DYNAMIQUE DES APPLICATIONS RATIONNELLES

Charles Favre

July 22, 2002

PRÉSENTATION GÉNÉRALE.

Cette thèse est consacrée à l'étude des systèmes dynamiques méromorphes. Plusieurs aspects sont ici considérés. Le Chapitre 1 traite des problèmes de type locaux de conjugaison de germes superattractifs de $(\mathbf{C}^2, 0)$ et de ses applications en géométrie complexe. Dans tous les autres Chapitres 2, 3, 4 et 5, nous nous attachons à décrire la dynamique globale de tels systèmes.

Donnons tout d'abord une perspective d'ensemble de ce mémoire. Nous renvoyons le lecteur aux introductions de chaque chapitre pour de plus amples informations sur leur contenu respectif.

- Problèmes locaux et surfaces de Kato (Chapitre1).

Le point de départ de ce chapitre est l'étude des germes $f : (\mathbf{C}^2, 0) \circlearrowleft$ strictement contractants et satisfaisant à la condition suivante:

L'ensemble critique $\mathcal{C}(f^2)$ est totalement invariant par f
et à croisements normaux en 0.

Nous avons nommé de tels germes *rigides*. Nous en donnons une classification à conjugaison analytique et formelle complète.

Si un germe rigide contractant f est *injectif* hors de $\mathcal{C}(f^2)$, il est possible de lui associer canoniquement une surface complexe compacte minimale $S(f)$ appelée surface de Kato de f. Celle-ci est une compactification "naturelle" de l'espace des orbites de f non critiques. De nombreux travaux ont été consacrés à ces surfaces par Kato, Inoue, Enoki, Nakamura, Dloussky. Nous renvoyons à l'introduction du Chapitre 1 pour des références précises.

Notre caractérisation des germes holomorphes définissant les surfaces de Kato à l'aide de la condition de rigidité, et notre classification de ces germes nous permet alors de compléter la classification de ce type de surface. Nous étudions divers aspects de leur géométrie à la Section 1.2 en nous concentrant tout particulièrement sur la structure du groupe de Picard de $S(f)$ et sur l'existence de feuilletages et de champs de vecteurs holomorphes.

- Problèmes globaux.

Soit $f : X \to X$ une application méromorphe dominante d'une variété complexe compacte dans elle-même que l'on supposera d'entropie topologique $h_{top}(f) > 0$. Nous voulons décrire le système dynamique $\{f^k : X \to X\}_{k\geq 0}$. Dans la théorie classique de Fatou-Julia, on décompose l'espace dynamique en deux zones disjointes: l'ensemble de Fatou $F(f)$ où le comportement des orbites de f est régulier; l'ensemble de Julia $J(f)$ sur lequel f est "chaotique". Dans tout ce mémoire, nous nous intéresserons uniquement à la partie "chaotique" de la dynamique de f.

Plus précisément, on cherche à construire une mesure μ à support dans $J(f)$ positive invariante naturelle possédant les propriétés suivantes:

(P1) μ est mélangeante;

(P2) μ est l'(unique) mesure d'entropie maximale;

(P3) μ est faiblement hyperbolique: tous ses exposants de Lyapunov sont non nuls;

(P4) les points périodiques de f (selles ou répulsifs suivant les cas) s'équidistribuent selon μ.

Pour les systèmes holomorphes étudiés jusqu'à présent (P1), (P2), (P3) et (P4) sont effectivement satisfaites. Dans le cas des applications holomorphes de $\mathbf{P}^k$ celles-ci sont dûes à [FS92-2] et [BD99], pour les automorphismes polynomiaux de $\mathbf{C}^2$ à [BLS93] (voir aussi [FS92]), et plus récemment [Ca99] a démontré ces propriétés pour les automorphismes de surfaces compactes.

