03-12-2022

Giorno 11

But : terminer la démonstration du thm d'existence de fonctions harmoniques sur les surfaces non de type (H).

II.3 Différentielles sur les surfaces de R.

S surface de Riemann connexe (variété $\mathbb{R}$ $\dim_{\mathbb{R}}(S) = 2$)

$\mathcal{A} = \{(U_j, \varphi_j)\}$ atlas holomorphe

$\rightsquigarrow$ on va définir les k-formes (extérieures) $k \in \{0, 1, 2\}$

$$\boxed{\begin{aligned} &\varphi_{\ell j} = \varphi_j \circ \varphi_\ell^{-1} : \Omega_\ell \to \Omega_j \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\shortparallel}{\varphi_\ell(U_j \cap U_\ell)} \\ &\mathbb{C} \ni z = x + iy \quad \varphi_{\ell j}(x,y) = P_{\ell j} + i\, Q_{\ell j} \end{aligned}}$$

définition une 1-forme (continue) sur S est la donnée pour tout ℓ de deux fonctions

$a_\ell, b_\ell \in \mathcal{C}^0(U_\ell)$ tq $U_\ell \cap U_j \neq \emptyset$

$$\boxed{(*) \quad \begin{pmatrix} a_\ell \\ b_\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{\ell j}}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_{\ell j}}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_{\ell j}}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_{\ell j}}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_j \circ \varphi_{\ell j} \\ b_j \circ \varphi_{\ell j} \end{pmatrix}}$$

on écrit $\omega_\ell = a_\ell \, dx + b_\ell \, dy$.

$$\varphi_{\ell j}^* \omega_\ell = a_\ell \circ \varphi_{\ell j} \, \varphi_{\ell j}^* dx + b_\ell \circ \varphi_{\ell j} \, \varphi_{\ell j}^* dy$$

$$\varphi_{\ell j}^* dx = \frac{\partial \varphi_{\ell j}}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi_{\ell j}}{\partial y} dy$$

$(*) \Leftrightarrow \varphi_{\ell j}^* \omega_\ell = \omega_j$

L'espace des 1-formes C^k est un $C^k(S)$-module.

$\omega_1 \quad \omega_2$ 1-formes C^k

$f : S \to \mathbb{R}$ C^k

$\rightsquigarrow f\omega_1 + \omega_2$ 1-forme

En coordonnées holomorphes. $z = x + iy$

$$\omega_j = a_j\, dx + b_j\, dy = f_j\, dz + g_j\, d\bar{z}$$

$$f_j = \frac{1}{2}(a_j - i b_j) \qquad g_j = \frac{1}{2}(a_j + i b_j)$$

$$(*) \Leftrightarrow \underset{\parallel}{\varphi_{\ell_j}^* \omega_j} = \omega_\ell$$

$$f_j \circ \varphi_{\ell_j}\, \varphi_{\ell_j}'\, d\zeta + g_j \circ \varphi_{\ell_j}\, \overline{\varphi_{\ell_j}'}\, d\bar{\zeta}$$

$$\varphi_{\ell j}^{*}\, \omega_j = \omega_\ell \qquad \omega_j = f_j\, dz + g_j\, d\bar{z}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} f_\ell = f_j \circ \varphi_{\ell j}\ \varphi_{\ell j}' \\ g_\ell = g_j \circ \varphi_{\ell j}\ \overline{\varphi_{\ell j}'} \end{cases}$$

definition une 1-forme ω sur S est holomorphe (resp. méromorphe) si $\forall (U,\varphi)$ carte $\omega_U = f_U\, dz$ avec f_U holomorphe (resp. méromorphe)

$\iff$ $\mathcal{A} = \{(U_j, \varphi_j)\}$ atlas hol. de S

$$\omega = \{\omega_j\} \qquad \omega_j = f_j\, dz + g_j\, d\bar{z}$$

f_j est hol (resp. mér), $g_j = 0$.

