TD1 de Géométrie Différentielle du Septembre 2009
UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT

Exercice

(1) $f_\alpha(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-xyz-\alpha$; $df_\alpha = (2x-yz, 2y-xz, 2z-xy)$. Le rang de df_α est nul ssi $(x,y,z) = (0,0,0), (2,2,2), (-2,-2,2), (-2,2,-2), (2,-2,-2)$. Par le thm du rang: $f_\alpha^{-1}\{0\}$ est une variété si $\alpha \neq 0, 4$.

Si $\alpha = 0$, le thm de Morse (Hirsch Differential Topology p.143) donne un difféo local en 0 tel que $f \circ \varphi = x^2+y^2+z^2$. Donc 0 est un point isolé de f_0^{-1} qui est une variété.

Si $\alpha = 4$, on fait le chgt de variable $X = x-2, Y = y-2, Z = z-2$, on a alors $f_4^{-1}\{0\} = \{X^2+Y^2+Z^2-2(YZ+ZX+XY)-XYZ = 0\}$. La forme quadratique $X^2+Y^2+Z^2-2(YZ+ZX+XY)$ est non-dégénérée, à nouveau par le thm de Morse, on a $f = x_1^2+x_2^2-x_3^2$ dans des coordonnées adéquates, donc $f_4^{-1}\{0\}$ n'est pas une variété en $(2,2,2)$.

(2) $f(x,y) = y^2-x^3+3px-q$; $df = (2y, -3x^2+3p)$. Si $q^2 \neq 4p^3$, le thm du rang montre $f^{-1}\{0\}$ est une variété. Sinon à chgt de coordonnées près, soit $p = q = 0$, soit $p = 1, q = 2$. Dans le premier cas, $y^2 = x^3$ n'est pas une variété en $(0,0)$. En effet, si on fait tendre un pt (x,y) vers $(0,0)$ le long de la courbe $y^2 = x^3$, le vecteur unitaire associé tendra toujours vers $(1,0)$. Si $y^2 = x^3$ était une sous-variété, on pourrait aussi obtenir $(-1,0)$. Dans le second cas, $y^2 = x^3-3x+2$ et au point $(1,0)$, on vérifie que la courbe est constituée de deux droites se croisant transversalement. En effet, en faisant le chgt de coordonnée $X = x-1$, $Y = y$, la courbe est donnée par $Y^2+3X^2-X^3 = 0$. On prends alors X' tel que $(X')^2 = 3X^2-X^3$ (appliquer le thm d'inversion locale). Dans les coordonnées (X', Y) la courbe est donnée par $Y^2-(X')^2 = 0$.

Exercice

Le thm du rang montre que S_1 et S_2 sont des sous-variétés. S_2 est une union disjointe de deux cercles.

Exercice

La sphère avec un cheveu n'est pas une variété par invariance de la dimension.

Exercice

$d(\det)_M \cdot H = \det(M) \times \mathrm{Tr}(M^{-1}H)$. Le thm du rang implique que $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ est une variété. Le groupe $\mathrm{O}(n)$ est fermé borné donc compact. $\varphi(M) = {}^tMM$, $d\varphi_M \cdot H = {}^tHM + {}^tMH$. Si M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, le rang de $d\varphi_M$ est $n^2-n(n-1)/2$ (autre méthode: on remarque que l'image de $d\varphi$ appartient à l'ensemble des matrices symétriques, et que $d\varphi_M(MS) = 2S$ pour toute matrice symétrique). Toute matrice de $\mathrm{O}(n)$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, donc le thm du rang s'applique, et $\mathrm{O}(n)$ est une variété de dimension

$n(n-1)/2$. SO(n) est une des deux composantes connexes de O(n): c'est donc aussi une variété de dimension $n(n-1)/2$. la dimension de U(n) est n^2, et de SU(n) est n^2-1.

