Cours 6

16 - 11 - 2022

But = démontrer le thm d'uniformisation

II.2 Fonctions sous-harmoniques

a) Fonctions harmoniques

$\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ouvert $\quad z = x + iy$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) = \Delta$$

Laplacien

$f \in \mathcal{C}^2(\Omega) \rightsquigarrow \Delta f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$

def. $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ est harmonique si $\Delta f = 0$

exemple • $h : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe.
Alors $\mathrm{Re}(h)$, $\mathrm{Im}(h)$ sont harmoniques.

$$\Delta \mathrm{Re}(h) = \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} (h + \bar{h})$$
$$= \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\cancel{h} + \bar{h}) \right]$$
$$= \frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{\frac{\partial h}{\partial z}} \right) = 0$$

• $h : \Omega \to \mathbb{C}^\times$ $\quad \log|h|$ est harmonique

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \left(\log|h|^2 \right) = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\log h + \log \bar{h})$$
$$= 0$$

propriétés générales

- $\lambda \in \mathbb{C}$ f, g harmonique $\Rightarrow$ $\lambda f + g$ harmonique

- $h : \Omega \to \Omega'$ holomorphe $f : \Omega' \to \mathbb{R}$ harmonique. Alors $f \circ h$ harmonique dans Ω

<u>démo</u> : $\Delta (f \circ h) = \dfrac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} (f \circ h)$

$$= \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \circ h \quad \overline{h'} \right]$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} \circ h \quad |h'|^2$$

///

Théorème $h : D(0,1) \to \mathbb{R}$ harmonique

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Alors il existe } f : D(0,1) \to \mathbb{C} \text{ holomorphe} \\ h = \mathrm{Re}(f)\end{array}}$$

__démo__ $\Delta h = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\dfrac{\partial h}{\partial z} \right) = 0$

$\Rightarrow g(z) = \dfrac{\partial h}{\partial z}$ est hol.

$$F(z) = \int_{[0,z]} g(w)\, dw = \int_0^1 g(tz)\, z\, dt$$

est hol. $\qquad F'(z) = g(z)$

$v = \mathrm{Re}(F) = \frac{1}{2}(F + \bar{F})$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial y}\right) = F'(z) = g(z) .$$

$$= \frac{\partial h}{\partial z}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} \quad \& \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial y}$$

$\Rightarrow$ $v - h$ est constant

$$h = \mathrm{Re}(F) + \mathrm{cst} = \mathrm{Re}(F + \mathrm{cst}) \quad ///$$

Théorème de représentation des fonctions harmoniques par le noyau de Poisson.

D(0,1)

$f \in \mathcal{C}^0(S^1)$

on cherche $h : \overline{D(0,1)} \to \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \Delta h = 0 \text{ dans } D(0,1) \\ h|_{S^1} = f \quad h \text{ est } \mathcal{C}^0. \end{cases}$$

noyau de Poisson $\quad 0 \le r < 1$

$\theta \in [0, 2\pi]$

$$P_r(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\theta}$$

$$= 1 + \frac{1}{1 - re^{i\theta}} + \frac{1}{1 - re^{-i\theta}}$$

$$= \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos\theta} = \mathrm{Re}\left[\frac{1 + re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}}\right]$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Thm} \quad h : \bar{D}(0,1) \to \mathbb{R} \ \mathcal{C}^0, \text{ harmonique sur } D(0,1) \\ h(re^{i\theta}) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{t=0}^{2\pi} P_r(\theta - t)\, h(e^{it})\, dt\end{array}}$$

conséquence : (formule de la moyenne)

$$h(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z + re^{i\theta})\, d\theta$$

dém. $h = \mathrm{Re}(f)$ $f : D(0, 1+\varepsilon) \to \mathbb{C}$.

