TD de Géométrie Différentielle et Riemannienne
UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT
16 SEPTEMBRE 2009

Exemples et contre-exemples

Exercice 1

(1) Déterminer les paramètres $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquels l'ensemble $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2 = xyz+\alpha\}$ est une variété.
(2) De même, déterminer les paramètres $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y^2 = x^3 - 3px + q\}$ est une variété.

Exercice 2

Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-variétés de $\mathbb{R}^3$.

$$S_1 = \begin{cases} x^3+y^3+z^3 = 1 \\ xy = z \end{cases} \qquad S_2 = \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ x^2+y^2 = z \end{cases}$$

Exercice 3

Une sphère avec un cheveu est-elle une variété?

Exercice 4

L'espace des matrices inversibles $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ est un ouvert de $M(n,\mathbb{R})$. On peut donc le munir d'une structure de variété différentiable canonique.

- Calculer la différentielle de l'application det : $\mathrm{M}(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ en $M \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.
- Montrer que $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) = \{M, \det(M) = +1\}$ est une sous-variété de dimension n^2-1.
- Soit $\mathrm{O}(n) = \{M, {}^tMM = \mathrm{id}\}$ le groupe orthogonal. Montrer que $\mathrm{O}(n)$ est compact.
- Montrer que la différentielle de l'application $M \mapsto {}^tMM$ est de rang constant sur $\mathrm{O}(n)$.
- En déduire que $\mathrm{O}(n)$ est une variété et calculer sa dimension.
- Le groupe spécial orthogonal est défini comme $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R}) = \mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}(n)$. Montrer que $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ est une variété.
- Montrer que les groupes unitaire $\mathrm{U}(n) = \{M \in M(n,\mathbb{C}), {}^t\bar{M}M = \mathrm{id}\}$ et spécial unitaire $\mathrm{SU}(n) = \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ sont des variétés.

Exercice 5

Soit M l'espace obtenue en quotientant $\mathbb{R} \times \{0\} \cup \mathbb{R} \times \{1\}$ par la relation d'équivalence: $(x,0) \sim (x,1)$ pour tout $x \neq 0$. On munit M de la topologie rendant les applications naturelles de $\mathbb{R} \times \{0\}$ et $\mathbb{R} \times \{1\}$ sur M des homéomorphismes sur leur image.

(1) Montrer que tout point de M admet un voisinage homéomorphe à un segment ouvert.

(2) L'espace M est-il une variété?

Exercice 6 (la droite longue) $\circledast$

Un ordre total $<$ sur un ensemble A est dit bien ordonné si tout sous-ensemble non vide de A admet un élément minimal. Un segment de A est un ensemble $B \subset A$ tel que $b \in B$ et $a < b$ implique $a \in B$.

- Soit B, B' deux segments d'un ensemble bien ordonné A, et $f : B \to B'$ une bijection préservant l'ordre. Montrer que $B = B'$ et $f = \mathrm{id}$.
- Soit $(A, <)$ et $(A', <')$ deux ensembles bien ordonnés. Montrer que A est en bijection croissante avec un segment de A' ou vice versa.
- Un ordinal est par définition un ensemble bien ordonné (à bijection croissante près). On ordonne les ordinaux par la relation $(A, <) \prec (A', <')$ ssi A est un segment de A'. Montrer que tout ensemble d'ordinaux admet un minimum.
- Soit Ω l'ensemble des ordinaux dénombrable. Montrer que Ω est non dénombrable.
- Montrer que tout $a \in \Omega$ est représenté par un sous-ensemble bien ordonné de $\mathbb{R}$, mais que Ω n'est pas en bijection croissante avec un segment de $\mathbb{R}$.
- Soit $L = \Omega \times [0, 1[$ muni de l'ordre $(a, t) < (b, s)$ ssi $a < b$ ou $a = b$ et $t < s$. On munit L de la topologie dont les segments ouverts pour la relation d'ordre forment une base. Montrer que tout point de L admet un voisinage homéomorphe à un segment de $\mathbb{R}$.
- L est-il une variété?

