Gow 17

28/12/2022

Rappel X surface de Riemann compacte connexe ω 1-forme méromorphe

$D \in \mathrm{Div}(X)$ $\quad D = \sum_{i \in I} n_i \, (p_i)$

I fini $n_i \in \mathbb{Z}$

$$H^0(D) = \{ f \in \mathcal{M}(X), \ \mathrm{div}(f) + D \geq 0 \}$$

thm $h^0(D) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(D)$

$$\boxed{h^0(D) - h^0(K_\omega - D) = \deg D + 1 - g .}$$

$K_\omega = \mathrm{div}(\omega)$ $\quad \deg D = \sum n_i$

$g =$ genre topologique (X)

$\leadsto$ interprétation "faisceautique / moderne" du thm de RR.

Énoncé moderne.

① à D, on associe un faisceau $\mathcal{O}_D$.

on peut définir la cohomologie de $\mathcal{O}_D$.

$$H^0(\mathcal{O}_D) \quad H^1(\mathcal{O}_D) \quad H^2(\mathcal{O}_D) \ldots$$

$\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension finie

$$h^q(\mathcal{O}_D) = \dim_{\mathbb{C}} H^q(\mathcal{O}_D).$$

$$\chi(\mathcal{O}_D) = h^0(\mathcal{O}_D) - h^1(\mathcal{O}_D)$$

$$\boxed{\chi(\mathcal{O}_D) = \frac{1}{2}\chi(X) + \deg(D)}$$

② $H^1(\mathcal{O}_D)$ est en dualité avec $H^0(K_\omega - D)$.

plan des deux derniers cours

- Grisceau
- cohomologie de Čech
- dualité de Serre .

7. Faisceaux en groupes abéliens

sheaf = faisceau

X espace topologique.

(A) un faisceau $\mathcal{F}$ sur X

U ouvert de $X \longrightarrow \mathcal{F}(U)$ gpe abélien

$V \subseteq U$ ouverts $\longrightarrow \rho_U^V : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$

morphisme (dit de restriction)

tq

- $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$
- $\rho_U^U = \mathrm{id}$
- $\rho_U^W = \rho_V^W \circ \rho_U^V$ $W \subseteq V \subseteq U$

[foncteur des ouverts vers gpes abéliens]

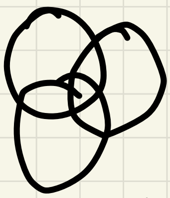
+ 2 axiomes [recollement
localisation

Terminologie : $s \in \mathcal{F}(U)$ on dit que s est une section de $\mathcal{F}$ au dessus de U

recollement : si $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$

$s_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)$ tq $\rho_{U_\alpha}^{U_\alpha \cap U_\beta} s_\alpha = \rho_{U_\beta}^{U_\alpha \cap U_\beta} s_\beta$ $\forall \alpha, \beta$

alors il existe une section $u \in \mathcal{F}(U)$ telle que $\rho_U^{U_\alpha} u = u_\alpha$ $\forall \alpha$



localisation $U = \bigcup U_\alpha$ $s, s' \in \mathcal{F}(U)$

tq $\rho_U^{U_\alpha} s = \rho_U^{U_\alpha} s'$ $\forall \alpha$ alors $s = s'$.

terminologie

$s \in \mathcal{F}(X)$ section globale

$p \in X$ la tige ("stalk") de $\mathcal{F}$ en p

$$\boxed{\mathcal{F}_p = \varinjlim_{U \ni p} \mathcal{F}(U)}$$

(i.e un élément de $\mathcal{F}_p$ c'est $s \in \mathcal{F}(U)$ avec $U \ni p$;

$s \in \mathcal{F}(U)$ $t \in \mathcal{F}(V)$ $U, V \ni p$

$s = t$ dans $\mathcal{F}_p$ ssi $\exists W \subseteq U \cap V$ $W \ni p$

$$\rho^W_U s = \rho^W_V t$$

" germes de section de $\mathcal{F}$ au voisinage de p "

$\mathcal{F}_p$ = groupe abélien ,

Point de vue topologique sur $\mathcal{F}$.