$$f(z) = \sum a_m z^m$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\, h(e^{it})\, dt$$

$$= \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{P_r(\theta - t)}_{\sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in(\theta - t)}} \underbrace{f(e^{it})}_{\sum_{m \geq 0} a_m e^{int}} \, dt \right]$$

$$= \mathrm{Re}\left[\sum_{n \geq 0} r^n e^{in\theta} a_n \right]$$

$$= \mathrm{Re}(f) = h \qquad ///$$

Thm $f : S^1 \to \mathbb{R}$ C^0

$$\underset{r<1}{Pf(re^{i\theta})} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\, f(e^{it})\,dt$$

est harmonique dans $D(0,1)$. de plus

$$\lim_{z \to \zeta} Pf(z) = f(\zeta) \quad \forall\, |\zeta| = 1$$

dim :

à valeurs $\mathbb{R}$

$$Pf(re^{i\theta}) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1+re^{i\theta - t}}{1-re^{i\theta - t}}\, f(e^{it})\,dt\right]$$

$$Pf(z) = \mathrm{Re}\left[\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}}_{\text{hol. en } z}\, f(e^{it})\,dt}_{\text{hol. en } z}\right]$$

harmonique

pour la continuité = exercice !

///

définition S une surface de R.
$h : S \to \mathbb{R}$ est harmonique si pour toute carte hol. (U, φ) la fonction $h \circ \varphi^{-1} : \Omega \to \mathbb{R}$
$$\Omega = \varphi(U) \subset \mathbb{C}$$
est harmonique.

observation : h est harmonique ssi
$\exists\, \mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ atlas hol. t.q.
$h \circ \varphi_i^{-1}$ est harmonique pour tout i.

en effet $h \circ \varphi^{-1} = \underbrace{h \circ \varphi_i^{-1}}_{\text{harmonique}} \circ \underbrace{(\varphi_i \circ \varphi^{-1})}_{\text{hol.}}$

Théorème : $h : S \to \mathbb{R}$ harmonique, S surface de R. connexe. Si h admet un maximum local, alors h est constante.

dém (U,φ) carte hol. centrée en z_0

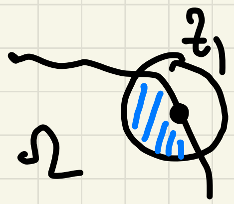
$h(z_0) = \sup_U h$. $\quad \varphi : U \xrightarrow{\sim} D(0,\ell)$

propriété de moyenne $h(z_0) = \frac{1}{\mathrm{vol}(U)} \int_U h \, d\,\mathrm{Leb}.$

$\Rightarrow h|_U \equiv h(z_0)$.

$\Omega = \mathrm{Int}\{h = h(z_0)\} \neq \emptyset$ ouvert

si $\Omega \subsetneq S \quad z_1 \in \partial\Omega$



D $\quad h = \mathrm{Re}(f) \quad f$ hol. $D \to \mathbb{C}$

$h|_{D\cap\Omega} \equiv$ cst. $\Rightarrow f$ cst absurde ///

Théorème (Harnack) Ω surface de R. connexe

$u_n : \Omega \to \mathbb{R}$ suite de fonctions harmoniques

① $u_n \to u$ localement uniformément, alors u est harmonique.

② $u_n \leq u_{n+1}$. Alors soit $u_n(z) \to +\infty$ pour tout $z \in \Omega$, soit $u(z) = \lim u_n(z)$ est harmonique.

démo : propriété locale $\Omega = D(0, 1+\varepsilon)$

① $u_n(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\, u_n(e^{it})\, dt$ dans $D(0,1)$

$\downarrow$ unif^t u

u vérifie la formule de Poisson donc est harmonique

② $u_{n+1} \geq u_n \geq u_1 \geq 0$

$u = \sup u_n$

$A = \{u < \infty\}$ $\qquad B = \{u = \infty\}$

observation clef : soit $A = \emptyset$ soit $B = \emptyset$.

si $A = \emptyset$ $\quad u_n(z) \to \infty \quad \forall z$.