$\Omega^1(S) = \{$ espace des 1-formes holomorphes sur $S\}$ est un $\mathcal{O}(S)$-module

$$\mathcal{O}(S) = \{ f : S \to \mathbb{C} \text{ holomorphe} \}.$$

Remarque : une 1-forme réelle

$\omega = \{\omega_j\}$ $\quad \omega_j = a_j\, dx + b_j\, dy$

avec $a_j, b_j : U_j \to \mathbb{R}$

en coordonnées complexes $\omega_j = f_j\, dz + g_j\, d\bar{z}$

ω_j est réelle $\iff$ $\overline{\omega_j} = \omega_j$

i.e. $g_j = \bar{f_j}$

definition • 0-forme sur S ($\mathcal{O}^0$)

$f : S \to \mathbb{C}$ $\quad \mathcal{O}^0$

• 2-forme sur S' et la donnée

$$\omega_j = a_j \, dx \wedge dy \qquad a_j : U_j \to \mathbb{C}$$

Ag $\varphi_{\ell j}^{*} \omega_j = \omega_\ell \qquad \forall \ell, j$

i.e

$$\boxed{a_j \circ \varphi_{\ell j} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{\ell j}^1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_{\ell j}^2}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_{\ell j}^1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_{\ell j}^2}{\partial y} \end{pmatrix} = a_\ell}$$

en coordonnées holomorphes

$$dx \wedge dy = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}) \wedge \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z})$$

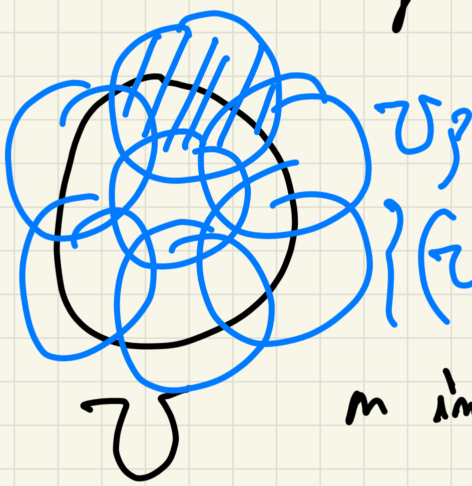
$$= \frac{-1}{2i} dz \wedge d\bar{z}$$

$$\omega_j = a_j \frac{-1}{2i} dz \wedge d\bar{z}$$

1-forme C^0, C^1, C^k, C^∞.

remarque : ω 1-forme sur S

(U,φ) carte $\quad \varphi : U \to \mathbb{C}$ on obtient une 1-forme ω_U sur U



$\{(U_i,\varphi_i)\} = \mathcal{A}$

on impose $\omega_U\big|_{U_\ell \cap U} = (\varphi_\ell \circ \varphi^{-1})^* \omega_\ell$

$(*) \Rightarrow \omega_U$ est bien définie.

1-forme $\Leftrightarrow$ $\forall\, (U,\varphi)$ carte ω_U 1-forme sur U, tq (V,ψ) carte

$$(\psi \circ \varphi^{-1})^* \omega_V = \omega_U .$$

$$\varphi_{\ell_j}^{*} \omega_j = \omega_\ell \qquad \omega_j = a_j \frac{i}{2i} dz_j \wedge d\bar{z}_j$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{a_j \circ \varphi_{\ell_j} \, |\varphi_{\ell_j}'(t)|^2 = a_\ell}$$

remarque : ω 2-forme est réelle (>0) si $\omega_j = a_j \, dx \wedge dy$ avec a_j réelle (>0).

$$\Omega_{\mathcal{C}^\infty}(\mathcal{S}) = \underset{\substack{\shortparallel \\ \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S})}}{\Omega^0_{\mathcal{C}^\infty}(\mathcal{S})} \oplus \Omega^1_{\mathcal{C}^\infty}(\mathcal{S}) \oplus \Omega^2_{\mathcal{C}^\infty}(\mathcal{S})$$

- module sur $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{S})$
- gradué
- anneau $\omega \in \Omega^i \;\; \omega' \in \Omega^j \rightsquigarrow \omega \wedge \omega' \in \Omega^{i+j}$

$i = j = 1$

par convention si $i+j \geqslant 3$ $\omega \wedge \omega' = 0$

$$\omega_v = f_v \, dz + g_v \, d\bar{z}$$
$$\tilde{\omega}_v = \tilde{f}_v \, dz + \tilde{g}_v \, d\bar{z}$$

$$(\omega \wedge \tilde{\omega})_v = \omega_v \wedge \tilde{\omega}_v = (f_v \tilde{g}_v - g_v \tilde{f}_v)\, dz \wedge d\bar{z}$$

• Opérations sur les formes différentielles.