Dans tous les cas, la mesure μ est construite comme un produit extérieur $\mu = T_1 \wedge T_2$ de courants positifs fermés de bidegré $(1,1)$ à potentiel continu et possédant une propriété d'invariance $f^*T_i = \rho_i T_i$ pour des réels $\rho_i > 1$. En mélangeant ces propriétés d'invariance à des méthodes de théorie du pluripotentiel et d'analyse complexe, on obtient les informations désirées sur μ.

Cependant le programme énoncé ci-dessus reste pour l'instant inaccessible en toute généralité. La présence de points d'indétermination complique en effet de manière essentielle la dynamique de f et les outils de théorie du pluripotentiel à notre disposition se révèle d'utilisation ardue.

- Courant de Green (Chapitre 2).

La construction d'un courant $T(f)$ positif fermé $(1,1)$ satisfaisant la condition d'invariance $f^*T(f) = \rho \cdot T(f)$ pour un réel $\rho > 1$ est à la base de toutes les études des systèmes dynamiques holomorphes. Ce courant constitue un analogue $n-1$ dimensionnel ($\dim X = n$) d'une mesure positive invariante. Ces courants dit “de Green” ont été introduits tout d'abord par [FS92-2], [BS91] et [HP94] (voir aussi [Si99]) dans le cadre des applications rationnelles de $\mathbf{P}^n$. Nous suivons ici la construction générale de V. Guedj ([Gu99]).

L'idée est de partir d'une forme $(1,1)$ lisse ω positive fermée dont la classe de cohomologie est invariante $f^*\{\omega\} = \rho\{\omega\}$ pour $\rho > 1$. On pose alors: $T(f) := \lim_{k\to\infty} \rho^{-k}(f^*)^k\omega$ (ρ est un facteur de normalisation). Il apparait que ce courant limite existe toujours et est essentiellement unique. Son support est toujours inclus dans $J(f)$. Nous allons chercher à détailler un peu la structure de ce courant.

Si l'on veut définir la mesure μ comme produit extérieur de $T(f)$ avec d'autres courants positifs fermés, il est important de contrôler précisément les singularités du courant de Green. Le théorème principal du Chapitre 2 est le résultat suivant. Notons $\nu(z, T(f))$ le nombre de Lelong de $T(f)$ en z, et $I(f)$ l'ensemble des points d'indétermination de f.

Théorème A. *Pour tout $z \in X$, on a*

$$\nu(z, T(f)) > 0 \Rightarrow z \in \bigcup_{k \geq 0} f^{-k} I(f).$$

Les singularités "fortes" de $T(f)$ sont donc concentrées sur l'ensemble d'indétermination. Ceci constitue un premier pas dans le contrôle du courant $T(f)$ hors des points d'indétermination.

Note: On se restreindra dans le reste de notre discussion au cas des surfaces complexes. On suppose donc $\dim_{\mathbf{C}} X = 2$, et on imposera de plus que $X = \mathbf{P}^2$ ou $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$.

- Equidistribution des hypersurfaces vers $T(f)$ (Chapitre 4).

Plaçons nous dans le cas de $X = \mathbf{P}^2$ et soit ω la forme de Fubini-Study. Celle-ci représente une "moyenne" des courants d'intégration sur les courbes de $\mathbf{P}^2$. On peut donc s'attendre à ce que le courant de Green défini par $T(f) := \lim_{k \to \infty} \rho^{-k} (f^*)^k \omega$ représente l'équidistribution d'une courbe générique $H \subset \mathbf{P}^2$. Les théorèmes [RS97] Theorem 1.2 ou [Si99] Théorème 10.1 répondent affirmativement à cette question. Il est cependant important de trouver des critères précis assurant la convergence de la suite de courants $\rho^{-k} (f^*)^k [H] \to T(f)$ pour une hypersurface H donnée. On peut donner une solution complète à ce problème pour les applications birationnelles.