si $B = \emptyset$ $\quad u_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{P_r(\theta - t)\, u_n(e^{it})}_{\geq 0}\, dt$

thm de convergence monotone

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\, u(e^{it})\, dt$$

$\Rightarrow u$ harmonique.

dém du point clef

$$\boxed{\frac{1-r}{1+r} \leq P_r(e^{i\theta}) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2} \leq \frac{1+r}{1-r}}$$

$$u_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\; \underset{\substack{\geq \\ 0}}{u_n(e^{it})}\, dt$$

$|z| = r$

$$u_n(z) \leq \frac{1+r}{1-r} \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\, u_n(e^{it})\, dt}_{\substack{\| \\ u_n(0)}}$$

$|z| = r$

$$\boxed{u_n(0)\,\frac{1-r}{1+r} \leq u_n(z) \leq u_n(0)\,\frac{1+r}{1-r}}$$

$\Rightarrow$ soit $u_n(z) \to \infty \quad \forall z$

soit $\sup_n u_n(z) < \infty \quad \forall z$.

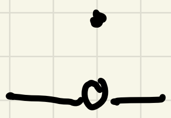
///

b) Fonctions sous-harmoniques

$\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ouvert connexe

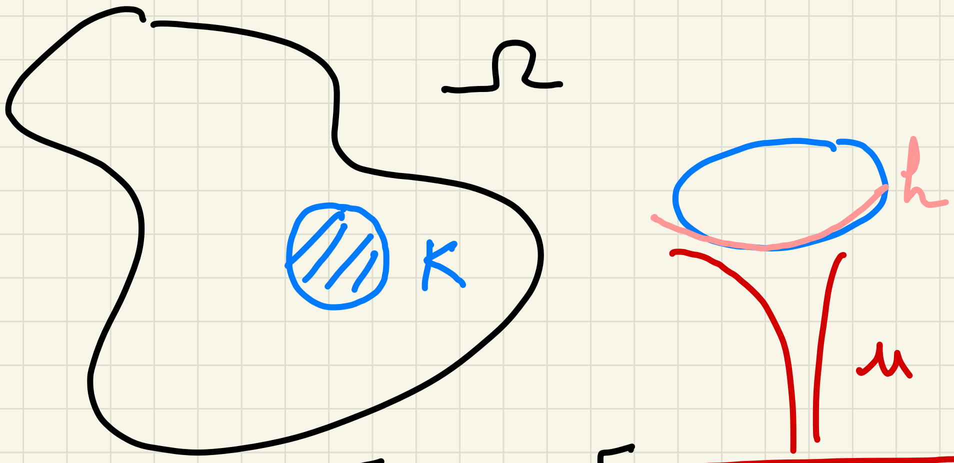
définition $u : \Omega \to [-\infty, +\infty[$ est sous-harmonique si

① u est semi-continue supérieurement



- $\limsup_{z_n \to z} u(z_n) \leq u(z)$ (scs)
- $\{u < t\}$ ouvert $\forall t$. $\{u \geq t\}$ fermé $\forall t$

② pour tout compact $K \subseteq \Omega$, pour toute fonction $h : K \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$ tq $h|_{\mathrm{Int}(K)}$ est harmonique et $h|_{\partial K} \geq u|_{\partial K}$ alors $h \geq u$ sur K.



Thm $u : \Omega \to [-\infty, +\infty[$ scs. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

① u est sous-harmonique

② $\forall$ disque fermé $\overline{D} \subseteq \Omega$, pour tout polynôme $g(z) = \sum a_n z^n$ $u \leq \mathrm{Re}(g)$ sur $\partial D \Rightarrow u \leq g$ sur D

③ (propriété de sous-moyenne) $\forall \delta > 0$ pour toute mesure ≥ 0 μ sur $]0, \delta] \subseteq \mathbb{R}$

$$u(z) \leq \frac{1}{\int_0^\delta \mu(r)\, dr} \int_0^\delta \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta})\, d\theta\, d\mu(r)$$

$z \in \Omega_\delta = \{ \operatorname{dist}(z, \partial\Omega) > \delta \}$

démo ① ⇒ ②

② ⇒ ③

u sci ⇒ u est localement borné supérieurement

K compact $\quad \sup_K u < \infty$

$\int_K u \in [-\infty, +\infty[$ toujours défini.

