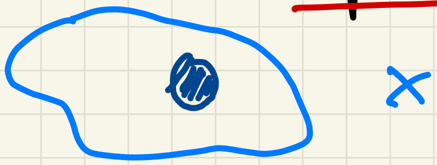
28/11/2022

Como 9

rappel : on a résolu le problème de Dirichlet



X surface de R. connexe ? Y ouvert

∂Y est lisse $f : \partial Y \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$ bornée

$\exists\, h : \overline{Y} \to \mathbb{R}$ $h|_{\partial Y} = f$, $h|_Y$ harmonique, h $\mathcal{C}^0$, $\sup_Y h \leq \sup_{\partial Y} f$

(h est bornée) $\inf_Y h \geq \inf_{\partial Y} f$.

But = utiliser ce résultat pour construire des fonctions holomorphes sur une surface de R.

d) Fonctions de Green

définition une surface de R. connexe X est de type (H) ssi il existe une fonction $u \in SH(X)$, non constante, $u < 0$

Rapport / Farkas-Kra : type (H) est appelé hyperbolique.

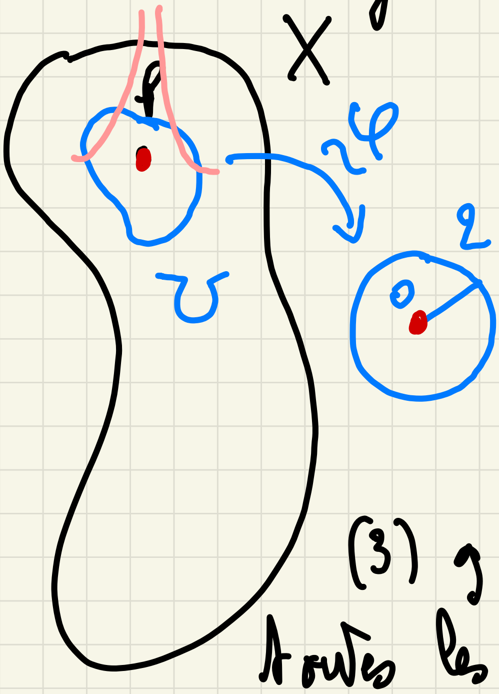
But : X simplement connexe de type (H) alors X est biholomorphe à $\mathbb{D} = \{|z|<1\}$

observation sur $\mathbb{D}$ $\operatorname{Log}|z| \in SH(\mathbb{D})$

$\max\{-10^{83}, \operatorname{Log}|z|\} \in SH(\mathbb{D})$.

Thm (existence des fonctions de Green)

X de type (H). Pour tout point $p \in X$ il existe une fonction $g_p : X \to]0, +\infty]$



(1) harmonique dans $X - \{p\}$

(2) $g_p + \mathrm{Log}|z| \Big|_U$ est harmonique dans U

(3) g_p est minimale parmi toutes les fonctions qui vérifient (1) et (2)

<u>terminologie</u> : on appelle g_p la fonction de Green de X en p (avec pôle en p)

observation : si il existe une fonction de Green $g_p : X \to]0, +\infty]$ avec pôle en p, alors X est de type (H)

$-g_p < 0 \quad -g_p \in SH(X)$.

$-g_p(p) = -\infty$

démonstration : on introduit

$$\mathcal{F} = \{ v \in SH(X - \{p\}), \mathcal{C}^0, v \geq 0, \text{Supp } v \subset\subset X, v + \log|z| \in SH(U) \}.$$

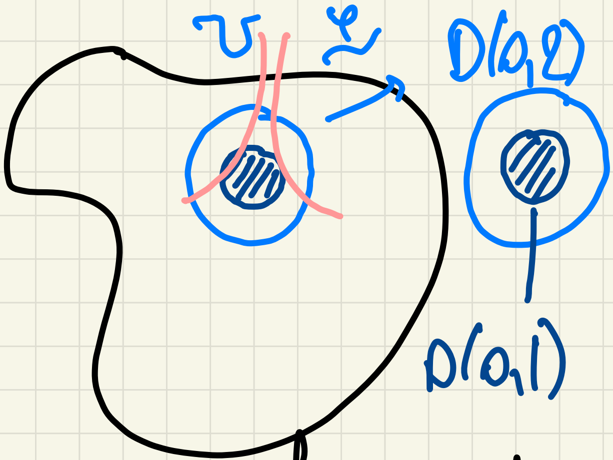
on va démontrer que $\sup_{\mathcal{F}} v$ est une fonction de Green avec pôle en p.