× tirée en arrière par une application hol.

$f : S \to S'$ hol.

$\omega \in \Omega^k_{\mathcal{E}^\infty}(S')$ $k \in \{0,1,2\}$

$$v \subset S \xrightarrow{f} V \subset S'$$

$$(f^*\omega)_v = F^*\omega_V$$

$f(v) \subset V$

$$\mathbb{C} \supset L^{v} \xrightarrow{F} L^{V}$$

$$f^*(h\,\omega + \omega') = h \circ f\, f^*\omega + f^*\omega'$$

$h \in C^\infty$

$S' \subseteq S''$ $\quad i : S' \to S''$ inclusion

$$i^*\omega = \omega|_{S'}.$$

× <u>différentielle</u>.

$d : \Omega^0_{C^\infty} \to \Omega^1_{C^\infty} \qquad d : \Omega^1_{C^\infty} \to \Omega^2_{C^\infty}$

par convention $d\omega = 0$ pour $\omega \in \Omega^2_{C^\infty}$.

$f : S' \to \mathbb{C}$

$$df|_U = \frac{\partial f}{\partial z}\,dz + \frac{\partial f}{\partial \bar z}\,d\bar z \in \Omega^1_{C^\infty}$$

ω 1-forme $\quad \omega_U = f_U\,dz + g_U\,d\bar z$

$$d\omega_\sigma = d\left(f_\sigma \, dz + g_\sigma \, d\bar z \right)$$

$$= \left(\frac{\partial f_\sigma}{\partial z} dz + \frac{\partial f_\sigma}{\partial \bar z} d\bar z \right) \wedge dz + d(g_\sigma d\bar z)$$

$$\boxed{d\omega_\sigma = \left(\frac{\partial g_\sigma}{\partial z} - \frac{\partial f_\sigma}{\partial \bar z} \right) dz \wedge d\bar z}$$

Proposition : • d est bien définie

$d : \Omega^0_{\mathcal{C}^\infty} \to \Omega^1_{\mathcal{C}^\infty}$ $\quad d : \Omega^1_{\mathcal{C}^\infty} \to \Omega^2_{\mathcal{C}^\infty}$

• $d(\phi\omega) = d\phi \wedge \omega + \phi \, d\omega$

• $h : S \to S'$ $\quad d(h^*\omega) = h^* d\omega$.

• $d \circ d = 0$

démo :

- $$d\,d f = d\left(\frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar z}d\bar z\right)$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial \bar z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar z}\right)\right)}_{\substack{\shortparallel \\ 0}} dz \wedge d\bar z \qquad f \; \mathcal{C}^2$$

- autres propriétés = exercice : partir $- d f$.

$$d(h^* \omega) = h^* d\omega$$

///

remarque : $\omega_U = f_U\, dz + g_U\, d\bar z$

il est naturel de décomposer $d = \partial + \bar\partial$

$f \in \Omega^0 \rightsquigarrow \quad \partial f = \frac{\partial f}{\partial z} dz \qquad \bar\partial f = \frac{\partial f}{\partial \bar z} d\bar z$

1-formes.

par définition $df = \partial f + \bar\partial f$.

$f : S \to \mathbb{C}$ hol ssi $\frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0$ localement

ssi $\bar\partial f = 0$

ssi df est une 1-forme holomorphe.

× star - operation (cadre des variétés riemanniennes orientées).