(?)

$$u(z) \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z+re^{i\theta})\,d\theta$$

$z \in \Omega_\delta \quad 0<r<\delta$

. si u est C^0 sur $|z-w|=r$

Stone-Weierstraß $\quad u =$ lim unif polynôme trigonométrique

$= \lim_n \mathrm{Re}(Q_n)$

$\varepsilon \ll 1$ $\quad$ $Re(Q_n) + \varepsilon \geq u \quad \forall\, n \gg 0$

$\quad$ sur $\partial D(z, r)$ $\quad$ $\underset{\approx}{}$ $Re(Q_n) - \varepsilon$

(2) $\Rightarrow$ $Re(Q_n) + \varepsilon) \geq u$ $\quad$ sur D

$$u(z) \leq Re(Q_n) + \varepsilon(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (Re(Q_n) + \varepsilon)(z + re^{i\theta})\, d\theta$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta})\, d\theta$$

on fait $\varepsilon \to 0$. $\quad$ $+2\varepsilon$

astuce dans le cas général.

$$u_n(z) = \sup_{w \in \overline{D}(0, \varepsilon)} \{ u(w) - n|z - w| \}$$

$\begin{cases} u_n \quad n\text{-lipshitz} \\ u_{n+1} \leq u_n \\ u_n(z) \downarrow u(z) \end{cases}$ $\qquad$ $|u_n - Re(Q_n)| \leq \frac{1}{2n}$

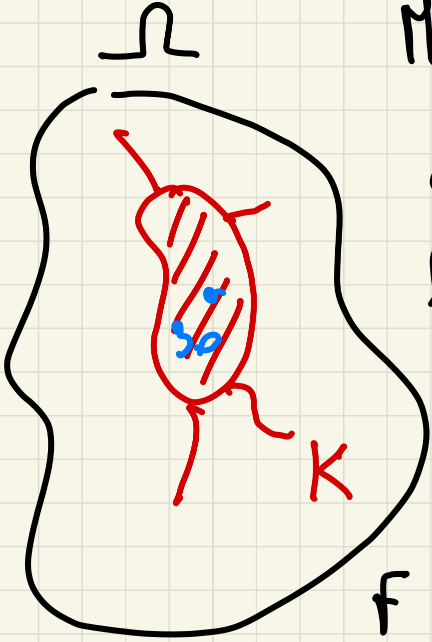
...

///

③ ⇒ ① $h \in C^0(K)$

$h|_{\mathrm{Int}(K)}$ harmonique $u|_{\partial K} \leq h|_{\partial K}$

$\overset{?}{\Rightarrow}$ $u \leq h$ sur K



$M = \sup_K (u-h)$ atteint dans K en z_0.