un faisceau est un espace topologique $\pi : \mathcal{F} \to X$ continue, surjective, homéomorphisme local.

$$\rightsquigarrow \quad \mathcal{F}(U) = \{ s : U \to \mathcal{F} \text{ continue tq } \pi \circ s = id_U \}$$

$$\rightsquigarrow \quad \mathcal{F} = \bigsqcup_{p \in X} \mathcal{F}_p \text{ + topologie}$$

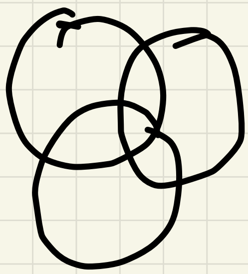
(B) X = surface de Riemann

. $\mathcal{O}_X$ = faisceau des fonctions holomorphes sur X

$U \subseteq X$ ouvert $\quad \mathcal{O}_X(U) = \{ f : U \to \mathbb{C} \text{ hol.} \}$

$V \subseteq U \quad \rho^V_U(f) = f|_V$

f_α



$$f_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = f_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$$
$$\Downarrow$$
$$\exists f : U_\alpha \cup U_\beta \to \mathbb{C}$$
$$f|_{U_\alpha} = f_\alpha$$

$\mathcal{O}_X$ est un faisceau car la condition d'être holomorphe est locale.

- $\mathcal{M}_X$ = faisceau des fonctions méromorphes

$$\mathcal{M}_X(U) = \{ f : U \to \mathbb{C} \text{ méromorphe} \}$$

- $\mathcal{C}^0, \mathcal{C}^1, \mathcal{C}^2, \dots, \mathcal{C}^k$

fonctions $\mathcal{C}^k$ sur X.

$$\mathcal{C}^k(U) = \{ f : U \to \mathbb{C} \text{ classe } \mathcal{C}^k \}$$

$$\mathcal{E}_X = \mathcal{C}^\infty_X$$

⚠ $\mathcal{C}^\infty(X) = \{ f : X \to \mathbb{C}, \ \mathcal{C}^\infty \}$

- $\mathcal{E}^k_X$ = faisceau des k-formes sur X de classe $\mathcal{C}^\infty$. $k \in \{0, 1, 2\}$

$$\mathcal{E}^0_X = \mathcal{E}$$

$\mathcal{E}^{0,1}_X$ = faisceau des 1-formes sur X, localement de la forme $h(z)\,d\bar{z}$, $h \in C^\infty$

$\mathcal{E}^{1,0}_X$ = faisceau des ______________ ______________ $h(z)\,dz$, $h \in C^\infty$ }

$$\mathcal{E}^1_X = \mathcal{E}^{0,1}_X \oplus \mathcal{E}^{1,0}_X .$$

Ω^1_X = faisceau des 1-formes holomorphes sur X.

$\Omega^1_X(U) = \{\omega$ 1-forme hol. sur $U\}$

D = diviseur

$\mathcal{O}(D)$ = faisceau des fonctions méromorphes

$\mathrm{div}(f) + D \geq 0$.

$U \subseteq X$ $\quad \mathcal{O}(D)(U) = \{ f : U \to \mathbb{C},$
méromorphe, $(\mathrm{div}(f) + D)|_U \geq 0 \}$

$\mathcal{O}(D)(X) = \{ f : X \to \mathbb{C}$ méromorphe,
$\mathrm{div}(f) + D \geq 0 \}$ $(= H^0(D))$

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{O}(D)_p \\ p \in X \end{array}\right\} \begin{cases} = \mathcal{O}_p \underset{\uparrow}{=} \mathbb{C}\{z\} & p \notin \mathrm{Supp}(D) \\ \qquad\quad \text{germes de fonctions hol. en } p & \\ = z^{-n} \mathbb{C}\{z\} & v_p(D) = n \neq 0 \end{cases}$$

série entière rayon convergence > 0 $\quad z$

. **Faisceau constant.**

R = anneau, gpe, corps $= \mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{C} \ldots$

$\underline{R}(U) = \{$ application continue de U dans R avec la topologie discrète $\}$.

si U est convexe $\underline{R}(U) \simeq R$

si $U = \underbrace{U_1 \sqcup U_2}_{\text{convexe}}$ $\underline{R}(U) \simeq R^2$

⚠ $\underline{R} \neq \mathcal{C}^0_X$ X surface de R.