• $\tilde{\mathcal{F}}$ est une famille de fcts (sur $X-\{p\}$)

• $\neq \emptyset$

$$v = \begin{cases} \max\{0, -\log|z|\} & \text{sur } U \\ 0 & \text{sur } X \setminus U \end{cases}$$

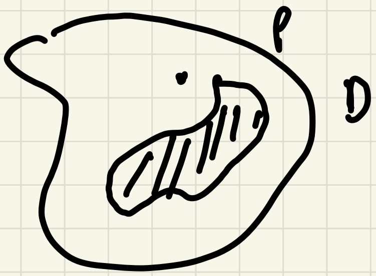
$v \in \tilde{\mathcal{F}}$



• stable par max, par harmonisation

(D disque conforme $\subset X - \{p\}$, $u \in \tilde{\mathcal{F}}$

alors $u_D \in \tilde{\mathcal{F}}$



$$u_D = \begin{cases} u & \text{sur } X - D \\ \text{harmonique dans } D \end{cases}$$

C^0)

on va montrer que $\sup_{\mathcal{F}} v(q) < +\infty$

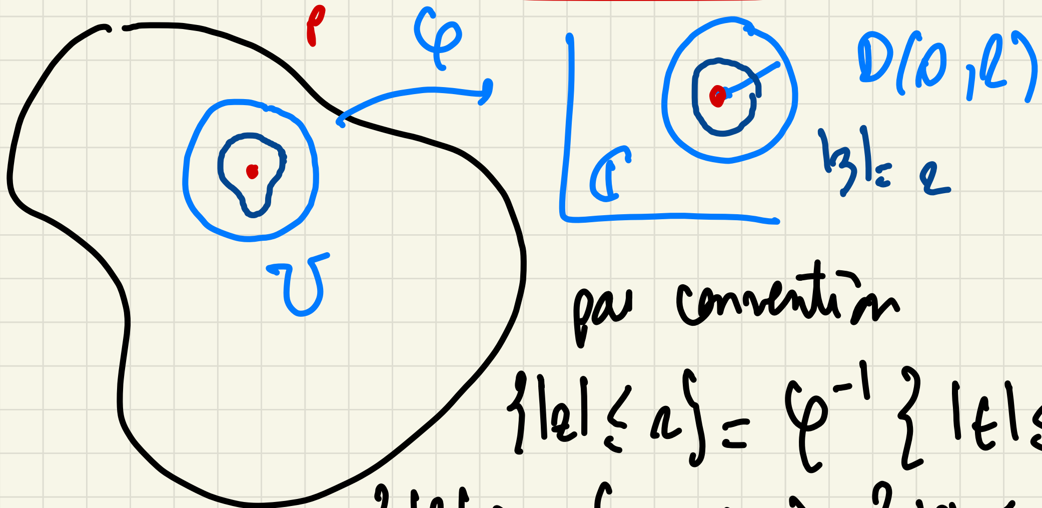
pour tout $q \neq p$.

$\Rightarrow$ (principe de Perron) $u_{\mathcal{F}} := \sup_{\mathcal{F}} v$ est

harmonique dans $X \setminus \{p\}$.

Lemme - déf $\forall\, 0 < r < 1 \quad \exists\, \alpha(r) > 0$

tq $\forall v \in \mathcal{F}$ $\quad \sup_{|z| \geq r} v = \sup_{|z| = r} v \leq \alpha(r)$



par convention

$\{|z| \leq r\} = \varphi^{-1}\{|t| \leq r\}$

$\{|z| \geq r\} = X \setminus \{|z| < r\}$.

- lemme clef $\Rightarrow$ $u_{\mathcal{F}}$ est harmonique dans $X - \{p\}$

- $u_{\mathcal{F}} + \log|z|$ est harmonique dans U.

