm{SU}(n)$ = matrices anti-hermitiennes de trace nulle.

• Unicité: $X(g) = (dL_g)_e \cdot X(e)$ Existence: $X(g) = (dL_g)_e \cdot v$

• $G \times T_eG \to TG$ qui associe à $(g, v)$ le vecteur $d(L_g)_e \cdot v \in T_gG$ est un isomorphisme de fibré.

• On mets une norme sur $M(n, \mathbb{R})$ telle que $\|MN\| \leq \|M\| \cdot \|N\|$ (prendre par exemple $\|M\| = \sup_{|x|=1} |M \cdot x|$ pour $| \cdot |$ la métrique standard sur $\mathbb{R}^n$). Alors $\|M^k\}/k! \leq \|M\|^k/k!$ donc $\exp(M)$ est bien définie sur $M(n, \mathbb{R})$. Que soit exp soit différentiable provient de la convergence uniforme sur les compacts de $M \mapsto \sum_{k=0}^{N} M^k/k!$. Pour calculer la différentielle, on écrit $d\exp(x)y = \lim_0 \frac{1}{t}(\sum \frac{1}{k!}(x + ty)^k - \sum \frac{1}{k!}x^k)$ en utilisant le fait que $x$ et $y$ commutent.

• Notons $\varphi_t(H) = H \cdot \exp(tx)$, et dérivons par rapport à $t$. On obtient $\frac{d}{dt}\varphi_t(H) = H \times d\exp_{tx}(x) = H\exp(tx)x$. Par ailleurs $X(\varphi_t(H)) = H\exp(tx)x$. Donc $\varphi_t$ vérifie l'équation diff. caractéristique du flot de $X$. On conclut en remarquant que $\varphi_0(H) = H$.

**Exercice 6**

- Les courbes intégrales sont données par $t \mapsto (ta+x, tb+y)$. Si $a/b$ est rationnel, alors les courbes sont fermées $(ta, tb) \in \mathbb{Z}^2$ pour $t$ adéquat. Sinon chaque courbe intégrale est dense. En effet, notons $\lambda = a/b$. Alors il existe une suite d'entier $(p_n, q_n)$ tels que $|\lambda - \frac{p_n}{q_n}| \leq \frac{1}{2q_n^2}$. Pour

$t = \frac{q_n}{b}$ , ceci montre $\mathrm{dist}((ta,tb),\mathbb{Z}^2) \leq \mathrm{dist}((q_n\lambda,q_n),(p_n,q_n)) \leq \frac{1}{2q_n} \to 0$.

- Dans la carte $[1:Y:Z]=[x:y:1]$, on a $Y=y/x, Z=1/x$; $y=Y/Z, x=1/Z$. On veut exprimer la dérivation $X=P\frac{\partial}{\partial x}+Q\frac{\partial}{\partial y}$ sur l'espaces des fonctions $G(Y,Z)$. Or $X\cdot G(Y,Z)=X\cdot G(y/x,1/x)=P(x,y)(-\frac{y}{x^2}\frac{\partial}{\partial Y}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial Z})+Q(x,y)(\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial Y}) = ...\frac{\partial}{\partial Y} - Z^2P(\frac{1}{Z},\frac{Y}{Z})\frac{\partial}{\partial Z}$. Pour que $X$ soit un champ différentiable dans la carte $[1:Y:Z]$ il faut donc que $P$ soit affine. Le même raisonnement dans la carte $[X:1:Z]$ donne que $Q$ est affine. Ensuite on vérifie que tout champ polynomial dont les deux coefficients $P$ et $Q$ sont affines s'étend à $\mathbb{R}P^2$.
- Le flot est $\phi_{t,\lambda}(x,y)=(e^tx,e^{\lambda t}y)$. On note $z=(x,y)$, et $L=d\varphi_0$, et on écrit $\varphi(z)=Lz+O(|z|^2)$, $d\varphi_z=L+O(|z|)$, $\varphi^{-1}=L^{-1}z+O(|z|^2)$, et $d\varphi_z^{-1}=L+O(|z|)$. Dans ce cas dans la base canonique $\varphi_*X_a(z)=d\varphi_{\varphi^{-1}(z)}\cdot X_a(\varphi^{-1}(z))=[L+O(1)][L^{-1}(ax,y)+O(2)]=(ax,y)+O(2)$. Donc $\varphi_*X_a=X_b$ ssi $a=b$.

**Exercice 7**

- Si $u=(x,y,z)$ et $v=(x',y',z')$ alors $u\wedge v=(yz'-y'z, zx'-z'x, xy'-x'y)$.
- On note $\Phi(a,b,c)=aX+bY+cZ$. Si $e_1,e_2,e_3$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Il faut vérifier par le calcul que $\Phi(e_i\wedge e_j)=[\Phi(e_i),\Phi(e_j)]$ pour tout $i>j$.