U ouvert

$$\underline{R}(U) = \{ f : U \to R \ \mathcal{C}^0 \ [\text{discrète}] \}$$

$$\mathcal{C}^0_X(U) : \{ f : U \to R \ \mathcal{C}^0 \ [\text{standard}] \}$$

• faisceau gratte-ciel "skyscraper sheaf".

$p \in X$

$$\mathcal{F}(U) = \begin{cases} 0 & p \notin U \\ \mathbb{C} & p \in U \end{cases}$$

$$\rho^V_U = \begin{cases} \mathrm{id} & \text{si } p \in V \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$V \subseteq U$

$\mathcal{F} = \mathbb{C}_p$ tige

$$(\mathbb{C}_p)_q = 0 \qquad q \neq p$$

$$(\mathbb{C}_p)_p = \mathbb{C}$$

(4) Morphismes de faisceaux

X espace topologique

$\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ (faisceau groupe abélien)

- **topologique** : application continue

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\pi_{\mathcal{F}}"'] & & \mathcal{G} \arrow[dl, "\pi_{\mathcal{G}}"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

$\pi_{\mathcal{G}} \circ \phi = \pi_{\mathcal{F}}$.

- **en termes de sections** :

. $\forall U$ ouvert $\phi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ morphisme de groupes

. $\forall V \subseteq U$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\phi_U"] \arrow[d, "\rho_U^V"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\rho_U^V"] \\ \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\phi_V"] & \mathcal{G}(V) \end{tikzcd}$$

$\rho_U^V \circ \phi_U = \phi_V \circ \rho_U^V$

définition $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ morphisme de faisceaux est.

- injectif ssi $\phi_p : \mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p$ est injectif $\forall p$.
- surjectif ssi $\phi_p : \mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p$ est surjectif $\forall p$.

NB : on travaille avec des faisceaux en groupe abélien.

$\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est injectif, on note $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G}$

——— surjectif, on note $\mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0$.

exemple : $\mathcal{O} \xrightarrow{e} \mathcal{O}^{\times}$

$\mathcal{O}(U) = \{ f : U \to \mathbb{C} \text{ hol.} \}$

$\mathcal{O}^{\times}(U) = \{ f : U \to \mathbb{C}^{\times} \text{ hol.} \}$

$$e(\underset{\mathcal{O}(U)}{\underset{\cap}{f}}) = \exp(2i\pi f) \in \mathcal{O}^{\times}(U)$$

fait $e : \mathcal{O} \to \mathcal{O}^{\times}$ est surjectif.

en effet $p \in X$, $f \in \mathcal{O}^{\times}_p$ i.e. f fonction hol. au voisinage de p qui ne s'annule pas. $f : U \to \mathbb{C}^{\times}$ hol $\underset{p}{\underset{\ni}{U}}$ disque

on pose $g = \frac{1}{2i\pi} \operatorname{Log} f : U \to \mathbb{C}$ hol

$e(g) = f$

$U = \mathbb{D}^\times$ (pas simplement connexe)

$f(z) = z^2 : U \to \mathbb{C}^\times$ hol.

$$f \in \mathcal{O}^\times(U)$$

mais il n'existe pas de $g : U \to \mathbb{C}$ hol.

telle que $f = \exp(2i\pi g)$.

donc $\mathcal{O}(U) \xrightarrow{\Phi} \mathcal{O}^\times(U)$ n'est pas surjectif

Définition. $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ morphisme de faisceaux en groupes abéliens

$$(\ker \phi)_p = \ker(\phi_p : \mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p)$$

$$(\operatorname{Im} \phi)_p = \operatorname{Im}(\phi_p : \mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p)$$

$\ker \phi =$ unique sous-faisceau de $\mathcal{F}$.
tq $(\ker \phi)_p = \ker(\phi_p : \mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p)$.

$\operatorname{Im} \phi =$ ———————————— $\mathcal{G}$

—— $(\operatorname{Im} \phi)_p = \operatorname{Im}(\phi_p : \mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p)$.