Exercice

Soit $\pi : \mathbb{R} \times \{0,1\} \to M$ la projection naturelle. Un ensemble U de M est ouvert ssi $\pi^{-1}(U)$ est ouvert. Le point $\pi(0,0)$ appartient à $\pi(]-1,+1[\times 0)$ qui est ouvert dans M. Mais la suite de points $\pi(1/n,0) = \pi(1/n,1)$ possède deux points d'accumulation $\pi(0,0)$ et $\pi(0,1)$. Donc M n'est pas séparé.

Exercice (la droite longue et la surface de Prüfer)

Une correction détaillée est donnée dans le livre de Spivak Vol. I Appendice A. L et M ne sont pas des variétés car ces espaces admettent un ensemble non dénombrable discret.

Exercice

(1) (t^2,t^4) n'est pas une immersion mais $y = x^2$ est une sous-variété.

(2) (t^2,t^3) n'est pas une immersion et $y^2 = x^3$ n'est pas une sous-variété (voir le premier exercice (1)). L'application $(x^{1/3}, y)$ est un homéo envoyant $y^2 = x^3$ sur $x = 0$.

(3) $X(t) = (t\cos(t^{-1}), t\sin(t^{-1}))$ est une immersion car $|\frac{dX}{dt}|^2 = 1 + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t}\sin(\frac{2}{t}) > 0$. L'application est un plongement mais pas un plongement propre.

Exercice

(1) On prend $p \in f(N)$, et on note $q = f^{-1}(p) \in N$. On fixe U un voisinage de q, V un voisinage de p et des coordonnées dans U et V respectivement telles que $(y_1,...,y_k) = f(x_1,..,x_n,x_{n+1},...,x_m) = (x_1,...,x_n,0,...,0)$. Comme $f : N \to f(N)$ est un homéomorphisme, on peut trouver un voisinage $V' \subset V$ de q tel que $\pi^{-1}(V')$ est inclus dans U. Dans V', on a $f(N) \cap V' \subset f(U)$, donc l'ensemble $f(N)$ est un ouvert de $y_{n+1} = ... = y_k = 0$, ce qui montre que $f(N)$ est une sous-variété.

(2) f est ouverte par le thm du rang.

(3) Si $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ est une immersion, alors $f(S^n)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ qui est aussi compact. Contradiction.

Exercice (plan projectif)

(1) On note $\pi : S^2 \to \mathbb{R}P^2$: c'est un difféo local. Comme $f(-x,-y,-z) = (x,y,z)$, il existe $g : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^3$ unique telle que $g \circ \pi = f$. Comme π est un difféo local, et f est différentiable, g est aussi différentiable. Le rang de la différentielle de g est le même que celle de f. On a: $df_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{bmatrix}$.

Au point $(1,0,0)$, df est de rang 1 donc sa restriction à l'espace tangent de S^2 aussi. En particulier, f ne peut être une immersion en ce point.

(2) On calcule maintenant $dF_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} 2x & -2y & 0 \\ y & x & 0 \\ z & 0 & x \\ 0 & z & y \end{bmatrix}$. On vérifie que la différentielle dF en $(x,y,z) \in S^2$ restreinte à l'espace tangent de S^3 i.e. à l'espace $(h_1,h_2,h_3) \in \mathbb{R}^3$ t.q. $xh_1 + yh_2 + zh_3 = 0$ est de rang constant égal à 2. Celà montre que F est une immersion de $\mathbb{R}P^2$ dans $\mathbb{R}^4$. Ensuite, on montre que F est injective.

Exercice

Immersion du tore moins un point: le tore moins un point est difféo à l'union de deux anneaux s'intersectant le long d'un carré (regarder dans le modèle du carré). Il suffit donc d'immerger un anneau.

Immersion de la bande de Möbius: on plonge un cercle dans un plan $\mathbb{R}^3$, et on accroche à chaque point $\theta \in [0, 2\pi]$ du cercle une droite passant par θ et faisant un angle θ avec le plan contenant le cercle.

