SURFACES DE RIEMANN: FEUILLES D'EXERCICES DU CHAPITRE II (2022)

II.1 Application du théorème d'uniformisation.

Exercice 1 (Théorème de Picard).

(a) Montrer que le revetement universel de $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ est le disque unité.

(b) Montrer que toute application entière $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui omet deux valeurs est nécessairement constante.

(c) Soit $f_n \colon \mathbb{D} \to \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ une suite de fonctions holomorphes telle que $f_n(0)$ n'accumule ni 0, ni 1, ni ∞. Montrer qu'il existe une sous-suite f_{n_j} qui converge localement uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$ vers une fonction holomorphe $f \colon \mathbb{D} \to \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$.

(d) On suppose maintenant que $f_n \colon \mathbb{D} \to \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ est une suite de fonctions holomorphes telles que $f_n(0) \to 1$.

Construire une fonction g_n holomorphe telle que $g_n^2 = f_n$, et $g_n(0) \to -1$. En déduire que f_n converge localement uniformément vers la fonction constante 1.

(e) Soit $f \colon \mathbb{D} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ une fonction holomorphe. On suppose qu'il existe une suite de points $z_n \to 0$ tels que $f(z_n)$ est borné. En utilisant la question précédente à la suite de fonctions $f_n(z) = f(2z_n z)$, montrer que f est borné au voisinage de 0 puis s'étend holomorphiquement.

(f) Montrer le théorème de Picard: si f est une fonction holomorphe sur $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ dont l'image évite deux points, alors f est méromorphe en 0.

Exercice 2.

(a) Montrer qu'un automorphisme $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ n'admettant aucun point fixe dans $\mathbb{H}$ est conjugué soit à la translation $z \mapsto z+1$, soit à une homothétie $z \mapsto az$ avec $0 < a$.

(b) En déduire que les seuls groupes abéliens discrets de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ agissant sans point fixe sur $\mathbb{H}$ sont isomorphes à $\mathbb{Z}$.

(c) Montrer que toute surface de Riemann S connexe et non simplement connexe dont le groupe fondamental est abélien est biholomorphe soit à une couronne $\mathbb{C}_{r_1,r_2} = \{r_1 < |z| < r_2\} \subset \mathbb{C}$ avec $r_1 \in [0,+\infty)$, $r_2 \in (0,+\infty]$, soit à une courbe elliptique.

(d) Montrer que deux couronnes $\mathbb{C}_{r_1,r_2}$ et $\mathbb{C}_{r_1',r_2'}$ sont biholomorphes ssi $\log|r_2/r_1| = \log|r_2'/r_1'|$.

Exercice 3. En utilisant le théorème de Koebe-Poincaré, montrer que toute surface de Riemann connexe possède un groupe fondamental dénombrable, et une base dénombrable d'ouverts.

Date: December 7, 2022.

II.2 Fonctions sous-harmoniques.

Exercice 4. Soit h une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, et f une fonction holomorphe. Montrer que $\Delta(h \circ f) = (\Delta h) \circ f \times |f'|^2$.

Exercice 5. Soit $f\colon S^1 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit la fonction sur le disque fermé $Pf(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$ et $Pf(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)f(re^{it})dt$ pour $r < 1$.

(a) Montrer que $\sup_{\mathbb{D}} |Pf| \leq \sup_{S^1} |f|$.
(b) En déduire que Pf est continue sur le disque fermé.

Exercice 6. Montrer que toute fonction harmonique sur $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, bornée au voisinage de 0 s'étend comme fonction harmonique en 0.

Exercice 7. Montrer que pour toute fonction $u\colon \Omega \to [-\infty, \infty)$ sous-harmonique, on a $\limsup_{\zeta \to z} u(\zeta) = u(z)$.

Exercice 8. Soit $z_n \neq 0$ une suite de points distincts de $\mathbb{D}$ tel que $\{z_n\}$ est dense dans $\mathbb{D}$.

