Y

Introduction : Bak mod K3

les idées derrière

- **But** aujourd'hui = expliquer dans les grandes lignes le papier de Kontsevich-Soibelman pour motiver les choix au niveau des exposés (et le titre du GT !)

  = je vais rester très vague sur certains phénomènes sans rentrer dans les détails des énoncés : deux raisons

  - demanderait d'introduire bcp de notions (simplification)
  - je ne les comprend pas : but est d'arriver à comprendre ce qu'ils font !

Motivation de KS = symétrie miroir.

- prédiction provenant de la physique théorique et qui concerne les variétés projectives $X^n/\mathbb{C}$ vérifiant $K_X = \Lambda^n T^* X$ est trivial

- Ces variétés ont une position importante en géométrie algébrique : elles forment un des blocs de base avec lesquels toutes les var. sont construites.

Ex :

$n=1$ tore $X = \mathbb{C}/\Lambda$

$n=2$
- tores $X = \mathbb{C}^2/\Lambda$
- K3 $K_X = 0$ et simplement connexe

  [quartique de $\mathbb{P}^3$, hypersurface de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ $(2,2,2)$]

$n \geq 3$
- tores $\mathbb{C}^n/\Lambda$
- CY $K_X = 0$ $h^0(\Omega^2) = 0$ $\pi_1 = 0$
- Hyperkähler $\exists\, \Omega \in \Omega^2_X$ tq Ω^n non nulle en tout point

Thm (Bogomolov Beauville)

$K_X = 0$ Alors à revêtement fini $X =$ produit Tores, CY, Hyperkähler

→ Construction des var. de CY = Batyrev
à partir de variété torique, et d'hypersurface de dans

→ Variété hyperkähler = très délicate à construire

2/

- Prédiction de la symétrie miroir.

$$X \longleftrightarrow X'$$
$$K_X = 0 \qquad K_{X'} = 0$$

objets liés à la structure hol d'un côté

$\updownarrow$

objets liés à la structure symplectique

$\boxed{ex}$ déf. structure $\mathbb{C}$ vs espace des formes de Kähler

(ex) comptage courbes rationnelles vs équation diff. liée aux dégénérescence de X.

<u>Problème</u> = pas d'explication conceptuelle du principe de symétrie
On travaillait sur des classes d'exemples → on décrit le miroir et on montre que les prédictions attendues sont valides.

SYZ (96) Kontsevich - Soibelman Gross - Siebert ont proposé un mécanisme pour expliquer la symétrie miroir.

<u>Paradigme de la symétrie miroir</u> : basé sur la notion de structure affine entière

structures affines apparaissent dans deux situations

géométrie symplectique:
syst. complètement intégrable
ou
fibration lagrangienne.

géométrie complexe:
dégénérescence de var. $\mathbb{C}$
(théorie de Berkovich)

→ indique un parallèle.

3/

<u>définition</u> . structure affine sur B^n

atlas cartes $U_i \subseteq \mathbb{R}^n$

changement de carte $\in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ ie $x \mapsto \underset{\substack{\cap \\ GL(n,\mathbb{R})}}{A}x + \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}^n}}{B}$

. tropicale si $\in GL_n(\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{R}^n$

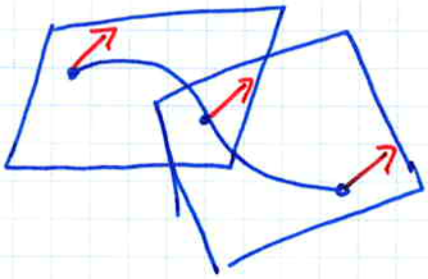
. entière si $\in \mathrm{Aff}(\mathbb{Z}^n)$.