Théorème B. *Soit $f : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$ une application birationnelle de degré ρ. On suppose que pour tout $k \geq 0$ on a $\dim f^{-k} I(f) = 0$.*

1. *Il existe un ensemble de points exceptionnels $\mathcal{E}$ contenant au plus un point p t.q. pour toute hypersurface H de degré $c > 0$ on a l'équivalence*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{\rho^k} (f^*)^k [H] \to c \cdot T(f) \text{ ssi } p \notin H.$$

2. *Si $\mathcal{E} = \{p\}$ est non vide, il existe une unique courbe rationnelle lisse V contenant p et t.q. $f^*[V] = \rho [V]$.*

Remarquons que l'assertion 1 implique en particulier que l'ensemble des hypersurfaces H "exceptionnelles" i.e. pour lesquelles on n'a pas convergence vers $T(f)$, est inclus dans un hyperplan de l'espace projectif dual.

Ce théorème est un analogue de l'assertion en dynamique à une variable complexe: pour tout $P \in \mathbf{C}[z]$, les préimages des points non exceptionnels s'équidistribuent selon la mesure d'équilibre de P.

La démonstration du Théorème B s'appuie sur des estimations volumiques fines des suites $\mathrm{Vol}(f^k(E))$ pour un borélien $E \subset X$ donné.

Les multiplicités asymptotiques

Les preuves des deux théorèmes A et B s'appuient sur des idées similaires. On ramène tout d'abord la preuve au contrôle de la croissance de certaines multiplicités: le degré topologique local $e(x, f^k)$ de f^k en x pour le théorème A; la multiplicité d'annulation du déterminant Jacobien $\mu(x, Jf^k)$ pour le théorème B. Les points x pour lesquels le théorème A (resp. B) pourrait être mis en défaut sont caractérisés par le fait que la suite $e(x, f^k)^{1/k}$ (resp. $\mu(x, Jf^k)^{1/k}$) converge vers une valeur $d > 1$ déterminée par f (le degré algébrique de f lorsque $X = \mathbf{P}^2$). Le point crucial est que ce type de points possède nécessairement des propriétés de récurrence très fortes: en dimension 2, soit ils sont prépériodiques, soit leur orbite rencontre une composante périodique de l'ensemble critique. On peut donc les localiser précisément, et on conclut en étudiant séparément ces cas.

Ces propriétés de récurrence résultent de la structure rigide des applications holomorphes et du fait que pour $c > 1$ les ensembles $\{e(., f^k) \geq c\}$ (resp. $\{\mu(., Jf^k) \geq c - 1\}$) sont des sous-ensembles analytiques d'intérieur vide. La Section 2.5 est consacrée à l'étude des limites $\lim_{k\to\infty} e(x, f^k)^{1/k}$, $\lim_{k\to\infty} \mu(x, Jf^k)^{1/k}$ que nous appellerons multplicités asymptotiques.

- Construction de μ pour deux classes d'exemples (Chapitre 5).

Même si l'on ne sait pas construire de mesure invariante intéressante en général, il est deux classes d'applications rationnelles possédant un bon candidat pour les propriétés (P1) à (P4).

1. Lorsque $f : X \to X$ est une application birationnelle (i.e. possédant un inverse rationnel), on aimerait définir $\mu := T(f) \wedge T(f^{-1})$. Cependant l'existence même de ce produit extérieur n'est pas assuré car les potentiels de $T(f)$, $T(f^{-1})$ sont non bornées.

2. A l'opposé, lorsque $f : X \to X$ est de degré topologique assez grand (voir les conditions du Théorème 3.3.1), Russakovski et Shiffman ont montré l'existence d'une mesure μ_f représentant l'équidistribution des préimages d'un point $z \in X$ générique: $\deg(f)^{-k}(f^k)^\bullet\delta_z \to \mu_f$. Nous avons très peu d'informations sur cette mesure: en particulier, on ne sait même pas si $\mu_f(I(f)) = 0$. Cependant lorsque l'on peut assurer que μ_f ne charge pas l'ensemble critique de f alors (P1) et (P2) sont automatiquement satisfaites.

Nous étudierons au Chapitre 5 deux classes d'exemples correspondant à ces deux cas.