Proposition. $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \to 0$
exacte, alors pour tout ouvert U la suite

$$0 \to \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\phi_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\psi_U} \mathcal{H}(U)$$

est exacte.

Forster Riemann surfaces Lemma 15.8.

8. Cohomologie de Čech

X surface de Riemann (compacte)

$\mathcal{F}$ = faisceau en groupes abéliens, on va définir $H^q(X, \mathcal{F})$ $q = 0, 1, 2, \ldots$

tq $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ on aura une suite exacte longue

$$\boxed{\begin{array}{l} 0 \to H^0(\mathcal{F}) \to H^0(\mathcal{G}) \to H^0(\mathcal{H}) \to H^1(\mathcal{F}) \\ \phantom{0 \to {}} \| \\ \phantom{0 \to {}} \mathcal{F}(X) \\ \qquad\qquad H^1(\mathcal{F}) \to H^1(\mathcal{G}) \to H^1(\mathcal{H}) \to H^2(\mathcal{F}) \\ \qquad\qquad H^2(\mathcal{F}) \to H^2(\mathcal{G}) \to H^2(\mathcal{H}) \to 0. \end{array}}$$

$(2 = \dim_{\mathbb{R}}(X))$.

• pour construire $H^q(\mathcal{F})$

× on fixe un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$,
on définit $H^q(\mathcal{F}, \mathcal{U})$

× on enlève la dépendance à $\mathcal{U}$,
$\mathcal{V} < \mathcal{U}$

$q \in \{0, 1, 2, \dots\}$ $\quad \mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ouvert
$\cup \mathcal{U} = X$.

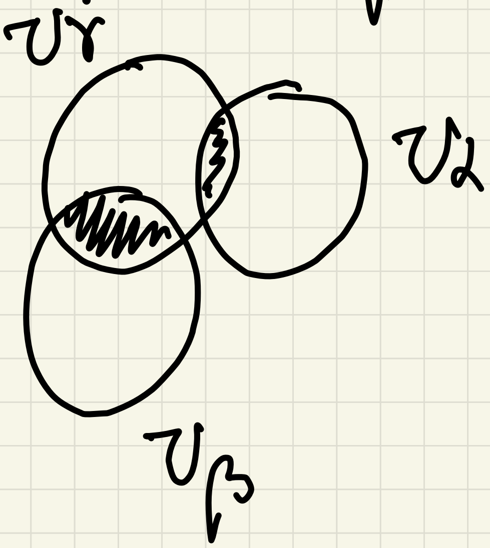
$$C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_q) \in A^{q+1}} \mathcal{F}(U_\alpha)$$

$$U_\alpha = U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1} \dots \cap U_{\alpha_q}$$

$q = 0$ $\quad f \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ $\quad f = \{f_\alpha\}$ $\quad f_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)$

$q=1 \quad f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$

$$f = \{f_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta \in A^2} \qquad f_{\alpha\beta} \in \mathcal{F}(U_\alpha \cap U_\beta)$$



$q=2 \quad f = \{f_{\alpha\beta\gamma}\}_{\alpha\beta\gamma \in A^3}$

$$f_{\alpha\beta\gamma} \in \mathcal{F}(U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma).$$

opérateur de cobord. $\delta^q : \mathcal{C}^q \to \mathcal{C}^{q+1}$

$$\boxed{\underset{\substack{\in\\ \{f_\alpha\}_{\alpha \in A^{q+1}}}}{(\delta^q f)}_{\alpha_0 \dots \alpha_{q+1}} = \underset{\substack{\in\\ \mathcal{F}(\underbrace{U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_{q+1}}}_{= U_\alpha})}}{\sum_{j=0}^{q+1}} (-1)^j \left(f_{\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_j \dots \alpha_{q+1}} \big|_{U_\alpha} \right)}$$

$$(\delta^0 f)_{\alpha\beta} = f_\beta\big|_{U_{\alpha\beta}} - f_\alpha\big|_{U_{\alpha\beta}}$$

$$\uparrow$$

$$\mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

$$(\delta^1 f)_{\alpha\beta\gamma} = f_{\beta\gamma}\big|_{U_{\alpha\beta\gamma}} - f_{\alpha\gamma}\big|_{U_{\alpha\beta\gamma}} + f_{\alpha\beta}\big|_{U_{\alpha\beta\gamma}}$$

lemme $\delta^q \circ \delta^{q-1} = 0$

(exercice)

définition $H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \ker \delta^q / \operatorname{Im} \delta^{q-1}$