Par contradiction $M > 0$

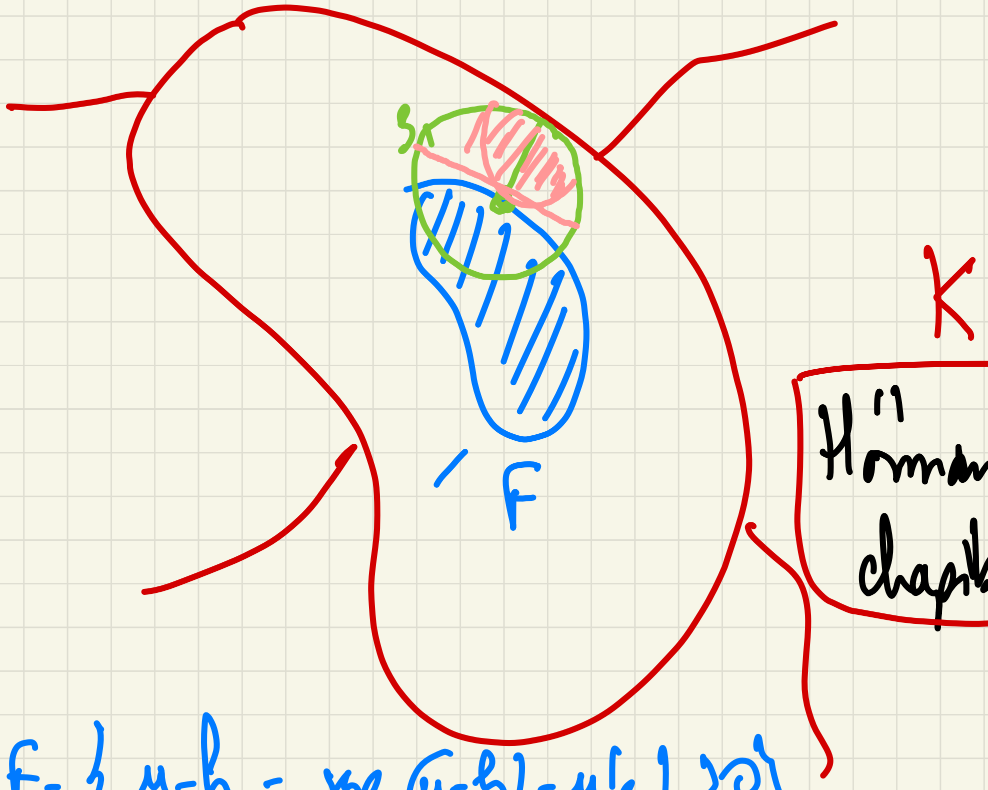
$u(z_0) - h(z_0)$

$z_0 \in \mathrm{Int}(K)$

$F = \{z \in K,\ u(z) = M\} \neq \emptyset$

F compact $F \subseteq \mathrm{Int}(K)$.

on choisit $z_1 \in F$ tq $\mathrm{dist}(z_1, \partial K)$ est minimale.



Hörmander chapitre 1.

$F = \{ u - h = \sup_K (u-h) = u(z_0) > 0 \}$

on regarde $D(z_1, r)$ $\quad r = \text{dist}(z_1, \partial K)$

$$\tilde{u}(z_1) \leq \frac{1}{2\pi} \int \tilde{u}(z_1 + r e^{i\theta})\, d\theta$$

$\shortparallel$ ③

M

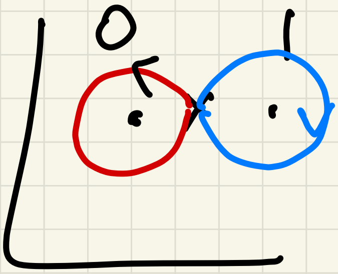
$\tilde{u} = u - h$

choix de $z_1 \Rightarrow \exists$ arc $\subseteq \partial D(z, r)$ tq $L\arg(\gamma) > 0$

$\tilde{u}|_\gamma \leq M - \varepsilon$ ///

Exercícios

$$\mathbb{C} - \{0,1\} \not\cong \mathbb{C} \not\cong \mathbb{C}^\times$$



$$\pi_1(\mathbb{C} - \{0,1\}, 1/2) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}^2$$

$$[\gamma] \mapsto \left(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz,\ \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-1}\,dz\right)$$

φ surjectif. ///

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{D} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{C} \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "\exists \tilde{f}"] & \mathbb{C} - \{0,1\} \end{tikzcd}$$

$$f = \pi \circ \tilde{f}$$

$$\underline{\underline{f_* \pi_1(\mathbb{C},0) \subseteq \pi_* \pi_1(\mathbb{D},0)}}$$

$$\{1\}.$$

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{D} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{C} \arrow[ur, "\bar f"] \arrow[r] & \mathbb{C}-\{0,1\} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & \bar f(z_0) \\ z_0 \arrow[r, "f"', "f"] & \pi \bar f(z_0) \arrow[u, bend right, "\pi^{-1}\ \text{bihol.}"'] \end{tikzcd}$$

$$\pi \bar f(z_0) = f(z_0)$$

π est hol + homéo local

$\Downarrow$

bihol. local.