**Exercice 8**

Si $f\geq 0$, et $f(x)=0$, alors $\partial f=\partial\sqrt{f}^2=2\sqrt{f}(x)\partial\sqrt{f}=0$. Maintenant $f=\max\{f,0\}-\max\{-f,0\}$ donc $\partial f(x)=0$ en tout point où $f(x)=0$. Par ailleurs $\partial c=0$ pour toute fonction constante $c$, donc $\partial(f-c)(x)=0$ en tout point où $f(x)=c$. Donc $\partial f=0$ partout.

**Exercice 9**

- On prends tout d'abord $\xi_0$ le champ de vecteurs constant parallèle au vecteur $q-p$ et de norme $|q-p|$. Ensuite on le multiplie par une fonction lisse à support compact, qui vaut 1 au voisinage de la courbe intégrale de $\xi_0$ reliant $p$ à $q$ (ie au segment $(pq)$). Le flot au temps de ce champ envoie alors $p$ sur $q$.
- On prends une suite finie de cartes $U_1,U_2,...,U_n$ telles que $p\in U_1$, $U_i\cap U_{i+1}\neq\emptyset$, $q\in U_n$, et des points $p_i\in U_i\cap U_{i+1}$. On note aussi $p_0=p$, et $q=p_n$. Pour chaque $i$, on construit un difféo $\varphi_i$ qui est l'identité hors de $U_i$ et envoie $p_i$ sur $p_{i+1}$ (transporter le champ construit à la question précédente dans la carte $U_i$ de telle sorte que son flot envoie $p_i$ sur $p_{i+1}$). Alors la composition $\varphi=\varphi_n\circ...\circ\varphi_1$ envoie $p$ sur $q$.
- Pour celà il faut raffiner la question précédente, et s'arranger pour que $\varphi$ fixe un nombre arbitraire de points distincts de $p$ et $q$. Ensuite

on procède par récurrence sur le nombre de points. Remarquer qu'en dimension 1 l'argument ne fonctionne pas: la position des points sur le cercle est un invariant de difféomorphisme.

**Exercice 10**

- On se place en coordonnées complexes $z_j = x_j + iy_j$ de telle sorte que $S^{2p+1} = \{\sum |z_j|^2 = +1\}$. L'espace tangent en un point $z_j \in S^{2p+1}$ est alors l'espace vectoriel réel $\{w,\ \mathrm{Re}(\bar{z}w) = 0\}$. Le vecteur tangent réel $iz$ en $z$ (ou de manière équivalente $(-y_j, x_j)$ en $z = (x_j, y_j)$) détermine un champ partout non nul.
- Soit $\tilde{F}(t,x) = (t, F_t(x))$. Pour tout point $x \in K$, la différentielle $d\tilde{F}(0,x)$ est inversible donc on peut trouver $\epsilon(x), \varepsilon(x) > 0$ telle que $F_t$ est un difféo de la boule $B(x, \epsilon(x))$ sur son image pour tout $|t| \leq \varepsilon(x)$. Comme $K$ est compact, on extrait une famille finie de telles boules recouvrant $K$, et on peut choisir $\epsilon, \varepsilon$ indépendant du point $x$. On vérifie maintenant que $F_t$ est injective pour $t$ assez petit. On prend $x \neq y$. Si $|x-y|$ est grand, alors $|F_t(x) - F_t(y)| \geq |x-y| - |t||v(x) - v(y)| > 0$. Sinon $x$ et $y$ sont dans une même boule du type $B(x, \epsilon(x))$ sur lequel $F_t$ est injective.

  On applique la formule de changement de variables: $\mathrm{Vol}(F_t(K)) = \int_K \mathrm{Jac}(F_t)\, d\lambda$, or $\mathrm{Jac}(F_t)$ est un polynome en $t$.
- L'image de la sphère $S^n$ est incluse dans la sphère de rayon $\sqrt{1+t^2}$ car $v(x)$ et $x$ sont orthogonaux. Mais $F_t(S^n)$ est une sous-variété compacte de $\mathbb{R}^{n+1}$ car $F_t$ est un difféo, donc son image doit être égale à la sphère de rayon $\sqrt{1+t^2}$.
- On étend le champ à $\mathbb{R}^{n+1}$ par homogénéité en posant $v(x) = v(\frac{x}{|x|})|x|$. Ensuite on prend $\alpha$ petit, et on calcule $\mathrm{Vol}F_t\{1-\alpha \leq |x| \leq 1+\alpha\} = \mathrm{Vol}\{1-\alpha \leq \frac{|x|}{\sqrt{1+t^2}} \leq 1+\alpha\} = c(\sqrt{1+t^2})^n$. Ceci est un polynome en $t$ ssi $n$ est pair.

**Exercice 11**

On a deux champs de vecteurs parallèles à la distribution $X_1 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$, et $X_2 = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}$. Or $[X_1, X_2] = -\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}$ qui n'est pas parallèle à $\xi$ hors de $\{x = 0\}$. La distribution n'est donc pas involutive.