$\ker \delta^q = Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$

$\operatorname{Im} \delta^{q-1} = B^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \delta^{q-1} \mathcal{C}^{q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$

(groupe abélien)

$q=0$ $\quad H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \ker \delta^0$

$$= \Big\{ f = (f_\alpha)_{\alpha \in A} \quad f_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha), \ \forall \alpha\beta$$

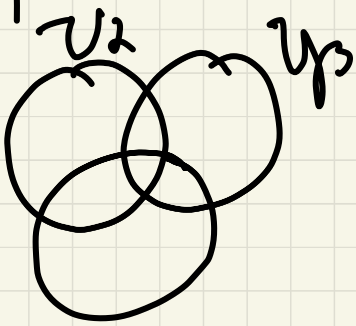
$$f_\beta|_{U_{\alpha\beta}} - f_\alpha|_{U_{\alpha\beta}} = 0 \Big\}$$

recollement $\Rightarrow \exists\, \tilde{f} \in \mathcal{F}(X)$ tq

$$\rho_X^{U_\alpha} \tilde{f} = f_\alpha \ \forall \alpha .$$

$$\boxed{H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X).}$$

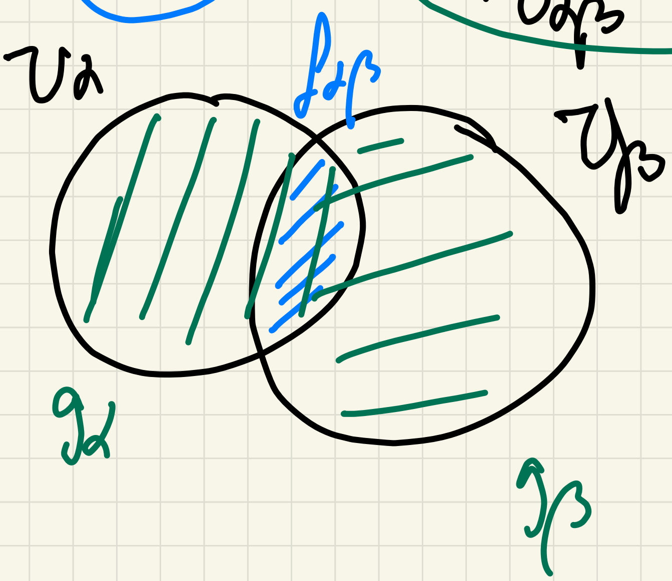
$q=1$ $\quad H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \dfrac{\{ f_{\alpha\beta},\ f_{\beta\gamma} - f_{\alpha\gamma} + f_{\alpha\beta} = 0 \ \ \forall \alpha\beta\gamma \}}{\delta^1 \{ f_\alpha \}}$



$f = (f_{\alpha\beta}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ est nul dans $H^1(X, \mathcal{F})$ ssi $\exists\, g = (g_\alpha)_{\alpha \in A}$

$g_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)$ tq

$$f_{\alpha\beta} = g_\beta\big|_{U_{\alpha\beta}} - g_\alpha\big|_{U_{\alpha\beta}} \quad \forall \alpha\beta$$



- Pour définir $H^q(X, \mathcal{F})$, on enlève la dépendance au recouvrement.

+ raffinement "refinement".

$\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I} < \mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$

$\mathcal{V}$ raffine $\mathcal{U}$ si $\forall i \in I \ \exists \alpha = \alpha(i)$ tel que $V_i \subseteq U_{\alpha(i)}$.

(les pièces V_i sont toutes plus petites que les U_α).