ω : 1-forme sur S

$\omega_U = a_U \, dx + b_U \, dy$ $\quad a_U, b_U$ C^∞

$(*\omega)_U = -b_U \, dx + a_U \, dy$. (définition) en coordonnées holomorphes

$$\omega_{U} = f_U \, dz + g_U \, d\bar{z}$$

$$(\ast\omega)_U = -i f_U \, dz + i g_U \, d\bar{z}$$

Proposition ω 1-forme sur S C^1

$\ast\omega$ est C^1

$$\ast\ast\omega = -\omega$$

$$\ast\omega_1 \wedge \omega_2 = -\omega_1 \wedge \ast\omega_2$$

f C^2 $\quad \Delta f := \frac{1}{i}\partial\bar{\partial} f = d(\ast df)$

(2-formes)

(exercice).

× intégration

ω 2-forme D ouvert $D \subset\subset S$.

$\int_D \omega$ si $D \subseteq$ carte (U, φ)

$$\omega_U = a_U \, dx \wedge dy.$$

$$\int_D \omega = \int_{\varphi(D)} a_U \, d\,\mathrm{Leb}(x,y).$$

en général $\mathcal{A} = \{(U_j, \varphi_j)\}$

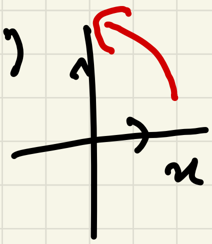
$\rightsquigarrow$ partition de l'unité χ_j

$$\int_D \omega := \sum_j \int_{D \cap U_j} \chi_j \omega$$

observation : $\int_D \omega$ est bien définie car S est naturellement orientée.

en effet $d\vartheta(d\varphi_{\ell,j}) = |\varphi'_{\ell,j}|^2 > 0$

$z = x + iy$



ω 1-forme C^0 $\quad \gamma : [0,1] \to U \quad C^1$

$$\int_\gamma \omega := \int_{t=0}^{1} \gamma^* \omega$$

si $\gamma([0,1]) \subseteq U$ carte holomorphe

$$\boxed{\int_0^1 \gamma^* \omega = \int_0^1 \left(a_U \circ \gamma \, \gamma_1' + b_U \circ \gamma \, \gamma_2'\right) dt}$$

$\omega_U = a_U \, dx + b_U \, dy$

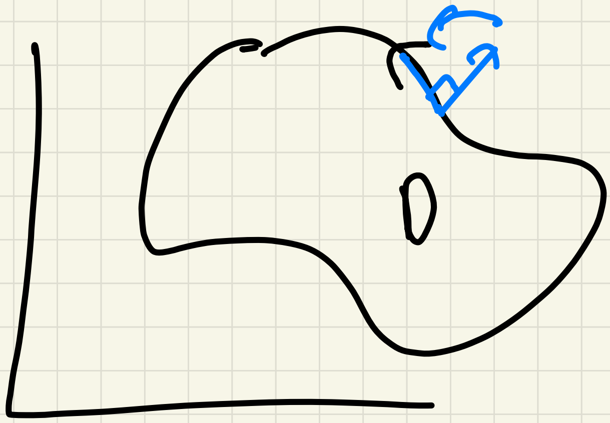
$\gamma = \gamma_1(t) + i \gamma_2(t)$

Thm (Stokes)

référence : Cartan
formes différentielles
§44.

ω 1-forme $\mathcal{C}^1$
sur S surface de Riemann
$D \Subset S$ à bord lisse

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega$$



∂D orientée par la normale extérieure

Corollaire : u, v C^2 sur D à bord lisse dans S surface de Riemann, $D \subset S$,

$$\boxed{\int_D u\Delta v - v\Delta u = \int_{\partial D} u * dv - v * du}$$

démonstration : Stokes $\omega = u * dv - v * du$

$$d\omega = d(u * dv) - d(v * du)$$

$$= du \wedge * dv + u\, d(* dv)$$

$$- dv \wedge * du - v\, d(* du)$$

$$= u\Delta v - v\Delta u + 0$$

$$du \wedge * dv = dv \wedge * du$$

$$= - * du \wedge dv.$$

///

Thm : S surface de R. pas de type (H)
$D \subseteq X$ à bord lisse, $f : D - \{p\} \to \mathbb{C}$ hol
$\exists u$ harmonique sur $S - \{p\}$, bornée hors de tout voisinage de p, $u - \mathrm{Re}(f)$ est harmonique, nulle en p.