La bande de Möbius ne s'immerge pas dans $\mathbb{R}^2$ car sinon elle serait orientable.

Exercice (fibration de Hopf)

(1) Voir Gallot-Hulin-Lafontaine p.12.

(2) La différentielle $d\pi$ est une application linéaire complexe de rang 1. L'espace tangent à S^3 est une hypersurface réelle de dimension 3, donc en tout point $TS^3 \cap \ker(d\pi)$ est de dimension réelle 1. Donc π est une submersion.

Exercice (partition de l'unité)

• (1) Pour chaque $x \in K \cap U_i$, on pose $\rho(x) = \mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus U_i)$. On extrait un recouvrement fini $B(x_j, \rho(x_j))$ de K, et on pose $\rho = \min \rho(x_j)$. Enfin on définit $K_i = \{x \in U_i,\ \mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus U_i) \geq \rho\}$.

(2) Définir χ_0 comme 0 sur $]-\infty, 0]$ et $\exp(-1/t(t-1))$ sur $[0,1]$, et 0 sur $[1, +\infty[$. C'est une application lisse. Puis poser $\chi_1(t) = \int_{-\infty}^t \chi_0 ds / \int_{\mathbb{R}} \chi_0 ds$. Cette fonction est nulle sur $]-\infty, 0]$, constante égale à 1 sur $[1, +\infty[$. Enfin $\chi(t) = \chi_1(t-1)$.

(3) On recouvre K_i par un nombre fini de boules de rayon $\rho/2$ et relativement compactes dans U_i. Pour chacune de ces boules $B_k = B(y, \rho/2)$, on définit $\psi_k(x) = \chi(1 - \frac{1}{\rho}(\mathrm{dist}(x,y) - \frac{3\rho}{2})$. La fonction $\psi = \sum \psi_k$ est strictement positive sur K_i et à support compact. Soit $\delta = \inf_{K_i} \psi > 0$. La fonction $\theta_i = \psi/(\chi(2\psi/\delta))$ est à support compact et constante égale à 1 sur K_i.

(4) Facile.

• On peut supposer U_i fini. On fixe (V_j, g_j) un atlas fini $g_j : V_j \to \mathbb{R}^n$ difféos, on fixe K_j compact de V_j tel que $\cup K_j \supset M$. On applique le résultat précédent au recouvrement $U_i \cap V_j$ des V_j: $\varphi_i^j : U_i \cap V_j \to [0,1]$ à support compact dans U_i tel que $\sum_i \varphi_i^j = 1$ sur K_j. On pose alors $\varphi_i' = \sum_j \varphi_i^j$

qui est à support compact dans U_i. De plus $\psi := \sum \varphi'_i = \sum_{i,j} \varphi_i^j \geq 1$ sur $\cup K_j = M$. Finalement, $\varphi_i = \varphi'_i/\psi$ convient.

• On fixe un atlas fini $\{U_i\}_{1\leq i\leq N}$ et des difféos $h_i : U_i \to \mathbb{R}^n$. On extrait une famille couvrante $B_k \subset M$ finie de la famille $h_i^{-1}B(x,1)$. Pour chaque B_k on note B'_k la boule correspondante de $\mathbb{R}^n$ de rayon 2 la contenant. On note $h'_k : B'_k \to B(0,2) \subset \mathbb{R}^n$ le difféo naturel. On note φ_k une fonction lisse sur B'_k à support compact, et constante égale à 1 sur B_k. On pose ensuite $f(x) = (\varphi_k(x)h_k(x), \varphi_k(x)) \in (\mathbb{R}^n)^N \times \mathbb{R}^N$. Il est facile de voir que cela donne f est une immersion injective (donc un plongement) de M dans $\mathbb{R}^{(n+1)N}$.

• Le point est de montrer que tout recouvrement U_i admet un raffinement localement fini i.e. pour tout point $p \in M$, il existe un nombre fini d'indices i tels que $p \in U_i$. On dit que M est paracompact. Voir Lee Smooth Manifolds pour l'implication dénombrable à l'infini implique paracompact.