On choisit $\tau : I \to A$ tq $V_i \subseteq U_{\tau(i)}$

$f \in \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ $\quad f = (f_\alpha)_{\alpha \in A^{q+1}}$

$\tau(f) \in \mathcal{C}^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ $\quad (\tau(f))_{\beta \in I^{q+1}} = f_{\tau(\beta)}|_{V_\beta}$

$$\tau : I \to A \qquad V_i \subseteq U_{\tau(i)}$$

$$f = (f_\alpha)_{\alpha \in A^{q+1}}$$

$$(\tau(f))_\beta = f_{\tau(\beta)} \Big|_{V_{\beta_0} \cap V_{\beta_1} \cap \dots \cap V_{\beta_q}}$$

$\beta \in I^{q+1}$

$$f_{\tau(\beta)} \in \mathcal{F}\left(U_{\tau(\beta_0)} \cap U_{\tau(\beta_1)} \cap \dots \cap U_{\tau(\beta_q)}\right)$$

$$\tau : \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{C}^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

"opérateur de restriction" morphisme

$$\tau \circ \delta^q = \delta^q \circ \tau$$

on obtient $\tau : H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to H^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$

morphisme de groupes abéliens.

lemme si $\mathcal{V}$ raffine $\mathcal{U}$, l'opération

$\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} : H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to H^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ ne

dépend pas du choix de fonction $\tau : J \to I$

tq $V_j \subseteq U_{\tau(j)}$.

Forster Riemann surfaces Lemma 12.3.

définition $H^q(X, \mathcal{F}) = \varinjlim_{\mathcal{U}} H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$

i.e. $f \in H^q(X, \mathcal{F})$ | • $\mathcal{U}$ recouvrement ouvert
• $f \in H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$

on identifie f avec $g \in H^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$

lorsque $\exists\ \mathcal{W} < \mathcal{U}$, $\mathcal{W} < \mathcal{V}$

$\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{W}} f = \tau_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}} g \in H^q(\mathcal{W}, \mathcal{F})$

Thm (Leray) $\mathcal{U}$ recouvrement $= \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$
si $\forall q > 0$ $H^q(U_\alpha, \mathcal{F}) = 0$
$\forall \alpha$
Alors $H^q(X, \mathcal{F}) = H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

démo Forster §12.8

exemple $X =$ surface de R.
$\mathcal{F} = \underline{\mathbb{Z}}$

observation si U_α sont des disques conformes
alors $H^q(U_\alpha, \mathcal{F}) = H^q(U_\alpha, \mathbb{Z}) = \{0\}$
si $q \geq 1$ $\Rightarrow H^q(X, \underline{\mathbb{Z}}) = H^q(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$.

(idem si $\mathcal{F} = \mathcal{G}$)

///

Exercicis:

exercici 6: X Riemann compacte

$p_1 \dots p_n \in X$ $p_i \neq p_j$

$$\boxed{\begin{gathered}\exists\ f : X \to \hat{\mathbb{C}} \text{ hol.} \\ f(p_i) \neq f(p_j) \quad \forall\ i \neq j.\end{gathered}}$$

$F = \{p_1, \dots, p_n\}$

$k = 2g + \# F$ $\qquad q_1 \dots q_k \notin F$

$D = \sum q_i - \sum p_j$

$f \in H^0(D + p_1) \setminus H^0(D)$?

Riemann-Roch.

$$h^0(D) - h^0(K_\omega - D) = \deg(D) + 1 - g$$

$h^0(K_\omega - D) = 0$ car

$$\deg(K_\omega - D) = \deg(K_\omega) - \deg(D)$$
$$= 2g-2 - (k - \# f)$$
$$= 2g - 2 - (2g) = -2 < 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc} h^0(D') \geq 1 & \Rightarrow & \deg(D') \geq 0 \\ h^0(D') \geq 2 & \Rightarrow & \deg(D') \geq 1 \end{array}\right]$$

$$h^0(D + (p_1)) - h^0(K_\omega - D - p_1) = 1 + \deg(D) + 1 - g$$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \| $