$D \subset\subset S$,

Lemme 1 : $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ouvert connexe
$u_n : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonique tq $\sup_\Omega |u_n| < \infty$
$\exists u_{n_k}$ converge localement uniformément vers une fonction harmonique sur Ω.

démonstration : $\Omega = D(0,1)$

$u_n = \operatorname{Log}|f_n| \quad f_n : \Omega \to \mathbb{C}^{\times}$ hol.

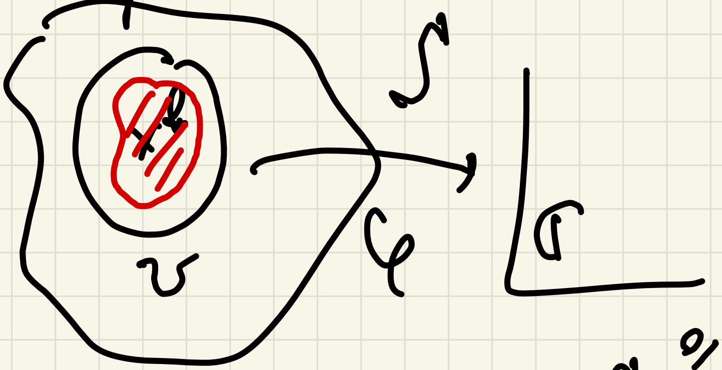
u_n bornée $\Rightarrow$ f_n uniformément bornée.

sup. $\underset{\text{Montel}}{\Rightarrow}$ $\{f_{n_k}\}$ converge.

u_n bornée inférieurement donc $|f_{n_k}| \geq \alpha$

$\Rightarrow$ u_{n_k} converge ///

On fixe une carte hol. centrée en p



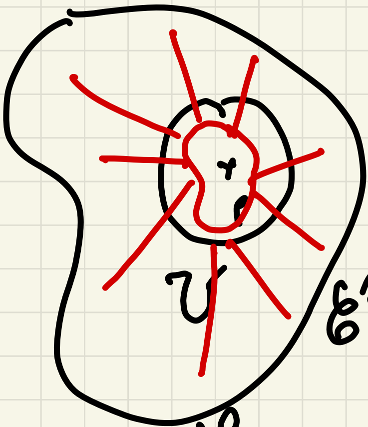
$\varphi(U) = D(0,1)$

$r < 1$

$S \supset \{|z| \leq r\} = \varphi^{-1}\{|z| \leq r\}$

convention : $\{|z|\geq 1\} := S' \setminus \{|z|<1\}$

$S' = S - \varphi^{-1}\{|z|<1\}$.



lemme E : $u : \{|z|\geq 1\} \to \mathbb{R}$, s.c.s. bornée, harmonique sur $\{|z|>1\}$.
Alors $\sup_{|z|\geq 1} u = \sup_{|z|=1} u$

démonstration : si $\{|z|\geq 1\}$ est compact, c'est le principe du maximum !

$m = \sup_{|z|=1} u < \infty$ $\quad v = \max\{u, m+\varepsilon\}$ $\quad \varepsilon \ll 1$

est sous-harmonique dans S'.

Ω' n'est pas de type (H)

Or $v - M$ sous-harmonique dans Ω'

$M \gg 0$ et $v - M < 0$

$\Rightarrow v$ est constante

$\Rightarrow u \leq m + \varepsilon \quad \forall \varepsilon$ ///

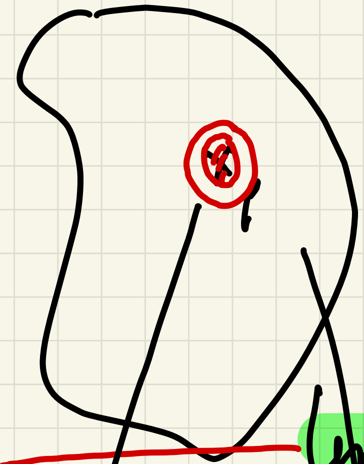
---

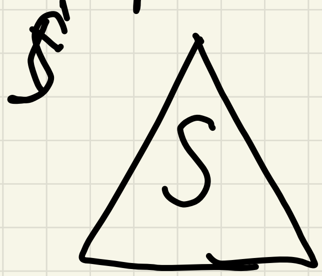
démonstration du théorème : on fixe $r_* < 1/20$