<u>Reformulation</u> : structure affine $\longleftrightarrow$ connection ∇ sur TB

× coordonnées x_i $\quad y_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ $\qquad x'_i = Ax_i + B \quad y'_i = A y_i$

$\nabla = d$

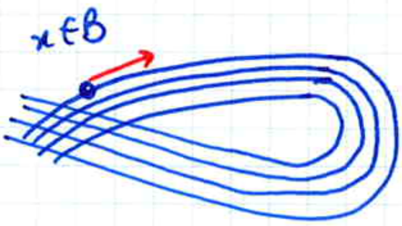
× transport parallèle



∇ est plate et sans torsion

<u>Fait</u> : ∇ plate sans torsion $\Rightarrow \exists!$ structure affine induisant ∇

<u>Parallèle</u> : on fixe une direction. ça induit un feuilletage localement

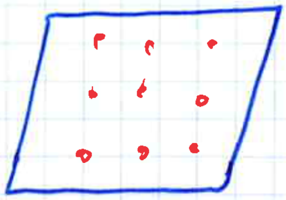


en général il ne se prolonge pas globalement.

Monodromie $\pi_1(B) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ non triviale.

Géométrie tropicale : dans chaque espace tgt on a un réseau

$M_b \subseteq T_b B$



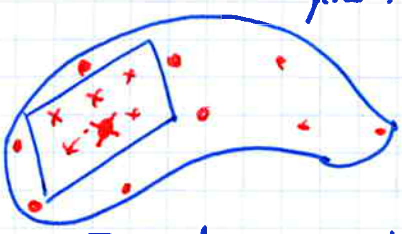
qui varie continûment + sections σ induite vérifiant $D\sigma = 0$ (parallèle)

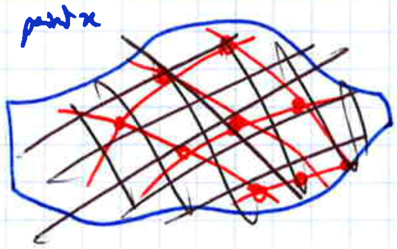
affine entière : p : on dispose d'un ensemble discret $\Lambda_x \subseteq B$ qui est la projection du réseau sur B.

~~ensemble de parallèles P_i~~

~~tq $\Lambda_x = \{$pts singuliers de $\cup P_i\}$~~

si on fixe un point x





Isomorphisme structure affine = les connexions associées sont ~~proportionnelles~~ égales $D = D'$

tropicale = + réseaux sont les mêmes

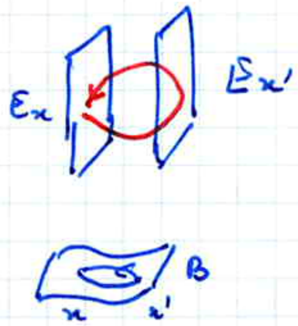
entière = + quadrillages sont les mêmes basés au même point

---

remarque :

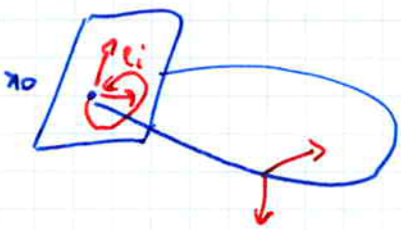
courbure de D sur un fibré réel $E \to B$

nulle $\Leftrightarrow$ holonomie triviale.



torsion de D sur TB.

on relève les chemins dans $T_{x_0} B$:
1) on fixe une base e_i en $T_{x_0} B$
2) on la suit par transport parallèle $e_i(t)$ en $T_{\gamma(t)} B$
3) on écrit $\gamma'(t) = \sum a_i(t)\, e_i(t)$
4) on résoud $\tilde{\gamma}'(t) = \sum a_i(t)\, e_i$ [dans $T_{x_0} B$]



torsion nulle $\Leftrightarrow [\gamma(1) = \gamma(0) \Rightarrow \tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}(0)]$

4/ Exemple sur les variétés compactes

ex 0 $\quad \mathbb{R}/\alpha\mathbb{Z} \quad \alpha>0$ muni de la structure affine standard sur $\mathbb{R}$