Exercice 7 (la surface de Prüfer)

On munit chaque plan $\mathbb{R}^2 \times \{a\}$ de sa structure différentiable canonique. Considérons l'espace M obtenu comme réunion disjointe des plans $\mathbb{R}^2 \times \{a\}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ modulo la relation d'équivalence $(x, y, a) \sim (x', y', a')$ ssi $y = y' > 0$, et $a + xy = a' + x'y'$. On munit M de la topologie quotient, dont une base d'ouvert est donnée par les ensembles de la forme $\pi_a^{-1}(U)$ avec U ouvert de $\mathbb{R}^2 \times \{a\}$ et où π_a est l'application canonique $\pi_a : \mathbb{R}^2 \times \{a\} \to M$.

- En étudiant en détail la relation d'équivalence, montrer que tout point admet un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et que M est un espace topologique séparé.
- Montrer que $(0, 0, a)$ forme un ensemble discret.
- M est-il une variété?
- Soit $H : [0, 1] \times M \to M$ défini par:

$$H(s, (x, y, a)) = \begin{cases} \left(x\sqrt{\frac{1-s+sy}{1+sy}}, y\sqrt{\frac{1+sy}{1-s+sy}}, a\right) & \text{si } y > 0 \\ \left(x\sqrt{1-s^2}, y\sqrt{1-s^2}, a\right) & \text{si } y \leq 0 \end{cases}$$

  Montrer que H est bien définie et continue. En déduire que M est contractile.

Immersions, submersions, plongements

Exercice 8

(1) L'application $t \in \mathbb{R} \mapsto (t^2, t^4) \in \mathbb{R}^2$ est-elle une immersion? Son image est-elle une sous-variété de $\mathbb{R}^2$?
(2) Même question pour l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto (t^2, t^3)$. Montrer qu'il existe un homéomorphisme du plan envoyant $x^3 = y^2$ sur $x = 0$.
(3) L'application $t \in [0,1] \mapsto (t\cos(t^{-1}), t\sin(t^{-1})) \in \mathbb{R}^2$ est-elle une immersion? Un plongement? Un plongement propre?

Exercice 9

Soit N, M deux variétés, et $f : N \to M$ une immersion lisse.

(1) Si $f : N \to f(N)$ est un homéomorphisme, montrer que $f(N)$ est une sous-variété de M.
(2) Supposons que les dimensions de M et de N sont égales. Montrer que f est ouverte.
(3) Peut-on immerger la sphère S^n dans $\mathbb{R}^n$?

Exercice 10 (plan projectif)

- Montrer que l'application $f(x,y,z) = (yz, zx, xy)$ de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ induit une applicationt différentiable, et injective de $\mathbb{R}P^2$ dans $\mathbb{R}^3$. Cette application est-elle une immersion?
- Soit $F(x,y,z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$. Montrer que F induit une application lisse de $\mathbb{R}P^2 \simeq S^2/\{-\mathrm{id}\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^4$, et que cette application est un plongement.

Exercice 11

Construire une immersion du tore moins un point $S^1 \times S^1 \setminus \{p\}$ dans $\mathbb{R}^2$. Construire une immersion de la bande de Möbius dans $\mathbb{R}^3$. Peut-on immerger la bande de Möbius dans $\mathbb{R}^2$ $\circledast$?

Exercice 12 (fibration de Hopf)

- Montrer que $\mathbb{C}P^1$ est difféomorphe à la sphère S^2.
- On munit $\mathbb{C}^2$ de sa métrique standard $|z| = |(z_1, z_2)| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$, et on considère la sphère $S^3 = \{z \in \mathbb{C}^2,\, |z| = 1\}$. Montrer que l'application naturelle $\pi : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{C}P^1$ restreint à S^3 est une submersion dont les fibres sont des cercles.