$v \in \tilde{\mathcal{F}}$. $v + \log|z|$ sous-harmonique dans U

. $\sup_{|z|=r} v + \log|z| \leq \alpha(h) + \log r$

$\Rightarrow$ $u_{\mathcal{F}} + \log|z| \leq \alpha(h) + \log r$

. harmonique sur $U - \{p\}$.

. sous harmonique sur U $\Rightarrow$ $u_{\mathcal{F}} + \log|z|$ borné sur U

$\Rightarrow$ $u_{\mathcal{F}} + \log|z|$ est harmonique dans U.

• $u_{\tilde{\mathcal{F}}} > 0$

$u_{\tilde{\mathcal{F}}} = \sup_{\tilde{\mathcal{F}}} v \geq 0$

$u_{\tilde{\mathcal{F}}} \geq -\operatorname{Log}|z| + \text{cst}$ près de p.

principe du maximum pour $-u_{\tilde{\mathcal{F}}}$

(sur $X - \{p\}$) $\Rightarrow$ $u_{\tilde{\mathcal{F}}} > 0$

• $u_{\tilde{\mathcal{F}}}$ est minimale parmi toutes les

fonctions vérifiant (1) et (2)

(principe du max.)

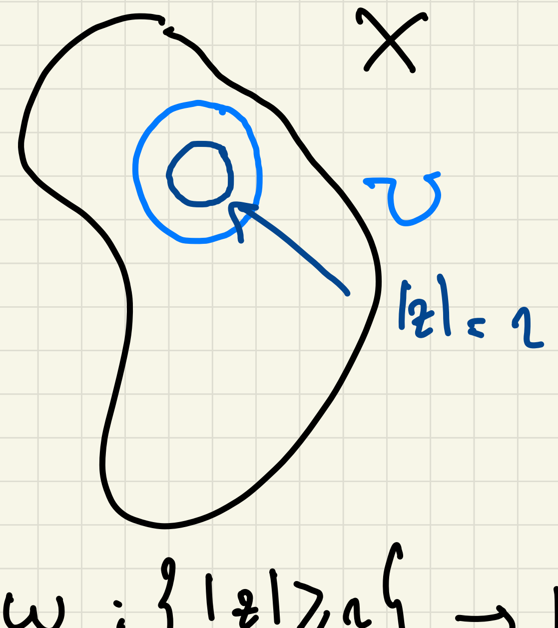
$\tilde{g} : X - \{p\} \to \mathbb{R}_+^*$ harm.

$\tilde{g} + \operatorname{Log}|z|$ harmonique $\quad v \in \tilde{\mathcal{F}}$ $\quad v - \tilde{g} \Big| < 0$ sh de X

$\Rightarrow v \leq \tilde{g}$ $\quad$ ///

Proposition X de type (H), $Y \subseteq X$ connexe ouvert à bord lisse tq $K = X \setminus Y$ est compact, non vide. Il existe $\omega : \overline{Y} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^\infty$

$$\left\{ \begin{array}{l} ① \ \omega \equiv 1 \ \partial Y \\ ② \ \omega \text{ harmonique sur } Y \\ ③ \ 0 < \omega < 1 \end{array} \right.$$



prop ⇒ lemme

on applique la proposition à

$K = \{|z| \leq r\}$

$Y = \{|z| > r\}$

$\omega : \{|z| \geq r\} \to \mathbb{R}$ $\quad 0 < \omega < 1$

$v \in \tilde{\mathcal{F}}$ $\quad v_r = \sup_{|z|=r} v = \sup_{|z|\geq r} v$

principe du max

+ $\mathrm{Supp}\, v \subset\subset X$

+ $v \geq 0$

$v - v_r \cdot \omega$. en dehors de $\mathrm{supp}(v)$

< 0

. ≤ 0 sur $\{|z| = r\}$

$\Rightarrow \quad v \leq v_r \cdot \omega$

$v + \mathrm{Log}|z|$ sous-harmonique dans U

$$\sup_{|z|=r} (v + \mathrm{Log}|z|) \underset{r<1}{\leq} \sup_{|z|=1} (v + \mathrm{Log}|z|)$$

$$v_r + \mathrm{Log}\, r \leq v_1 \leq v_r \times \sup_{|z|=1} \omega$$

$$\Rightarrow v_r \leq \frac{-\mathrm{Log}\, r}{1 - \sup_{|z|=1} \omega} = \alpha(r)$$