→ toutes isomorphes $z \mapsto \alpha z$ induit $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \sim \mathbb{R}/\alpha\mathbb{Z}$

→ la structure affine tropicale de $\mathbb{R}$ descend sur $\mathbb{R}/\alpha\mathbb{Z}$

ça induit une métrique longueur $= \alpha$

donc non isomorphe

→ la structure affine entière de $\mathbb{R}$ descend ssi $\alpha \in \mathbb{Z}^*$.

ex 1 $\quad \mathbb{R}_+^* / \langle q\rangle^{\mathbb{Z}} \quad 0<q<1$ muni de la structure affine standard

toutes isomorphes

la structure affine tropicale ne descend jamais

Invariants généraux $\quad B, \nabla$ affine $\quad \tilde{B} \to B$ revêtement universel

1) **développante** $\quad d : \tilde{B} \to \mathbb{R}^n$

obtenue en recollant les cartes les unes aux autres

intrinsèquement on fixe $\tilde{x} \in \tilde{B}$, $\tilde{e}_1 \ldots \tilde{e}_n$ base de $T_{\tilde{x}}\tilde{B}$ et

on regarde les champs $\tilde{\xi}_1 \ldots \tilde{\xi}_n$ obtenus par transport parallèle

~~dans~~ Si on fixe $\tilde{y} \in \tilde{B}$ on prend $\gamma : [0,1] \to \tilde{B}$ $\gamma(0)=\tilde{x}$ $\gamma(1)=\tilde{y}$

on écrit $\gamma'(t) = \sum a_i(t)\, \tilde{\xi}_i(\gamma(t))$ $\quad d\tilde{y} = \int_0^1 \sum a_i(t)\, e_i \, dt$ dans $\mathbb{R}^n$.

ex 0 $\quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ surjective $\qquad$ ex 1 $\quad \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^* \subsetneq \mathbb{R}$ non surjective

[si on change $\tilde{x}$ et $\tilde{e}_i$ on transforme d par une transformation affine]

2) **représentation d'holonomie**

$\gamma \in \pi_1(B) \rightsquigarrow T_\gamma : \tilde{B} \to \tilde{B}$ transformation induite. Elle préserve la structure affine sur $\tilde{B}$

$$d\, T_\gamma = \rho(\gamma)\, d \qquad \text{avec } \rho(\gamma) \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$$

On obtient $\rho : \pi_1(B) \to \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ définie à conjugaison dans $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ près

ex 0 : αz $\qquad$ ex 1 $\quad qz$

En général les exemples sont avec B = fibré en tore sur un tore.

Thm (B,∇) compacte $\Rightarrow$ $e(B) = 0$.

- dim 1 = cercle : les seules sont celles décrites au-dessus
- dim 2 = seule surface avec telle structure est $S^1 \times S^1$
- dim 2 complexe, structure affine complexe K-Kobayashi, Klingler
  Kähler $\Rightarrow$ X = tore.

5/ La construction de dualité

B structure affine (entière) tropicale

- TB = fibré tangent coordonnées x_k, $y_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$

$\downarrow$ quotiente chaque fibre par le réseau M_x

$X(B) \xrightarrow{\pi} B$

structure holomorphe sur $X(B)$

$z_k = x_k + i y_k$ $\qquad x'_k = A x_k + B \quad y' = Ay$

$z'_k = A z_k + B$

+ structure affine holomorphe.

Fibre de π : totalement réelle

- T^*B = fibré cotangent coordonnées x_k $\quad y^*_k = dx_k$

$(y^*)' = A^{-1}(y^*)$

$\downarrow$

$X^*(B) \xrightarrow{\pi^*} B$

structure symplectique canonique $\omega = \sum dx_k \wedge dy_k$

Fibre de π^* = Lagrangienne.

<u>exemple</u> $\quad B = S^1$. $\qquad \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ isométrique α = longueur de S^1.