$\rho < r_*$ on fera $\rho \to 0$

u_ρ = solution au problème de Dirichlet dans $\{|z| \geq \rho\}$ tq $u_\rho|_{\{|z| = \rho\}} = \mathrm{Re}(f)$

u_ρ $\mathcal{C}^0$, harmonique dans $\{|z| > \rho\}$, on peut démontrer que $\lim_{\rho \to 0} \mu_\rho$ existe et résoud notre problème.

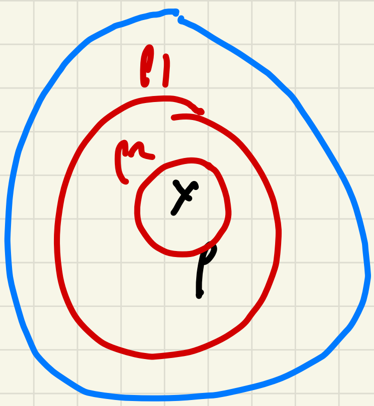




en général f a un pôle en ρ et il faut garantir que μ_ρ est bornée.

Lemme-clef : $\forall \rho < r_0 < 1/20$

$$\boxed{\exists\, c(r) > 0 \text{ tq } \sup_{|z|=r} \mu_\rho \le c(r)}$$



$|z| = r$.

démonstration :

fait : $\boxed{\int_{|z|=r} x \, d\mu_\rho = 0}$

(S n'est pas de type (H))

où $\{|z| \geq 1\}$ est compact

$$\int_{\{|z|=1\}} u_\rho * dv - v * du_\rho = \int_{\{|z| \geq 1\}} u_\rho \Delta v - v \Delta u_\rho$$

$v = 1$

$$\Rightarrow \int_{\{|z|=1\}} * du_\rho = 0 \qquad ///$$

en général, la démonstration est un peu délicate (Reyssat, Farkas-Kra) ///

$\int_{|z|=1} * du_\rho = 0$ $\qquad \omega = du_\rho + i * du_\rho$ est une 1-forme holomorphe $(|z| > 1)$.

$$\left.\begin{aligned} du_\rho &= h\, dz + \bar{h}\, d\bar{z} \\ * du_\rho &= -i h\, dz + i \bar{h}\, d\bar{z} \end{aligned}\right) \omega = 2h\, dz.$$

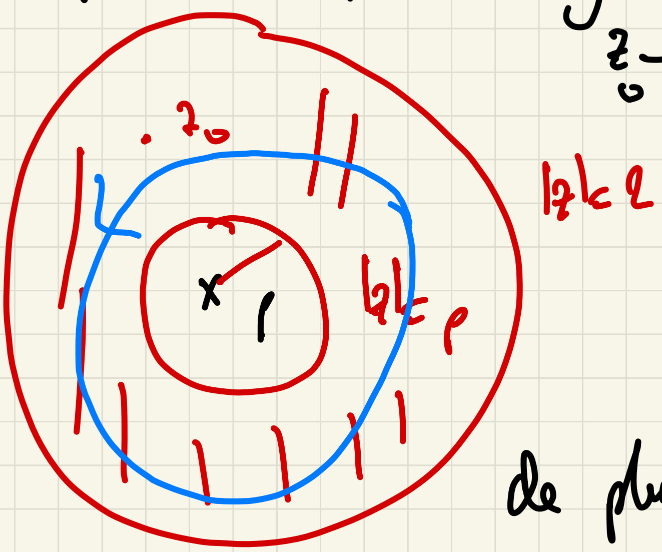
$u_\rho = 2\mathrm{Re}(g)$ $\quad g$ holomorphe $\quad h = g'$.

