Gomo 1

31-10-2022

Surfaces de Riemann

= objet géométrique sur lequel on peut définir la notion de fonctions holomorphes.

But = . théorème d'uniformisation
. théorème de Riemann-Roch

Ⅰ Rappels, définition, premiers exemples

Ⅱ Construction d'objets holomorphes

Ⅲ Surfaces de Riemann compactes

holomorphe = hol.

méromorphe = mér.

surface de Riemann = surface de R.

démonstration = démo

. . .

I.1 Rappels sur les fonctions hol.

$\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ouvert connexe $f : \Omega \to \mathbb{C}$

définition f est analytique si

$\forall z \in \Omega \ \exists r > 0 \quad D(z, r) \subseteq \Omega$

$$\underbrace{D(z,r)}_{\{z' \, ; \, |z - z'| < r\}}$$

et f est développable en série entière sur $D(z, r)$

$$f(z + w) = \sum_{n \geq 0} a_n w^n \qquad |w| < r$$

$$\sum |a_n| \, r^n < \infty$$

déf f est **conforme** ssi f $\mathcal{C}^1$
et sa différentielle est $\mathbb{C}$-linéaire.

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow[\mathbb{R}\text{-ev}]{\sim} \mathbb{C} \quad \text{espace vectoriel}$$

$$z = x + iy \quad x, y \in \mathbb{R}$$

. $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$

$dh(x_0, y_0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ linéaire

$$dh(x_0, y_0) \cdot \underset{\mathbb{R}^2}{\underset{\Uparrow}{(u, v)}} = \frac{\partial h}{\partial x}(x_0, y_0)\, u + \frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0)\, v$$

. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\mathcal{C}^1$

$df(x_0, y_0) = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}$-linéaire

$$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \mathbb{R}\text{-linéaire}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & & \mathbb{R}^2 \\ \| & & \| \\ \mathbb{C} & & \mathbb{C} \end{array} \quad (z = x + iy)$$

$$L(u+iv) = L(u,v) = au + bv$$

$a, b \in \mathbb{C}$.

$$df(x_0,y_0).(u+iv) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{\in\,\mathbb{C}}(x_0,y_0)\,u + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{\in\,\mathbb{C}}.v$$

$$\boxed{df(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,dy}$$

$z = x + iy \qquad dz = dx + i\,dy$

$$d\bar{z} = dx - i\,dy$$

$$df(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{dz + d\bar{z}}{2}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{dz - d\bar{z}}{2i}\right)$$

$$:= \boxed{\frac{\partial f}{\partial z}\, dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\, d\bar{z}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) \end{aligned}}$$

conclusion : f est conforme ssi

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \text{ sur } \Omega$$

exercice $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \iff$ Conditions de Cauchy-Riemann

$$f(x+iy) = P(x,y) + i\,Q(x,y)$$

$$P, Q : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \iff \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Thm $f : \Omega \to \mathbb{C}$ $\mathcal{C}^1$

f est analytique ssi f est conforme

Dans ce cas, on dit que f est hol.

. Si f est hol. $df(z) = f'(z) \times$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\cap}{\mathbb{C}}$

$$\boxed{f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z)}$$

Fait : f, g hol. $\lambda \in \mathbb{C}$

$\lambda f + g$ hol, fg hol, $\dfrac{f}{g}$ hol si $g(z) \neq 0$ $\forall z$

$f \circ g$ hol

démo du thm

analytique $\Rightarrow$ conforme

- $f(z) = z^k \quad k \in \mathbb{N}$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad k=1$$

$f = x+iy$.

$$= \frac{1}{2}\left(1 + i\, i\right) = 0$$

récurrence sur k $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$

- $f(z) = \sum a_k z^k$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\sum_k a_k z^k\right) = \sum_k \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(a_k z^k\right) = 0$$

convergence normale

///

conforme $\Rightarrow$ analytique

f de classe C^1 sur $D(0, 1+\varepsilon)$
$\varepsilon > 0$

Green - Riemann

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{|w|<1} \frac{1}{\pi(w-z)} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(w) \, d\mathrm{Leb}(w)$$