///

démonstration de la proposition :

X type (H) $\quad u \in SH(X) \quad u<0$

non constante

. $K = X \setminus Y$ compact $\leadsto$ on peut supposer que $\max_K u = -1$, $\exists\, q \notin K \quad u(q) > -1$

. on pose $\tilde{u} = \max\{-1, u\} < 0$

$\tilde{u} \in SH(X) \quad \tilde{u}|_K \equiv -1 \quad \tilde{u}(q) > -1$

$\tilde{\mathcal{F}} = \{ v \in \mathcal{C}^0(\bar{Y}) \cap SH(Y),\ v \leq -\tilde{u}$ dans $\bar{Y} \}$

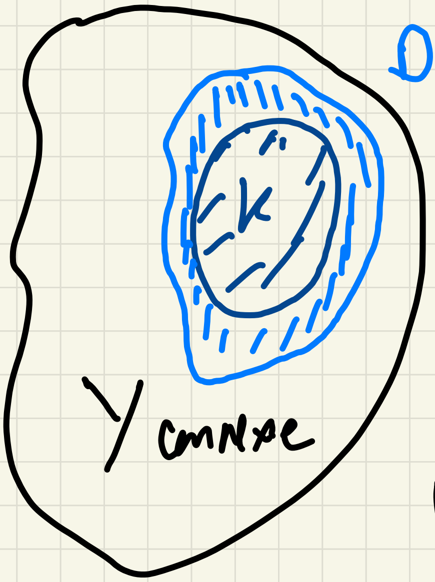
(super-harmonique)

famille de Perron $\Rightarrow$ $u_{\tilde{\mathcal{F}}} = \sup_{\tilde{\mathcal{F}}} u$

est harmonique dans Y.

on veut montrer que $0 \leq u_{\mathcal{F}} \leq 1$

$u_{\mathcal{F}} \in \mathcal{C}^0(\bar{Y})$



on fixe D à bord régulier (lisse) domaine relativement compact qui contient K.

on résout le problème de Dirichlet dans $D \setminus K$

$\times \qquad v|_{\partial K} = 1 \qquad v|_{\partial D} = 0$

on étend v par 0 dans Y

$\rightsquigarrow v \in SH(Y), \mathcal{C}^0(\bar{Y})$

on regarde $v + \tilde{u} \in SH(Y)$
$= 0$ sur ∂Y

$\Rightarrow v \leq -\tilde{u}$ dans Y principe du max.

$$0 \leq v \leq u_{\tilde{f}} \leq -\tilde{u} \leq 1$$

$$u_{\tilde{f}} = \sup_{f} w$$

par construction

$$1) \lim_{q \to \partial Y} u_{\tilde{f}}(q) \geq \lim_{q \to \partial Y} v(q) = 1$$

$$\Rightarrow u_{\tilde{f}} \in \mathcal{C}^0(\bar{Y}) \cap \mathcal{H}arm(Y)$$

$$u_{\tilde{f}}\big|_{\partial Y} = 1 \qquad u_{\tilde{f}} \geq 0$$

on se rappelle que $\tilde{u}$ n'est pas constante !

$$\exists q' \quad \tilde{u}(q') < 1 \leadsto u_{\tilde{f}}(q') < 1$$

$\Rightarrow$ $u_{\tilde{f}}$ est non constante

$$\Rightarrow 1) \ u_{\tilde{f}} > 0$$

///

e) Uniformisation des surfaces de R. de type (H)

Thm X surface de R. simplement connexe de type (H), alors $\exists \phi : X \to \mathbb{D}$ biholomorphisme.

démonstration. $p \in X$, g_p la fonction de Green avec pôle en p.

- $\forall q \in X$ on peut écrire $g_p = -\mathrm{Log}\,|f_q|$ avec f_q hol. au voisinage de q.