on définit $F : \{\rho < |z| < 2\} \to \mathbb{C}$

$z_0 \quad |z_0| \doteq 1$

$$F_\rho(z) = u_\rho(z_0) + \int_{z_0 \to z} \omega$$

bien définie et holomorphe car $\int_{|z|=1} \omega = 0$



de plus $\boxed{Re(F) = u_\rho}$

$F' = 2h \Rightarrow d(Re(F)) = d\,u_\rho$

$\omega = 2h\,dz \qquad$ (calcul).

on développe en série de Laurent dans $\{\rho<|z|<2\}$

$$F_\rho - f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n z^n \quad d_n \in \mathbb{C}$$

$$u_\rho - \mathrm{Re}(f) = \mathrm{Re}(F - f) = \mathrm{Re}\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n\Big)$$

$$\boxed{u_\rho - \mathrm{Re}(f)(re^{i\theta}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta)\, r^n}$$

$\alpha_n = \alpha_n(\rho) \qquad \beta_n = \beta_n(\rho)$

But = estimer α_n, β_n. (en fonction de ρ et f).

$$M_\rho = \sup_{|z|=1} u_\rho + \sup_{|z|=1} |\mathrm{Re}\, f|$$

Lemme : $|\alpha_k|, |\beta_k| \leq 4 M_\rho$.

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left(u_\rho - \mathrm{Re}(f)\right)(te^{i\theta}) \cos k\theta \, d\theta$$

$$= \alpha_k t^k + \alpha_{-k} t^{-k} \qquad \rho < t < 2$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left(u_\rho - \mathrm{Re}(f)\right)(te^{i\theta}) \sin k\theta \, d\theta$$

$$= \beta_k t^k + \beta_{-k} t^{-k}$$

$t = \rho$

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha_{-k} &= -\alpha_k \, \rho^{2k} \\ \beta_{-k} &= -\beta_k \, \rho^{2k} \end{aligned}} \qquad (\alpha_0 = \beta_0 = 0)$$

$t = 1$

$$|\alpha_k| (1 - \rho^{2k}) \leq 2 M_\rho = \sup_{|z|=1} |u_\rho| + \sup_{|z|=1} |\mathrm{Re} f|$$

$$|\beta_k| (1 - \rho^{2k}) \leq 2 M_\rho$$

$$\Rightarrow \rho < r_* < 1/20 \qquad |\alpha_k|, |\beta_k| \leq 4 M_\rho$$

$$\max_{|z|=r} |u_\rho| \leq \max_{|z|=r} |Re(f)| + \max_{|z|=r} |u_\rho - Re(f)|$$

$$\alpha_0 = \beta_0 = 0 \qquad \| \qquad \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\alpha_k \cos k\theta + \beta_k \sin k\theta) r^k$$

$$\leq \max_{|z|=r} |Re(f)| + \sum_{k>0} (8 \Pi_\rho) r^k + \sum_{k<0} (8 \Pi_\rho) \left(\frac{r}{\rho^2}\right)^k$$

$$\alpha_k = a_k \rho^{2k}$$

$$\leq \max_{|z|=r} |Re(f)| + 8 \Pi_\rho \frac{r}{1-r} + 8 \Pi_\rho \frac{r}{1-r}$$

$$\leq \max_{|z|=r} |Re(f)|^{\leq c(r)} + 8 \Pi_\rho \frac{2r}{1-r} .$$

$$\max_{|z|=1} u_\rho \underset{\text{lemme 2}}{\leq} \max_{|z|=r} u_\rho \leq c(r) + 8 \Pi_\rho \frac{2r}{1-r}$$

$$\Pi_\rho \leq c_2(r) + 8 \Pi_\rho \frac{2r}{1-r} \quad \Bigg| \quad \overset{r < 1/20}{\frac{16 r}{1-r} < 1}$$

$$\Rightarrow \quad M_\rho \leq c_3(r) = \text{cst} \sup_{|z|=1} |\mathrm{Re}(f)|$$

$$+ \text{cst} \sup_{|z|=1} |\mathrm{Re}(f)|$$

$$\Rightarrow \quad \sup_{|z|=1} |u_\rho| \leq M_\rho \leq c(r)$$

////

fin de la démonstration du thm :