$\forall z \in D(0,1)$

si f est conforme

$\Downarrow$

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}$$

(Formule de Cauchy)

$$\int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} \underset{\text{convergence normale}}{=} \sum_{k \geq 0} z^k \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta^{k+1}}$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta}\left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)^{-1}$$

$$= \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{\zeta^{k+1}}$$

///

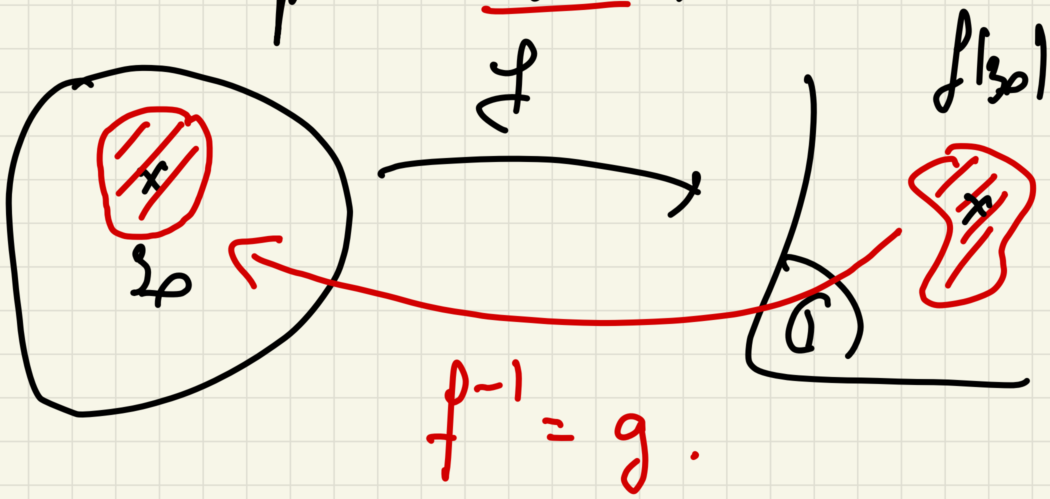
Forme locale des applications hol.

thm (inversion locale hol.)

$f : \Omega \to \mathbb{C}$ hol. $f'(z_0) \neq 0$. Il existe g hol. définie au voisinage de $f(z_0)$

$$g(f(z)) = z \quad \text{et} \quad f(g(z)) = z.$$

. si $f'(z_0) \neq 0$ alors f est un biholomorphisme <u>local</u>.



démo : on applique le thm d'inversion locale à f C^∞

$f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$df(z_0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}$ - linéaire)

<u>exercice</u> : $\det(df(z_0)) = |\underset{\neq 0}{f'(z_0)}|^2$

$\Rightarrow$ $\det df(z_0) \neq 0$

donc $df(z_0)$ est inversible

donc f est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme local

$\exists\, g : (\mathbb{C}, f(z_0)) \to (\mathbb{C}, z_0)$ $\mathcal{C}^\infty$

$g f(z) = z$ $\qquad$ $f g(z) = z$.

$\rightsquigarrow$ on montre $\dfrac{\partial g}{\partial \bar z} = 0$

exercice $\dfrac{\partial}{\partial \bar z}(g \circ f) = 0$

$$\frac{\partial}{\partial \bar z}(g\circ f) = \frac{\partial g}{\partial \bar z} \circ f \cdot \overline{f'(z)}.$$

///

Notation : $f : (\mathbb{C}, a) \to (\mathbb{C}, b)$ un germe d'application tel que $f(a) = b$ (une application définie sur un voisinage ouvert contenant a)

$f : (\mathbb{C}, a) \to (\mathbb{C}, b)$ hol. telle que $f'(a) \neq 0$ est appelé **biholomorphisme local**