Chaque point $p \in M$ admet un ouvert $W(p)$ relativement compact dans M et difféo par g_p à la boule unité, et contenant $V(p) = g_p^{-1}B(0,1/2)$. On peut supposer de plus que le recouvrement $W(p)$ est plus fin que U_i. On extrait alors un recouvrement localement fini des $V(p)$, que l'on note V_j. On note aussi W_j le recouvrement correspondant. On considère $V_j = g_j^{-1}B(0,1/2)$. On prends φ'_j lisse, égal à 1 sur V_j et à support compact dans W_j. Alors $\varphi = \sum \varphi_j$ est fini et > 0 sur M. On pose $\varphi_j = \varphi'_j/\varphi$.

Exercice

On considère la projection naturelle $\pi : S^2 \to \mathbb{R}P^2$. On note $S^2_+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \geq 0\} = S^2 \cap \{z \geq 0\}$: c'est un disque fermé. La projection $\pi : S^2_+ \to \mathbb{R}P^2$ est surjective, injective au-dessus du disque ouvert, et identifie $(x,y,0)$ à $(-x,-y,0)$. En prenant deux paires de points du cercle diamétralement opposés, et les ramenant aux sommets d'un carré, on voit que $\mathbb{R}P^2$ est le quotient du carré modulo les relations $(x,0) \sim (1-x,1)$ et $(0,y) \sim (1,1-y)$.

Exercice (éclatement réel)

• On travaille dans une des n cartes U recouvrant $\mathbb{R}P^{n-1}$: $(y_1,...,y_{n-1}) \mapsto [y_1 : ... : y_{n-1} : 1]$. Alors dans $\pi_2^{-1}(U)$, l'ensemble V_n est définie comme l'ensemble des $(x_1,.....,x_n,[l_1,...,l_n]$ tels que $\frac{x_1}{l_1} = ... = \frac{x_n}{l_n}$ i.e. $x_il_j - x_jl_i = 0$ pour tout $i \neq j$. En d'autres termes dans les coordonnées x_i, y_j, on a $V_n \cap \pi_2^{-1}(U) = \cap_{i=1}^{n-1}\{x_i = x_ny_i\}$. L'application $f(x,y) = (x_i - x_ny_i)$ est de rang maximal hors de $\{x_n = 0\}$ qui n'intersecte pas $\pi_2^{-1}(U)$. Le thm du rang implique que $V_n \cap \pi_2^{-1}(U)$ est un variété. Finalement V_n est une sous-variété de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}P^{n-1}$.

• La préimage $\pi_1^{-1}(p)$ est un point si $p \neq (0)$, et $\mathbb{R}P^{n-1}$ si $p = (0)$.

• La surface V_2 est difféomorphe à la bande de Möbius. Pour le voir, on paramétrise $\mathbb{R}P^1$ par l'angle $\theta \in [0,\pi]$ avec une droite fixe. On dessine $\mathbb{R}^2 \times [0,\pi]$ puis V_2 dans ce produit.

• On pose $H(t,(x,l))=(tx,l)$.
• On prends un ouvert U autour de p et un difféo $h: U \to B(0,1)$ tel que $h(p)=0$. On considère maintenant le recollement de $M\setminus\{p\}$ avec $\pi_1^{-1}B(0,1)$ à l'aide du difféomorphisme $\pi_1^{-1}\circ h$ de $U\setminus\{p\}$ sur $\pi_1^{-1}B(0,1)\setminus\{0\}$. L'espace obtenu est une variété séparé $\tilde{M}$. Soit π définie par id sur $M\setminus\{p\}$ et $h^{-1}\circ\pi_1$ sur $\pi_1^{-1}B(0,1)$. Cette application est différentiable de $\tilde{M}$ sur M et vérifie les propriétés demandées.