1. Une classe $\mathcal{H}$ d'applications polynomiales birationnelles de $\mathbf{C}^2$ définie par: $f(z,w) = (w, A(w)z + B(w))$ avec $\max\{1 + \deg A, \deg B\} \geq 2$. Celles-ci généralisent les applications de Hénon. Nous prouvons pour tous les éléments de $\mathcal{H}$ l'existence d'une mesure $\mu := T(f) \wedge T(f^{-1})$ possédant la propriété (P1).

2. Les produits croisés polynomiaux $\mathcal{PC}$ de $\mathbf{C}^2$ définis par $f : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$, $f(z,w) = (P(z), Q(z,w))$ pour des polynômes P, Q arbitraires t.q. $\min\{\deg P, \deg_w Q\} \geq 2$. En particulier les degrés $\deg_w Q(z,.)$ peuvent chuter dans les fibres contrairement à tous les cas envisagés jusqu'à présent dans [Se97], [He96], [J1-99], qui supposait f holomorphe globalement. On construit la mesure μ sous la forme $\mu := dd^c(vT(f))$ où v est une fonction s.c.s. positive définie uniquement sur $\operatorname{Supp} T(f)$. La mesure μ définit un courant pluripositif au sens de [Si85]. En contrôlant précisément le comportement de v au voisinage des points d'indétermination on prouve $\mu(\mathcal{C}(f)) = 0$. On en déduit alors toutes les propriétés (P1) à (P4).

- $\boxed{\text{Plan du mémoire}}$

Le Chapitre 1 est consacré à la classification des germes rigides contractants et à ses applications à l'étude des surfaces de Kato. Ce chapitre est indépendant du reste du mémoire.

Le Chapitre 2 contient des résultats généraux sur les applications méromorphes et est essentiellement centré autour de la construction du courant de Green, du Théorème A et de sa preuve.

Au Chapitre 3 nous considérons plus précisément le cas des surfaces $X = \mathbf{P}^2, \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ dont tous nos exemples ultérieurs sont tirés. L'étude du courant de Green pour les applications polynomiales de $\mathbf{C}^2$ (Section 3.4) est cruciale pour la suite, en particulier au Chapitre 5.

Le Chapitre 4 est consacré aux problèmes de convergence vers le courant de Green. Nous prouvons le Théorème B dans un cadre assez général.

Au Chapitre 5, nous étudions les deux classes $\mathcal{H}$ et $\mathcal{PC}$ introduites cidessus. Nos constructions font appel aux Théorèmes A et B précédents et s'appuie aussi de manière essentielle sur les résultats de la Section 3.4.

Enfin nous avons inclus trois appendices. Les deux premiers donnent quelques compléments d'analyse complexe nécessaires à nos études. Nous donnons dans l'Appendice A quelques éléments sur les courants pluripositifs nécessaires à notre construction de μ pour les produits croisés polynomiaux.

A l'Appendice B, nous donnons un contrôle des nombres de Lelong des pull-back de fonctions psh par un morphisme analytique. Ce résultat est utilisé à plusieurs reprises, d'une part comme ingrédient essentiel dans la preuve du Théorème A, d'autre part dans la preuve des estimations volumiques au Chapitre 4.

Enfin l'Appendice C contient la preuve de la classification énoncée au Chapitre 1.

Remarque: La classification des germes rigides a fait l'objet d'un article [F99-3] soumis pour publication.

Le Théorème A étend les résultats de l'article [F99-2] publié aux Math. Annalen et en simplifie la preuve.

Les Chapitres 3 , 4 et 5 proviennent essentiellement de l'article [FG99] rédigé en collaboration avec V. Guedj dont j'ai changé quelques peu la présentation et auxquels j'ai fait quelques ajouts.

L'exemple d'application birationnelle à la Section 3.5 provient de [F98]. Au Chapitre 4, nous avons modifié l'approche technique de [FG99] en travaillant systématiquement avec des objets globaux (fonctions quasi-psh) sans nous soucier de la géométrie particulière de la surface considérée. Les résultats présentés ici généralisent donc ceux de [FG99]. Nous avons de plus ajouté une discussion sur le cas des applications birationnelles de $\mathbf{P}^2$ (Section 4.5.2). Par ailleurs, la Section 5.1.2 du Chapitre 5 est aussi nouvelle.