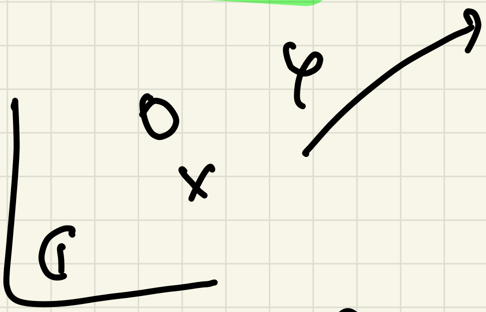
Thm $f : \Omega \to \mathbb{C}$ hol. Ω connexe et f non constante. Pour tout $a \in \Omega$, $\exists\, \varphi : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, a)$, $\psi : (\mathbb{C}, f(a)) \to (\mathbb{C}, 0)$ bihol. locaux tq $\psi \circ f \circ \varphi(z) = z^k$, $k \in \mathbb{N}^\times$.

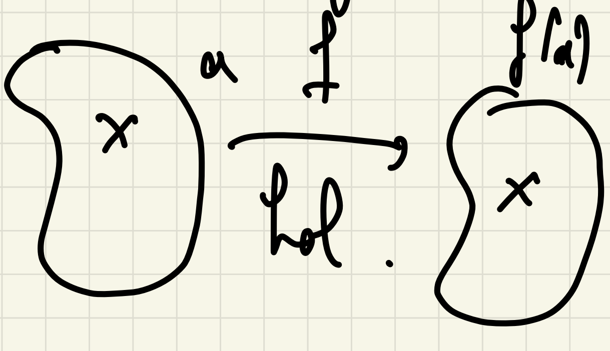
Conséquences (exercices)

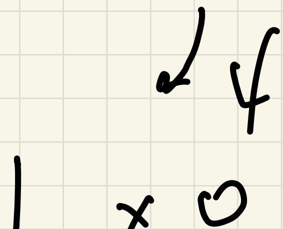
- soit $f \equiv 0$ ou $f^{-1}(0)$ discret
- f est constante ou $\{f' = 0\}$ est discret
- f est constante ou f est ouverte.

(si U ouvert $\Rightarrow f(U)$ ouvert)

démonstration







quitte à translater, on peut supposer que $a = f(a) = 0$

DSE $\quad f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n = z^k \big(\underbrace{a_k}_{\neq 0} + \sum_{n \geq k+1} a_n z^{n-k} \big)$

$$f(z) = z^k \Big(\underset{\substack{\neq \\ 0}}{a_k} + \sum_{n \geq k+1} a_n z^{n-k} \Big)$$

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{a_k} z$$

$$\varphi_1 \circ f(z) = z^k \Big(1 + \sum_{n \geq 1} b_n z^n\Big)$$

On utilise le Log. hol.

$$\mathrm{Log}(1+z) = \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{z^n}{n} \text{ hol. } D(0,1) \to \mathbb{C}$$

$$\exp \mathrm{Log}(1+z) = 1+z\,.$$

$$H(z) = z \exp\Big(\frac{1}{k} \mathrm{Log}\Big(1 + \sum_{n \geq 1} b_n z^n\Big)\Big)$$

hol. au voisinage de 0

$$H(z)^4 = z^4 \exp \operatorname{Log}\left(1+\sum_{n\geq 0} b_n z^n\right)$$

$$= z^4\left(1+\sum b_n z^n\right) = \varphi_1 \circ f(z)$$

On observe que

$$H(z) = z\left(1+G(z)\right) \qquad H'(0) \neq 0$$

par le thm d'inversion locale hol.

H est un biholomorphisme local.

$$\varphi = H^{\circ -1} \quad (\text{inverse de } H)$$

$$\varphi_1 \circ f(z) = H(z)^4$$

$$\boxed{\varphi_1 \circ f \circ \varphi(z) = z^4}$$

///

Exercice 5, 6

- $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ hol $f(0) = 0$

$$\mathbb{D} = \{ z \in \mathbb{C} \ |z| < 1 \}$$

On a $|f'(0)| \leq 1$ et $|f'(0)| = 1$

ssi $\boxed{f(z) = f'(0) z}$ (f est une rotation).