$\cup$

$\alpha\mathbb{Z}$ = noyau

. Fibré tangent $\quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow TS^1$

$(v, \theta) \sim (v, \theta + \alpha)$

$X(S^1) = \mathbb{R}^2$ modulo $\begin{matrix}(v+1, \theta)\\(v, \theta+\alpha)\end{matrix}$

$\simeq \mathbb{C} / \mathbb{Z} + i\alpha\mathbb{Z}$

. Fibré cotangent $\simeq$ Fibré tangent est trivial

En général à partir de tores, on n'obtient que des tores

la construction n'est donc pas (a priori) adaptée pour expliquer la symétrie miroir

---

Remarque :

- Fibration Lagrangienne $\Rightarrow$ structure affine tropicale sur la base

$\pi : X \to B$

- Fibration speciale Lagrangienne $\Rightarrow$ + métrique vérifiant

$g_{ij} = \frac{\partial^2 K}{\partial x_i \partial x_j}$ K fonction.

ici | X est CY
$\Omega \in \Lambda^n T^* X$ [normalisé par $\Omega \wedge \bar\Omega (X) = 1$]
$[\omega]$ classe de Kähler $\rightsquigarrow$ ω forme de Kähler Ricci-plate (ie holonomie $\in SU(n)$)

V SL ssi | V Lagrangien pour $Im(\omega)$
| $Re(\Omega)|_V$ est la forme volume induite par $Re(\omega)$

- $(B, \nabla, K) \longrightarrow X(B,K)$ [devient Kähler $\omega = 2i\partial\bar\partial(K \circ \pi)$.
$\pi : X(B,K) \to B$.
Ricci-plate $\Leftrightarrow$ $MA(K) =$ constant !

$X^*(B,K)$ sympl.

dualité

devient Kähler pour $z_i^* = \frac{\partial K}{\partial x_i} + i y_i^*$ $(y_i = dx_i)$

- (B, ∇^*, K^*).

transformée de Legendre.

$f : V \to \mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ $f^* : V^* \to \mathbb{R}$

$f^*(l) = \sup(l - f)$

01 Pour expliquer la symétrie miroir, on regarde des structures affines entières

<u>def</u> (B, D) sing si $\exists\, B_{sing} \subset B$ codim ≥ 2

(B_{reg}, D) affine.

Pbm de Reconstruction

B var. affine sing. compacte. Construire X kähl. compacte et $\pi : X \to B$ tq $\pi^{-1} B_{reg}$ est donnée par la construction précédente

<u>remarque</u> : la partie symplectique peut être récupérée aussi si on a un peu plus de structure.

<u>A partir là</u> : la discussion va être bcp moins précise.

<u>Fait</u> il est peu probable que RD ait une solution Gross [SYZ p.20]

⇝ reformulation du problème puis le relier aux constructions précédentes

<u>idée</u> de la reformulation : Kontsevich-Soibelman Gross-Siebert.

on va plutôt chercher une famille à 1 paramètre de var. kähl + dégénérescence

Plan de la suite

- dégénérescence ⇝ structure affine
- énoncé <u>vague</u> du pbm de reconstruction mais plus réaliste
- énoncé <u>vague</u> des résultats de KS, autres approches ; reconstruction en dimension 2.

<u>remarque</u>. Le lien entre reconstruction à l'aide de dégénérescence et la construction initiale est <u>conjecturale</u>. Pour l'instant il manque les aspects <u>métriques</u>.

71

• <u>Dégénérescence de variété projective :</u>

$\pi : \mathcal{X}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{D}$ hol. propre $\mathcal{X}$ lisse

$\pi^{-1}(s) = X_s$ projective lisse.

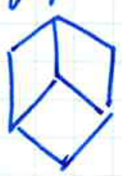
$X_0 =$ non réduite non irréductible $= \cup E_i$

Quitte à éclater | $E_I = \bigcap_{i \in I} E_i$ irréductible lisse $\forall I$.
| X_0 à croisements normaux.