Enfin l'Appendice B est le contenu de l'article [F99-1] publié aux Bull. de la SMF. ♦

Table des Matières.

Chapitre 1

Dynamique locale: germes superattractifs et surfaces de Kato.

Introduction

This chapter is devoted to the analytic (and formal) classification of very special types of contracting germs in $(\mathbf{C}^2, 0)$ and its application to the classification and the geometric study of some compact analytic surfaces (Kato surfaces).

Let f be an analytic germ of $(\mathbf{C}^2, 0)$. We denote by $\mathcal{C}(f)$ its critical set, and $\mathcal{C}(f^\infty) = \cup_{n\geq 0} f^{-n}(\mathcal{C}(f)) = \cup_{n\geq 0}\mathcal{C}(f^n)$ the union of the critical set of its iterates we will refer to as the generalized critical set.

Definition 1.0.1. *Rigid germ*
An analytic germ $f : (\mathbf{C}^2, 0) \to (\mathbf{C}^2, 0)$ is called rigid if and only if $\mathcal{C}(f^\infty)$ is a divisor with normal crossings at the origin. Equivalently $\mathcal{C}(f^\infty)$ is either empty or a smooth curve or two smooth transverse curves at 0.

Our goal is to classify completely (strictly) **contracting rigid germs** of $(\mathbf{C}^2, 0)$ up to analytic and formal conjugacy. It turns out that these germs can be split into seven different classes. They are equivalent to very simple normal forms which are polynomial, and their "moduli" spaces are finite dimensional.

Theorem 1.0.2.
One can classify contracting rigid germs in seven different classes according to three main invariants: the topology of $\mathcal{C}(f^\infty)$, the trace of Df_0, and the action of f on the fundamental group of the complement of $\mathcal{C}(f^\infty)$.

- *Any contracting rigid germ f can be analytically conjugated to a polynomial mapping F by a local biholomorphism ϕ tangent to the identity.*
- *Formal and analytic classification coincide except if the following four conditions are fulfilled: $\mathcal{C}(f^\infty) = \mathcal{C}(f)$ is irreducible, $\det D_0 f = 0$, $\mathrm{tr} Df_0 \neq 0$ and $f(\mathcal{C}(f)) = (0, 0)$.*

Particular cases of this classification were considered by Lattes [L11] (contracting biholomorphisms), by Dloussky-Kohler in [DK96] (Class 2), by Dloussky in [D84] (strict germs of Class 5) and in [DO98]. The notion of rigid germ which covers and extend all these previous results is new and allows us to classify a large class of interesting contracting germs.

The reasons which make it possible to exhibit such a classification may be unclear, but the only reasonable possibility to give an explicit simple normal forms for a superattractive germ is to impose that its generalized critical set is not too big. In our case, we have the very strong hypothesis that it defines an analytic set of a very special form.

Let us emphasize that one can naturally obtain rigid germs by looking at the germ induced by a global birational mapping of a compact complex surface at a fixed point. We shall prove (see Proposition 4.1.4 of Chapter 4) that:

Proposition 1.0.3.

Let X be a compact complex surface and $f : X \dashrightarrow X$ a birational map. If $p \in X$ is a fixed point for f, then the germ (f, p) of f at p is rigid.

As an example let us mention the following fact. Let us consider a Hénon mapping $H : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ defined by $H(x, y) := (y, ax - P(y))$ with $a \in \mathbf{C}^*$ and $P \in \mathbf{C}[y]$ of degree $d \geq 2$. We can apply our classification to the germ induced by H at the superattracting point p lying on the line at infinity in $\mathbf{P}^2$. We get a local conjugacy to a normal form $(z, w) \to (z^d, ad^{-1}wz^{2d-2} + z^{d-1} + \cdots)$. By extending the conjugacy to Ω the basin of attraction of p in $\mathbf{C}^2$, it is then possible to describe completely the topology of Ω (see Section 1.2.3). In that way, we recover easily previous results from [HO94].