Topologie

Exercice 13 (partition de l'unité)

Soit M une variété différentiable. Un *recouvrement ouvert* d'un sous-ensemble X de M est la donnée d'une famille d'ouverts $\{U_i\}_{i \in I}$ tels que $\cup_i U_i \supset X$. Une *partition de l'unité* subordonnée à $\{U_i\}_{i\in I}$ relativement à

X est la donnée pour chaque i d'une fonction $\varphi_i : U_i \to [0,1]$ à support compact dans U_i et telle que $\begin{cases} \forall x \in \cup_I U_i,\ \{i \in I,\ \varphi_i(x) \neq 0\} \text{ est fini;} \\ \forall x \in X,\ \sum_I \varphi_i(x) = +1. \end{cases}$

- Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$, et $\{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement ouvert *fini* de K.
  (1) Montrer qu'il existe $\rho > 0$ et des compacts $K_i \subset U_i$ tels que $K \subset \cup_I K_i$ et $\mathrm{dist}(K_i, \mathbb{R}^n \setminus U_i) = \rho$.
  (2) Construire une fonction lisse croissante $\chi : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$ telle que $\chi \equiv 0$ sur $[0,1]$ et $\chi \equiv 1$ sur $[2,+\infty)$.
  (3) Déduire de la question précédente une fonction $\theta_i : U_i \to [0,1]$ à support compact dans U_i, et telle que $\theta_i | K_i \equiv 1$.
  (4) Montrer que $\varphi_i = \theta_i / (\sum_{j\in I} \theta_j)$ est une partition de l'unité relativement à K.
- Soit M une variété compacte munie d'un recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i\in I}$. Montrer qu'il existe une partition de l'unité subordonnée à U_i (et relativement à M).
- Montrer que toute variété compacte se plonge dans $\mathbb{R}^N$ pour N assez grand (dépendant de M).
- $\circledast$ Soit M une variété différentiable quelconque munie d'un recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i\in I}$. Utiliser l'existence d'une suite de compacts $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $M \subset \cup_n K_n$ pour montrer l'existence d'une partition de l'unité subordonnée à U_i (relativement à M).

Construction par recollement et quotient

Exercice 14

Montrer que $\mathbb{R}P^2$ est homéomorphe au disque unité $D(0,1)$ de $\mathbb{R}^2$ où les points du bord sont identifiés par la relation $(x,y) \sim (-x,-y)$. De même, montrer que $\mathbb{R}P^2$ est homéomorphe au carré $[0,1]^2$ modulo les identifications $(x,0) \sim (1-x,1)$ et $(0,y) \sim (1,1-y)$.

Exercice 15 (éclatement réel)

- Montrer que $V_n = \{(p,l) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}P^{n-1},\ p \in l\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}P^{n-1}$.
- Montrer que la première projection $\pi_1 : V_n \to \mathbb{R}^n$ est lisse et identifier $\pi_1^{-1}\{p\}$ pour tout $p \in \mathbb{R}^n$.
- Déterminer à quelle surface est difféomorphe V_2.
- En utilisant la seconde projection $\pi_2 : V_n \to \mathbb{R}P^{n-1}$, montrer que V_n se rétracte sur $\mathbb{R}P^{n-1}$. En d'autres termes construire une application lisse $H : V_n \times [0,1] \to V_n$ telle que $H(0,x) = x$, $H(1,x) = (0, \pi_2(x))$ pour tout $x \in V_n$ et $H(t,x) = x$ pour tout $x \in \pi_1^{-1}\{0\}$.
- Soit M une variété différentiable de dimension n, et $p \in M$. En utilisant une construction par chirurgie, construire une variété $\tilde{M}$ et une application $\pi : \tilde{M} \to M$ telle que π est un difféomorphisme de $\pi^{-1}(M \setminus \{p\})$ et $\pi^{-1}\{p\}$ est difféomorphe à $\mathbb{R}P^{n-1}$.