(a) Construire une suite de $\alpha_n > 0$ tel que $\sum_n \alpha_n \log|z_n| > -\infty$.
(b) Montrer que la suite $u_n(z) = \sum_{j \leq n} \alpha_j \log(\frac{1}{2}|z - z_j|)$ est décroissante vers une fonction sous-harmonique u sur $\mathbb{D}$.
(c) Montrer que $\{u = -\infty\}$ est dense et non-dénombrable (pour celà, considérer les ensembles de sous-niveau $\{u < -N\}$).

Exercice 9. Montrer qu'une fonction $u\colon \Omega \to [-\infty, \infty)$ telle que u et $-u$ sont toutes les deux sous-harmoniques est harmonique.

Exercice 10. Montrer que $\varphi(u_1, \cdots, u_n)$ est sous-harmonique dès que $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est convexe, croissante en chaque variable, et $u_1, \cdots, u_n$ sont sous-harmoniques.

Exercice 11. Soit Ω un ouvert connexe du plan complexe. Montrer que la fonction $u(z) = -\log \operatorname{dist}(z, \partial\Omega)$ est sous-harmonique.

Exercice 12. Soit Ω un ouvert connexe borné du plan complexe, et $u\colon \Omega \to [-\infty, \infty[$ une fonction sous-harmonique. On suppose que $\limsup_{z \to \zeta} u(z) \leq 0$ pour tout $\zeta \in \partial\Omega$.

Montrer que $u \leq 0$.

Exercice 13. Soit Ω un ouvert connexe du plan complexe, et $u\colon \Omega \to [-\infty, +\infty[$ une fonction sous-harmonique.

(a) On suppose que $u(z_0) > -\infty$. Montrer que pour tout $r > 0$ tel que $\bar{\mathbb{D}}(z_0, r) \subset \Omega$ alors $\int_{\bar{\mathbb{D}}(z_0,r)} |u| d\mathrm{Leb} < \infty$.
(b) Montrer que pour tout compact $\int_K |u| d\mathrm{Leb} < \infty$. On considèrera l'ensemble E des points $z_0 \in \Omega$ tel qu'il existe un voisinage U de z_0 pour lequel $\int_U |u| d\mathrm{Leb} < \infty$.

(c) Montrer que pour toute fonction sous-harmonique $\{u = -\infty\}$ est de mesure de Lebesgue nulle.
(d) On suppose que $\bar{\mathbb{D}}(z_0, r) \subset \Omega$. Montrer que $\int_0^{2\pi} |u(z_0 + re^{i\theta})| d\text{Leb} < \infty$.
(e) Montrer que pour toute fonction sous-harmonique $\{u = -\infty\}$ ne peut contenir un cercle inclus dans Ω.

Exercice 14. Soit $u_n \colon \Omega \to [-\infty, \infty)$ une suite de fonctions sous-harmoniques telle que $u_n \leq 0$. On définit les fonctions $u(z) = \sup_n u_n(z)$, and

$$u^*(z) = \limsup_{w \to z} u(w) \ .$$

Montrer que u^* est semi-continue supérieurement, puis vérifie

$$u^*(z) \leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{D(0,r)} u(z + w) d\text{Leb}(w) \ .$$

En déduire que u^* est sous-harmonique, et que $u = u^*$ presque partout.

Exercice 15.
(a) Soit $u \colon \mathbb{D}(0, 1) \setminus \{0\} \to [-\infty, +\infty[$ une fonction sous-harmonique.
Montrer que si u est bornée supérieurement au voisinage de 0, alors il existe une fonction sous-harmonique $\bar{u} \colon \mathbb{D}(0, 1) \to [-\infty, +\infty[$ telle que $\bar{u} = u$ sur $\mathbb{D}(0, 1) \setminus \{0\}$.
Pour celà, on pourra considérer la suite de fonctions $u(z) + \frac{1}{n} \log |z|$.
(b) Montrer que toute fonction sous-harmonique bornée sur $\mathbb{C}$ est constante.
(c) Construire une fonction sous-harmonique continue $u \colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$.