Definition 1.0.4. *Strict germ*

A germ $f : (\mathbf{C}^2, 0) \to (\mathbf{C}^2, 0)$ of holomorphic mapping is called **strict** *if and only if there exists an analytic curve $V \subset (\mathbf{C}^2, 0)$ such that the mapping $f : (\mathbf{C}^2, 0) \setminus V \to (\mathbf{C}^2, 0)$ defines a biholomorphism onto its range.*

Strict contracting rigid germs are of particular interest because they allow us to link germs and geometry. Recall the following construction. Take an injective contracting mapping f from $(\Delta^2, 0)$ into itself. As the action of f on $\Delta^2 \setminus \{0\}$ is properly discontinuous without fixed point, we can define the quotient $\left(\Delta^2 \setminus \{0\}\right) / \sim$ where $x \sim y$ if and only if $x = f^n(y)$ for some $n \in \mathbf{Z}$. This defines a compact complex surface known as a Hopf surface, and is a simple example of a non-Kähler compact complex surface.

It turns out that one can generalize the Hopf construction. Take $f : (\Delta^2, 0) \circlearrowleft$ any strict contracting rigid germ. Construct $\check{S}$ the quotient of $\Delta^2 \setminus \mathcal{C}(f^\infty)$ by the action of f. It is an open complex surface and one can show that it can be compactified into a unique minimal compact complex surface $S(f)$ by adding a finite number of rational curves.

Definition 1.0.5. *A Kato surface is a minimal compact complex surface of the form $S(f)$ for some contracting rigid germ $f : (\mathbf{C}^2, 0) \circlearrowleft$ which is not a local biholomorphism.*

These surfaces were introduced by M. Kato ([K77]) and satisfy $b_1(S) = 1$ and $b_2(S) > 0$. In particular, they belong to the VII_0 class (see [BPV84] p.188). They are the only known example of surfaces of the VII_0 class with $b_2 > 0$. It is conjectured that they are in fact the only examples of such surfaces.

Kato surfaces were studied by I. Enoki ([E80], [E81], [E82]) and N. Nakamura (see [N84], [N90]). The study of these surfaces is very closely related to their associated germs. They are natural compactification of the space of non-critical orbits of the germ. It is this idea developed by G. Dloussky in a series of papers ([D84], [D88-1], [D88-2], [DK96], [DO98]) that we will deal with. Our classification and the existence of explicit simple normal forms helps to understand the geometry of Kato surfaces in an elementary way. The main principle is that to any geometric object in the surface corresponds a unique local object invariant by its associated germ.

Dloussky divided Kato surface into three distinct categories, he called non-zero-trace Kato surfaces, Inoue-Hirzebruch surfaces and intermediate Kato surfaces. The first class of surfaces is defined by rigid maps of our Class 2, the second by rigid maps of Class 6, and the last one by rigid maps of Class 4 or 7. Intermediate Kato surfaces are the only remaining surfaces whose topology is not completely understood.

The plan of this chapter is as follows. In Section 1 we present the classification of rigid contracting germs without proof. We include it in an appendix at the end of this memoir for sake of convenience (see Appendix A). Section 2 is devoted to the study of Kato surfaces S. We first recall some basic constructions and elementary facts in 1.2.1 and details the connection between Kato surfaces and strict contracting germs in 1.2.2. In the remaining parts of this chapter, we only deal with an intermediate Kato surface S. In 1.2.3 we describe the complement of the rational curves $S \setminus \Gamma$ as a quotient of its universal cover $\Delta \times \mathbf{C}$ by an explicit discrete group of automorphisms. In 1.2.4 we describe completely the structure of the Picard group of S and of the sublattice $\Lambda \subset \mathrm{Pic}(S)$ generated by the curves of S. In 1.2.5 we focus on the anti-canonical line bundle. The results of 1.2.3, 1.2.4 and 1.2.5 allow to understand invariants of conjugacy of rigid germs in an intrinsic way as geometric invariant of their associated Kato surface. In 1.2.6 we prove that S admits a unique holomorphic foliation and show that it is induced by a holomorphic vector field if and only if S is "special" in a precise sense. We conclude this chapter by showing that S admits no non-constant holomorphic self-maps except automorphisms and describe $\mathrm{Aut}(S)$.