$\Delta(\mathcal{X}) =$ Complexe simplicial [polytope de Clemens] de dim. réelle $\leq n$.

| $\{$ faces σ_I de dim. $k \} \leftrightarrow \{ I$ tq $E_I \neq \emptyset$ $|I| = k+1 \}$
| face $\sigma_I \subset \sigma_J$ ssi $I \subseteq J$

dim 2 = graphe dual

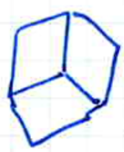
dim 3 =  

• <u>structure affine</u> : pas le temps d'expliquer en détails

× repose sur $\Delta(\mathcal{X}) \hookrightarrow$ espace fonctionnel dans lequel il existe des simplexes avec structure affines intégrales naturelles.

× = Espace de Berkovich $= \{$ semi-normes mult. sur $\mathbb{C}(\mathcal{X})$ tq $|\pi^* t| = e^{-1} \}$.

× dim 1 = métrique $d(E, E') = \frac{1}{b_E b_{E'}}$

× dim qcq =  $E_1 .. E_n$ $\sigma_{E_1 .. E_n} \simeq \{ \sum b_i x_i = +1$ dans $\mathbb{R}^n_+ \}$

⚠ Pas clair pourquoi la structure s'étend à travers les faces de dim n-1

Pbm de reconstruction 1

B structure affine sing. $\exists \pi : \mathcal{X} \to \mathbb{D}$ tq $\Delta(\mathcal{X}) \simeq B$.

Thm [redacted]

Le problème de reconstruction a une solution positive en dim 2.

- $B_{reg} = S^2 \setminus \{24 \text{ pts}\}$ + hyp. sur les singularités
- fibre générique = K3

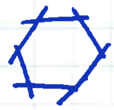
Remarque : sous quelles conditions la structure affine sur chaque face du polytope de Clemens s'étend ?

KS & GS fournissent essentiellement la même solution : lorsque la dégénérescence est localement torique.

8/ Dégénérescence des surfaces K3

- courbes elliptiques (Kodaira)

fibre réduite pour m adéquat (semi-stabilité).

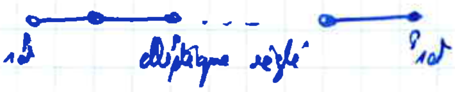
|| $\times$ est lisse 6
|| $\times$ est union de courbes rationnelles 

- le même résultat est valide pour les K3.

$\boxed{\text{Thm}}$ Kulikov Persson

$\pi : \mathcal{X} \to D$ semi-stable $K_{\mathcal{X}} = 0$

(I) X_0 lisse

(II) $\Delta(\mathcal{X}) =$ 

(III) $|\Delta(\mathcal{X})|$ = sphère $\Delta(\mathcal{X})$ = triangulation

E_i = surface rationnelle $X - E_i \mid E_i$ cycle de courbes rationnelles anti-canonique

exemple $P(x_0, x_1, x_2, x_3)$ degré 4

$x_0 x_1 x_2 x_3 + t\, P(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$ $|\Delta(\mathcal{X})| =$ 

[KS] structure affine entière à $S^2 \setminus \{24 \text{ pts}\}$

monodromie autour d'un pt singulier $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

9/

Autres approches. au problème de reconstruction

① méthode de Viro : à partir d'hypersurface B tropicale de $\mathbb{R}^n$ on construit une famille à un paramètre d'hypersurfaces de var. torique $t \to 0$ "dégénérant" sur B

② méthode de Gross-Siebert : élaboration de la méthode de Viro (?) notion de dégénérescence torique.

③ cas de S^2 : ~~[illegible]~~
thm de Friedman version faible de reconstruction

- triangulation de S^2
- poids sur les arêtes

$\exists$ dégénérescence de type III dont la combinatoire est donnée
[Radu Laza p.18]

Plan du GT

- K3
- dégénérescences surfaces K3
- dualité: sky et surfaces K3
-