Exercice 16. On fixe X une surface de Riemann connexe, et $Y \subset X$ un domaine ouvert de X à bord lisse. Soit $h \colon \partial Y \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Une solution au problème de Dirichlet avec données au bord h est une fonction continue $u \colon \bar{Y} \to \mathbb{R}$, harmonique dans Y, et telle que $u|_{\partial Y} = h$.
(a) Montrer que si h est bornée, il existe toujours une solution au problème de Dirichlet bornée sur Y.
(b) On suppose que Y est relativement compacte. Montrer qu'il existe une unique solution au problème de Dirichlet
(c) On suppose que $X = \mathbb{C}$, et $Y = \mathbb{H}$. Montrer qu'il existe une fonction h telle que la solution au problème de Dirichlet n'est pas unique.
(d) On suppose que $X = \mathbb{C}$, et $Y = \mathbb{H}$. Si $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, et $\lim_{|x| \to \infty} h(x) = 0$, montrer qu'il existe une unique solution au problème de Dirichlet sur $\mathbb{H}$ telle que $\lim_{\Im(z) \to \infty} u(z) = 0$.
(e) On suppose que X n'est pas compacte et qu'il n'existe aucune fonction sous-harmonique négative non constante sur X (i.e., X n'est pas de type (H)).
- Pour toute fonction $u \in C^0(\bar{Y}) \cap \text{SH}(Y)$ bornée supérieurement, montrer que $\sup_Y u \leq \sup_{\partial Y} u$.
- Montrer que deux solutions bornées au problème de Dirichlet sont identiques.

(f) On suppose que X est de type (H), et que $Y = X \setminus D$ avec D disque conforme. Montrer que pour toute fonction continue $h \colon \partial Y \to \mathbb{R}$, il existe au moins deux fonctions distinctes bornées résolvant le problème de Dirichlet dans Y avec données au bord h.

Exercice 17. On rappelle qu'une surface de Riemann est de type (H) ssi il existe une fonction sous-harmonique négative et non constante.

(a) Montrer que si F est un ensemble fini, alors $\mathbb{C} \setminus F$ n'est pas de type (H).
(b) Montrer que pour tout ensemble fini F d'une surface de Riemann, alors $S \setminus F$ est de type (H) ssi S est aussi de type (H).
(c) Montrer qu'une surface de Riemann compacte n'est pas de type (H).
(d) Montrer que tout ouvert borné de $\mathbb{C}$ est de type (H).
(e) Montrer que le complémentaire d'un disque conforme dans une surface de Riemann quelconque est de type (H).

II.3 Différentielles.

Exercice 18 (Opérations sur les formes).

(a) Montrer que $\partial^2 = \bar{\partial}^2 = \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0$.
(b) Montrer que une 1-forme ω est holomorphe ssi $d\omega = 0$ et $\star\omega = -i\omega$.
(c) Montrer que $\|\omega\|^2 = \int_D \omega \wedge \star\bar{\omega}$ munit l'espace des 1-formes sur une surface de Riemann D d'une structure d'espace pré-hilbertien. Quel est son complété?

Exercice 19 (Existence de fonctions méromorphes). Soit S une surface de Riemann connexe, et $p \neq q \in S$.

(a) Soit g_1 et g_2 deux fonctions harmoniques non constantes sur S. Pour toute carte holomorphe (U, φ), on considère la fonction
$$f_\varphi(z) := \frac{\partial g_1 \circ \varphi^{-1}}{\partial z} / \frac{\partial g_2 \circ \varphi^{-1}}{\partial z}$$
Montrer que si (V, ψ) est une autre carte holomorphe, alors $f_\varphi = f_\psi$ sur $U \cap V$.
(b) On suppose que S est de type (H), et on note g_p et g_q les fonctions de Green en p et q respectivement. En utilisant la question précédente, montrer que S admet une fonction méromorphe non constante avec un zéro en p et un pole en q.
(c) Montrer la meme propriété lorsque S n'est pas de type (H). On utilisera alors le théorème du cours sur l'existence de fonctions harmonique sur S privé d'un point.