  - $q \neq p$ $\quad g_p = \mathrm{Re}\,(h) = \mathrm{Log}\,|e^h|$

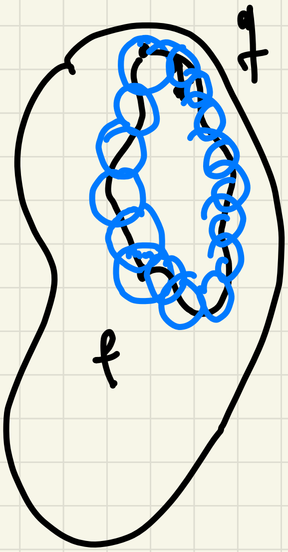
    h holomorphe $\quad f_q = e^{-h}$

- $g = f$ $\quad g_f(z) = -\mathrm{Log}|z| + \text{harmonique}$

$p \Leftrightarrow z = 0$ $\quad = -\mathrm{Log}|z| - \mathrm{Log}|\tilde{h}|$

holomorphe

$\pi_1(X) = \{\cdot\}$



$= -\mathrm{Log}|z\tilde{h}|$

f_p.

<u>remarque</u> : $g_p = \mathrm{Log}|h_1| = \mathrm{Log}|h_2|$

alors $h_1 = J h_2$ $|J| = 1$

principe de continuation analytique $\Rightarrow$

$+ \pi_1(X) = \{\cdot\}$

$\exists f : X \to \mathbb{C}$ hol. telle que

$0 < g_f = -\mathrm{Log}|f|$.

$\Rightarrow f(X) \subseteq \mathbb{D}$

lemme : $\boxed{f \text{ est injective.}}$

$f : X \to \mathbb{D}$ hol. et injective

$\Rightarrow f : X \to \Omega = f(X)$ est un biholomorphisme

$\Omega \subsetneq \mathbb{D}$ simplement connexe

$\Rightarrow \Omega \underset{\text{bihol.}}{\simeq} \mathbb{D}.$

démonstration du lemme :

$g_f = -\log|f_p|$ $\quad \left(q \neq p \quad f_p(q') = f_p(q) \Rightarrow q' = q \right)$

$q \neq p$

$\phi = \left(\dfrac{z - f_p(q)}{1 - \overline{f_p(q)}\, z} \right) \circ f_p \quad : X \xrightarrow{\text{hol.}} \mathbb{D}$

$\phi(q) = 0$

idée : comparer ϕ avec f_q

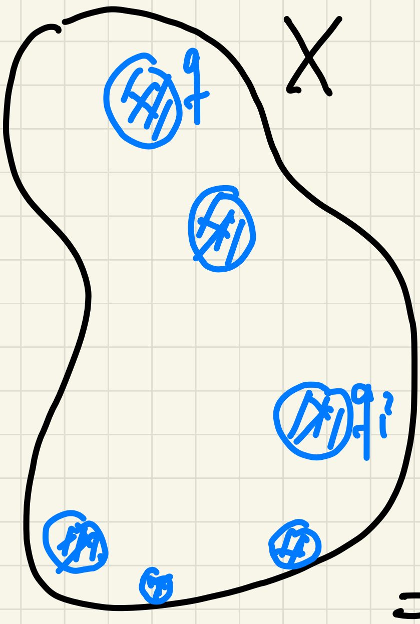
$$\left(g_q = -\mathrm{Log}\,|f_q|\right)$$

$n = \mathrm{ord}_q(\phi) \in \mathbb{N}^{\times} = \{1, 2, \ldots\}$

$\{\phi = 0\} = \{q, q_1, q_2, \ldots, q_i, \ldots\}$

$-\frac{1}{n}\mathrm{Log}\,|\phi|$

- harmonique >0 sur $\{\phi \neq 0\}$
- au voisinage de q $= -\mathrm{Log}|z| +$ harmonique



$g_q = \sup\{v,\ \mathrm{supp}\, v \subset\subset X$

v sh $(X - \{q\})$, $v - \mathrm{Log}|z|$ sh au voisin. de $\{q\}$, $v \geq 0\}$

$$\Rightarrow\ g_q \leq -\frac{1}{n}\mathrm{Log}\,|\phi|$$

principe de max.