- $|\alpha| < 1$ $\varphi_\alpha(z) = \dfrac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha} z}$

$f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ hol. bijective. ?

Thm $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ biholomorphe

Alors $\exists\, \theta \in \mathbb{R}$ $\exists\, |\alpha| < 1$

$$\varphi(z) = e^{i\theta}\left(\frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha} z}\right)$$

Cas 1 où $\varphi(0) = 0$. On applique l'exercice précédent $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ hol.

$$\Rightarrow |\varphi'(0)| \leq 1$$

et à $\varphi^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ hol. $\varphi^{-1}(0) = 0$

$$|(\varphi^{-1})'(0)| \leq 1$$

Donc $\left(\varphi^{-1}\right)'(z) = \dfrac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(z))}$

$\Rightarrow \quad 1 \leq |\varphi'(0)| \leq 1$

$\Rightarrow \quad |\varphi'(0)| = 1$

$\Rightarrow$ $\varphi(z)$ est une rotation

exercice $\boxed{\varphi(z) = e^{i\theta} z}$ $\theta \in \mathbb{R}$.

cas quelconque $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$

$\varphi(0) = \alpha \qquad \varphi_\alpha = \dfrac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha} z}$

$\varphi_\alpha \circ \varphi$ est bihol.

$\varphi_\alpha \circ \varphi(0) = \varphi_\alpha(\alpha) = 0$

donc $\varphi_\alpha \circ \varphi(z) = e^{i\theta} z$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\varphi(z) = e^{i\theta} \frac{z - \alpha'}{1 - \bar{\alpha}' z}}$$

$$\{h : \mathbb{D} \to \mathbb{D} \text{ holo.}\} = \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$$

$$= \left\{ z \mapsto e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha} z} \right\}$$

est un groupe

$\mathbb{H} = \{ z, \ \operatorname{Im}(z) > 0 \}$

$\operatorname{Aut}(\mathbb{H}) \overset{?}{=}$

$$\boxed{f : \mathbb{H} \to \mathbb{D} \qquad f(z) = \frac{i-z}{i+z}}$$

- f est hol. sur $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$
- f est bijective de $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$

$$\frac{i-z}{i+z} = w \iff w(z+i) = i - z$$

$$\iff z = \frac{i(1-w)}{w+1}$$

$$f^{-1}(w) = i \, \frac{1-w}{1+w}$$

$$f(z) = \frac{i-z}{i+z} \quad . \quad \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{D}$$

$$f^{-1}(w) = i\,\frac{1-w}{1+w} \quad , \quad \mathbb{D} \to \mathbb{H} .$$

- $|w|<1 \Rightarrow \operatorname{Im} f^{-1}(w) > 0$

$$\operatorname{Im} f^{-1}(w) = \operatorname{Re}\left(\frac{1-w}{1+w}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-w}{1+w} + \frac{1-\bar{w}}{1+\bar{w}}\right)$$

$$\ldots\ldots \quad > 0$$

- $\operatorname{Im}(z) > 0 \qquad z = x+iy \quad y>0$

$$\left|\frac{i-(x+iy)}{i+(x+iy)}\right| = \left|\frac{-x+i(1-y)}{x+i(1+y)}\right| < 1$$

$$\ldots$$

observation $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ est

un bihol. de $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ sur

$\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d'}{c'}\}$ d'inverse $w \mapsto \dfrac{a'w+b'}{c'w+d'}$