Our main contribution can be described as follows. Our classification of rigid germs enables us to complete the classification of all Kato surfaces. We follow here an approach "à la Kodaira" using the normal form for the germ to describe the geometry of the surface. This helps to clarify and complete previous results due to [DO98]. In particular, we give conditions for the existence of a holomorphic vector fields on the germ (Theorem 1.2.31) and relate it with the quotient $\mathrm{Pic}(S)/\Lambda$ (Theorem 1.2.24). In [DO98] only sufficient conditions are given in terms of the matrix of intersection of the rational curves.

1.1 Classification of two dimensional contracting rigid germs

If f, $g : (\mathbf{C}^2, 0) \circlearrowleft$ are two holomorphic germs, we write $f \cong g$ if there exists a local biholomorphism ϕ such that $\phi \circ f = g \circ \phi$, and $f \sim g$ if ϕ is only a formal power series. We denote by $\mathcal{C}(f)$ the critical set of f. We first recall the definition we gave in the introduction.

Definition 1.1.1. *Rigid germ*

An analytic germ $f : (\mathbf{C}^2, 0) \to (\mathbf{C}^2, 0)$ is called rigid if and only if $\mathcal{C}(f^\infty) := \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{C}(f^n)$ is a curve with normal crossings at the origin, or equivalently is either empty, or a smooth curve, or two smooth transverse curves at 0.

The condition for a germ to be rigid is extremely strong. Generically, $\mathcal{C}(f^\infty)$ is a countable union of distinct curves. We mention the following example of a non rigid germ such that $\mathcal{C}(f)$ is totally invariant.

Example 1.1.2.

Let $P(z, w)$ be a quasihomogeneous polynomial of weight (α, β) and degree d, i.e. for any $Z \in \mathbf{C}^2$ and $t \in \mathbf{C}$, one has $P(t^\alpha z, t^\beta w) = t^d P(z, w)$. Define $f(z, w) = (zP^\alpha(z, w), wP^\beta(z, w))$. Then $\mathcal{C}(f^\infty) = \mathcal{C}(f) = \{P = 0\}$.

Let us now discuss the three main invariants we use to divide contracting rigid germs into seven different classes. Fix $f : (\mathbf{C}^2, 0) \circlearrowleft$ a contracting rigid germ, and assume it is defined on the polydisk Δ^2.

1. Its critical set: as f is rigid, its generalized critical set $\mathcal{C}(f^\infty)$ has one of the three following form. It can be either empty, in which case f is said to be *regular*; or $\mathcal{C}(f^\infty)$ is an irreducible smooth curve, we can assume to be $\{z = 0\}$, and f is called *irreducible*; or $\mathcal{C}(f^\infty)$ is a union of two transverse smooth curves, $\mathcal{C}(f^\infty) = \{zw = 0\}$ and f is *reducible*.

2. Its trace: if f is not regular, we have two distinct cases. Either $\mathrm{tr} Df_0 \neq 0$ and Df_0 has one non-zero eigenvalue, or $\mathrm{tr} Df_0 = 0$ and f is super-attractive i.e. both eigenvalues of Df_0 vanish.

3. Its action on $\pi_1(\Delta^2 - \mathcal{C}(f^\infty))$: as $\mathcal{C}(f^\infty)$ is backward invariant, f induces a map from $U = \Delta^2 - \mathcal{C}(f^\infty)$ into itself. We can thus look at its induced action f_* on the fundamental group of U. When f is irreducible, $\pi_1(U) \cong \mathbf{Z}$, and the action of f is given by a (positive) integer. When f is reducible, $\pi_1(U) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, and the action of f is given by a 2×2 matrix with integer coefficients. We split singular contracting rigid germs into different groups, irreducible ones whether f_* is invertible or not, and reducible ones whether the rank of f_* is 1 or 2.