③ $f_n : \mathbb{D} \to \mathbb{C} - \{0,1\}$

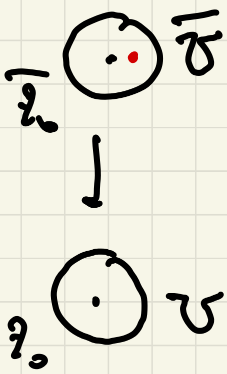
hol.

$= \hat{\mathbb{C}} - \{0,1,\infty\}$

$f_n(0) \to z_0 \in \mathbb{C} - \{0,1\}$.

$\boxed{\text{$\exists f_{n_j}$ sous-suite converge localement uniformément sur $\mathbb{D}$ vers $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}-\{0,1\}$ (Montel)}}$

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{D} \ni \tilde z_0 \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{D} \arrow[ur, "\tilde f_n"] \arrow[r, "f_n"'] & \mathbb{C}-\{0,1\} \ni z_0 \end{tikzcd}$$



$n \gg 0 \quad f_n = \pi \circ \tilde f_n \qquad \tilde f_n(0) \in \tilde U$

$\bar{f}_n : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$

$\Rightarrow$ Cauchy $|\bar{f}_n'|$ uniformément borné

sur $\bar{\mathbb{D}}(0, 1-\varepsilon)$

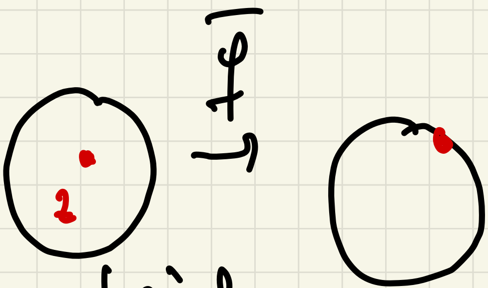
$\Rightarrow$ $\bar{f}_n$ localement équicontinue

$\Rightarrow$ Arzelà-Ascoli $\bar{f}_{n_j} \to \bar{f}$ hol.

local. unif^t

$f_{n_j} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ $\quad$ $\bar{f} : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ hol

$\bar{f}(\mathbb{D}) \subseteq \bar{\mathbb{D}}$



$\bar{f}_n(0) \to \bar{z}_0 \in \mathbb{D}$

principe du max. $\Rightarrow$ $\bar{f}(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ hol.

$$\begin{tikzcd}
f_{n_j} = \pi \circ \arrow[d] & \tilde{f}_{n_j} \arrow[d] \\
\pi \circ \tilde{f} : \mathbb{D} \to \mathbb{C} - \{0,1\} . & \tilde{f} : \mathbb{D} \to \mathbb{D} \text{ hol.}
\end{tikzcd}$$

on peut construire des fonctions hol. $f_n : \mathbb{D} \to \mathbb{C} - \{0,1\}$ t.q. $f_n(z) \to 0 \ \forall z$.

Remarque : on peut construire "explicitement" $\pi : \mathbb{H} \to \mathbb{C} - \{0,1\}$

voir Ahlfors

$$G = \left\{ g \in SL(2,\mathbb{Z}) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{pair} & \text{pair} \\ \text{pair} & \text{pair} \end{bmatrix} \; g \equiv \mathrm{Id} \bmod (2) \right\}$$

thm $\mathbb{H}/G \simeq \mathbb{C} - \{0,1\}$ et G agit sans point fixe sur $\mathbb{H}$.

$\pi : \mathbb{H} \to \mathbb{C} - \{0,1\}$ est donnée par une fonction modulaire.