(sous la condition $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL(2,\mathbb{C})$

i.e $ad-bc \neq 0$)

$$\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

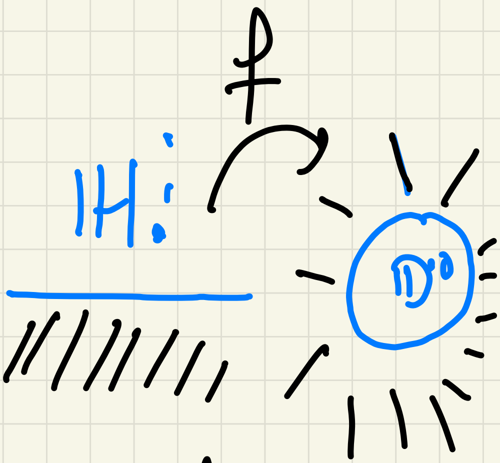
$$a' = d \quad b' = -b \quad c' = -c \quad d' = a$$

$$-\frac{d'}{c'} = \frac{a}{c}.$$

Les transformations $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ avec $ad-bc \neq 0$ sont appelées **transformations de Möbius**

<u>remarque</u> : une transformation de Möbius envoie cercle / droite de $\mathbb{C}$ sur cercle / droite.

ex $\quad f(z) = \frac{i-z}{i+z}$



$f(\mathbb{R}) = \left\{ \frac{i-t}{i+t} , t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq S^1$

On cherche à calculer $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{H} \arrow[r, bend left, "f \ \sim"] \arrow[loop below, "\varphi"] & \mathbb{D} \arrow[l, bend left, "g \ \sim"] \end{tikzcd}$$

$\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ Alors

$$f \circ \varphi \circ g(z) \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$$

$$f \circ \varphi \circ g(z) = e^{i\theta} \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha} z} = \varphi_{\theta,\alpha}$$

$$\boxed{\varphi(z) = g\left(e^{i\theta} \frac{f(z)-\alpha}{1-\bar{\alpha} f(z)}\right)}$$

$\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$

$$\begin{array}{ccccc}
\varphi = g & \circ & \varphi_{\theta,\alpha} & \circ & f \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
i\,\dfrac{1-w}{1+w} & \circ & e^{i\theta}\,\dfrac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha} z} & \circ & \dfrac{i-z}{i+z} \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & \text{Möbius} & &
\end{array}$$

$\Rightarrow$ φ est aussi une transformation de Möbius $\varphi(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ $ad-bc \neq 0$

$\varphi : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$.

Thm $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ ssi $\exists\, a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tq $ad-bc=+1$ et $\varphi(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$

<u>remarque</u> : $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},\ ad-bc=+1 \right\} = SL(2,\mathbb{R})$

$$\Phi : SL(2,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longmapsto \left(z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \right)$$

$$\ker(\Phi) = \{ \mathrm{Id}, -\mathrm{Id} \}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{H}) \underset{\text{groupe}}{\simeq} SL(2,\mathbb{R}) / \{\pm \mathrm{id}\} = PSL(2,\mathbb{R})$$

dúng du thm

$\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ $\quad \varphi(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$

$\varphi : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$

Gm suppose $a, b, c, d \neq 0$

$$\varphi(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$$

$$\varphi(0) = \frac{b}{d} = \alpha_0 \in \mathbb{R}$$

$$\varphi(1) = \frac{a+b}{c+d} = \alpha_1 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{t \in \mathbb{R} \to \infty} \varphi(t) = \underset{\substack{\shortparallel \\ a/c}}{\alpha_\infty} \in \mathbb{R}$$

quitte à diviser par a, on peut supposer que $a = 1$

$$\varphi(z) = \frac{z+b}{cz+d}$$

$$\alpha_0 = \frac{b}{d} \in \mathbb{R} \qquad \alpha_\infty = \frac{1}{c} \in \mathbb{R}$$

$$\alpha_1 = \frac{1+b}{c+d} \in \mathbb{R} \qquad \alpha_0 \neq \alpha_1$$

car φ bijective

$\Rightarrow c \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \underbrace{1+b}_{= 1+\alpha_0 d} = \alpha_1 (c+d)$$

$\Rightarrow d(\alpha_1 - \alpha_0) \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow d \in \mathbb{R}$

et $b \in \mathbb{R}$ ///