0 car $\deg(K_\omega - D - p_1) =$

$\deg(K_\omega - D) - 1 < -3$

$$h^0(D+p_1) = h^0(D)+1$$

$$H^0(D+p_1) = \{f,\ \mathrm{div}(f)+D+p_1 \geq 0\}$$
$$\cup$$
$$H^0(D) = \{f,\ \mathrm{div}(f)+D \geq 0\}$$

$$\exists f \in H^0(D+p_1) \setminus H^0(D)$$

$$\begin{cases} D+p_1 = q_1+\dots+q_k-(p_2+p_3+\dots+p_n) \\ D = q_1+\dots+q_k-(p_1+p_2+\dots+p_n) \end{cases}$$

f s'annule en $p_2, p_3, \dots, p_n$

- a un pôle d'ordre ≤ 1 en $q_1 \dots q_k$.
- est holomorphe sur $X \setminus \{q_1 \dots q_k\}$

si $f \in H^0(D) \Rightarrow f$ s'annule en p_1.

conclusion

$\exists f_1$ hol sur $X - \{q_j\}$

$f_1(p_2) = \cdots = f_1(p_n) = 0$

$f_1(p_1) \neq 0$

$$f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{f_i(p_i)} f_i$$

$\alpha_i \in \mathbb{C}$

$f(p_i) = \alpha_i$

Application. $f : S \to \hat{\mathbb{C}}$ degré n.

$[\mathcal{M}(S) : \mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}})] \leq n$

$g \in \mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}}) \rightsquigarrow g \circ f \in \mathcal{M}(S)$

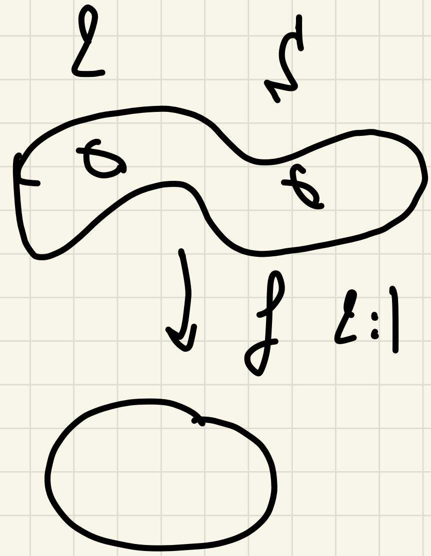
$\Rightarrow \boxed{[\mathcal{M}(S) : \mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}})] = n}$.

Surface hyperelliptique.

S
- $\sigma^2 = id \qquad \mathrm{Fix}(\sigma) = 2g+2$
- $f : S \to \hat{\mathbb{C}}$ de degré 2 exactement deux pôles simples.

$$[\mathcal{M}(S) : \mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}})] = 2$$

$$[\mathcal{M}(S) : \mathbb{C}(f)] = 2$$



$$g \in \mathcal{M}(S) \setminus \mathbb{C}(f)$$

$$\mathcal{M}(S) = \mathbb{C}(f)[g]$$

polynôme minimal de g

sur $\mathbb{C}(f)$ $\qquad a(f)g^2 + b(f)g + c(f) = 0$

$a, b, c \in \mathbb{C}(T)$. $\quad a \neq 0$

$$g^2 + b(f)\, g + c(f) = 0$$

$$\left(g + \frac{b(f)}{2}\right)^2 = \tilde{c}(f)$$

on peut supposer $\exists\, g \in \mathcal{M}(S)$

tq $g^2 = \tilde{c}(f)$ $\tilde{c} \in \mathbb{C}(T)$

$$\mathcal{M}(S) = \mathbb{C}(f)[g].$$

Thm. il existe $z_1 \neq \dots \neq z_n \in \mathbb{C}$ et une application holomorphe bijective.

$\phi : S \to G$

G = surface de Riemann compacte associée à l'équation $w^2 = \prod_{i=1}^{n} (z - z_i)$

comment construire ϕ ?

$$\phi : S \to \mathbb{C}^2$$
$$p \mapsto (g(p), f(p)) = (w, t)$$

$$\phi(S) \subseteq \left(w^2 = \tilde{c}(t) \right)$$

$\tilde{c}$ fraction rationnelle

<u>Demain</u> : on montrera que ϕ

est un biholomorphisme