$\{u_\rho\}_{\rho \to 0}$ uniformément bornée sur $\{|z|=1\}$

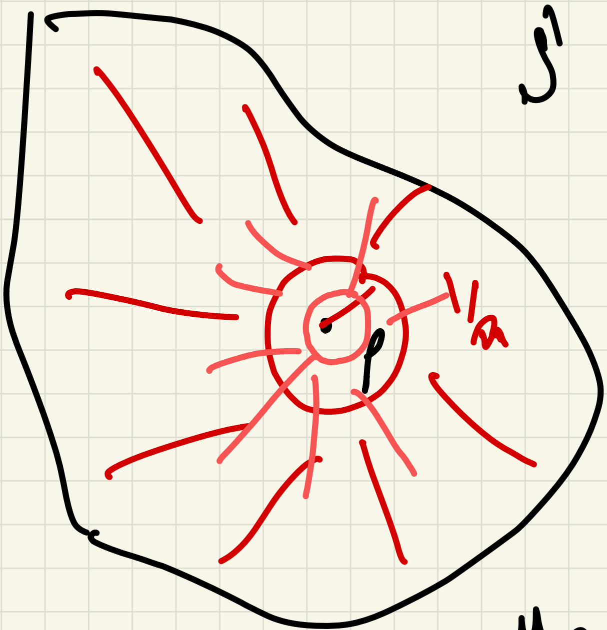
lemme 2 $\Rightarrow$ uniformément bornée sur $\{|z| \geq 1\}$
(pas de type (4))

$r = 1/n$ fixé $\quad u_\rho : \{|z| \geq 1/n\} \to \mathbb{R}$
uniformément bornée

Lemme 1 → on peut extraire

une suite $\rho_j^{(n)} \downarrow 0$ tq

$u_{\rho_j^{(n)}}$ converge sur $\{|z| > 1/n\}$



Ω par extraction diagonale on trouve une suite $\rho_\ell \downarrow 0$ tq

u_{ρ_ℓ} converge localement uniformément sur $\{|z| > 1/n\}$ pour tout n!

$u_{\rho_\ell} \to u$ sur $\Omega - \{p\}$

u harmonique sur $\Omega - \{p\}$.

pour contrôler $u_{\rho j} - \mathrm{Re}(f)(t e^{i\theta})$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\alpha_{n,j} \cos n\theta + \beta_{nj} \sin n\theta \right) t^n$$

lemme def

$$|\alpha_{n,j}|\ |\beta_{nj}| \leq 4\,\Pi_\rho \leq c(r)$$

$$\Rightarrow \quad u - \mathrm{Re}(f)(t e^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta)\, t^n$$

$$|\alpha_n|, |\beta_n| \leq c(r).$$

$\Rightarrow$ $u - \mathrm{Re}(f)$ harmonique au voisinage de ρ.

u bornée hors d'un voisinage de ρ

lemme 2 $\Rightarrow$ $\sup_{|z| \geq r} u = \sup_{|z| = r} u$ ///.

classification : $H_1(S', \mathbb{R}) = 0$

$\Downarrow$ $\quad S'$ surface de R.

$\pi_1(S') = \{e\}$

si S' est compacte $\rightsquigarrow$ voir lundi !

$H_1(S', \mathbb{R}) = 0 \Rightarrow S'$ homéo à $\hat{\mathbb{C}}$

(S orientée)

$S' = \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \qquad S^2 \xrightarrow[2:1]{} \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$

$H_1(S', \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2 \quad H_1(S', \mathbb{Q}) = 0$

si S n'est pas compacte (Johansson 1931)

$\pi_1(X)$ est libre. $\qquad \pi_1(X) = \{e\}$.

$H_1(X, \mathbb{R}) = \mathrm{Hom}(\pi_1(X), \mathbb{R}) = 0 \Rightarrow$ ///