$$g_q = -\operatorname{Log}|f_q| \leq -\frac{1}{n}\operatorname{Log}|\phi|$$

$$1 \geq |f_q| \geq |\phi|^{1/n} \geq |\phi|$$

$$|\phi(p)| = \left|\left(\frac{z - f_p(q)}{1 - \overline{f_q(p)}\, z}\right) \circ f_p(p)\right|$$

$$= |f_p(q)|$$

$$\leq |f_q(p)|$$

$$\Rightarrow |f_q(p)| = |f_p(q)|.$$

$\dfrac{\phi}{f_q}$ hol. bornée par 1

$$|\phi| \leq |f_q|$$

mais $|\phi(p)| = |f_p(q)| = |f_q(p)|$

$\Rightarrow$ principe du max.

$\exists \zeta \qquad \phi = \zeta f_q \qquad |\zeta| = 1$

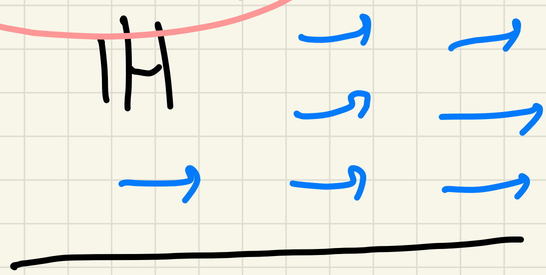
$\{\phi = 0\} = \{f_q = 0\} = \{q\}$.

///

Exercices.

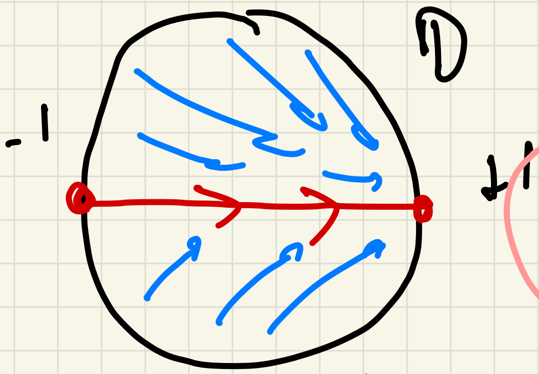
- $z \mapsto z+1$

Parabolique

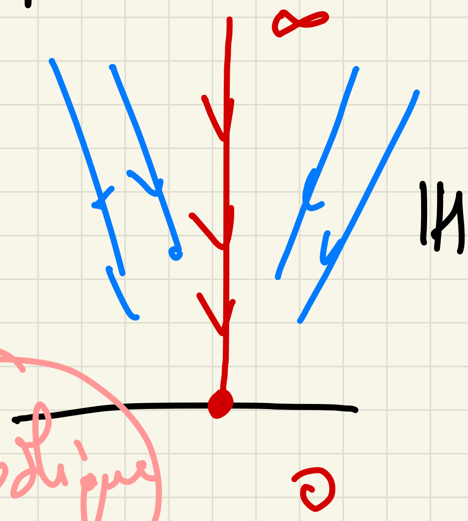


unique point fixe dans $\bar{\mathbb{D}}$

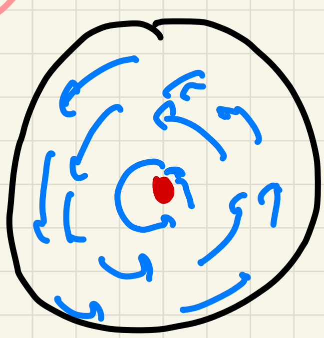
- $z \mapsto a^2 z \quad 0<a<1$



hyperbolique



- $z \mapsto \dfrac{\sin\theta \, z + \cos\theta}{-\cos\theta \, z + \sin\theta}$



elliptique

si $g : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ bihol.

$g \circ (z+1) = (z+1) \circ g$

$\Rightarrow$ Fix(g) invariant par

$z \mapsto z+1$

$\Rightarrow$ Fix$(g) = \{\infty\}$

$\Rightarrow$ $g(z) = z + \alpha$. ///