Table 1. gives the definition of the seven different classes of contracting rigid germs. For a compact statement of all normal forms see also Table 2. below.

$\mathcal{C}(f^\infty)$	$\mathrm{tr} Df_0$	Action of f_* on $\pi_1(\Delta^2 - \mathcal{C}(f^\infty))$	
Empty (regular germs)			Class 1
Irreducible	$\mathrm{tr} Df_0 \neq 0$	$f_* = 1$	Class 2
		$f_* \geq 2$	Class 3
	$\mathrm{tr} Df_0 = 0$	$(f_* \geq 2)$	Class 4
Reducible	$\mathrm{tr} Df_0 \neq 0$	(f_* invertible)	Class 5
	$\mathrm{tr} Df_0 = 0$	f_* invertible	Class 6
		f_* singular	Class 7

Table 1.1: Classes of contracting rigid germs

Before stating the classification in all its details, let us give some vague statements as a guide for the reader in his reading.

(A) Any rigid contracting germ f can be analytically conjugated to a polynomial mapping F by a local biholomorphism ϕ tangent to the identity.

(B) Any normal form F preserves a foliation $\mathcal{F}$ defined by $z^\alpha w^\beta = \mathrm{Cst}$ for some non negative reals α, $\beta \geq 0$.

(C) The conjugacy ϕ is essentially unique except in the fourth and seventh case when f is special.

(D) Formal and analytic classification coincide expect if f belongs to the second class.

We state the classification as follows. We study each class separately.

(1) We first give analytic (and if necessary formal) normal forms, and discuss their uniqueness.

(2) We compute their respective automorphism group, that is given a germ f, the group $\mathrm{Aut}(f) := \{\phi \circ f = f \circ \phi, \text{ with } D\phi_0 \text{ is invertible}\}$.

When f is rigid, it induces a finite holomorphic covering of $\Delta_r^2 \setminus \mathcal{C}(f^\infty)$ onto the open subset $f(\Delta_r^2 \setminus \mathcal{C}(f^\infty))$ for $r > 0$ small. The integer $\deg(f)$, we will refer as the degree of f, will be by definition the degree of this covering. We are especially interested in strict germs i.e. $\deg(f) = 1$.

(3) We compute all degree of the normal forms.

For sake of convenience, we include the proof of the classification in the Appendix C.
Remark : A short historical note on this classification. The classification of contracting biholomorphisms (class 1) is well-known since the work of Lattes [L11] (see also Sternberg [S57] and Rosay-Rudin [RR88] for higher dimensional classification and [CC97], [C93] for generalized results in the smooth case). The second class was classified by Dloussky-Kohler in [DK96]. The fifth class in the strict case was also done by Dloussky in [D84]. Finally the fourth class was partially studied in [DO98]. ♦

1.1.1 Regular germs

$\boxed{\text{CLASS 1: } \mathcal{C}(f^\infty) = \emptyset}$

We assume that f is a local automorphism. We denote by $|\alpha| \geq |\beta| > 0$ the two eigenvalues of Df_0. These are invariant of conjugacy.

Analytic classification 1. *[L11]*
Formal and analytic classifications coincide.

1. *If for any $k \geq 0$, $\alpha^k \neq \beta$ (no resonance),*

$$f \cong (\alpha z, \beta w) \ . \tag{1.1}$$

2. *If $\alpha^k = \beta$ for some $k \in \mathbf{N}$ (resonance),*

$$f \cong (\alpha z, \alpha^k w + \varepsilon z^k) \ , \tag{1.1'}$$

with $\varepsilon \in \{0, 1\}$.

Two normal forms are conjugated if and only if they are equal. As f is an automorphism, $\deg(f) = 1$.

Automorphism group 1. *[NA74]*

- *If there is no resonance:* $\mathrm{Aut}(f) = \{(\lambda z, \mu w), \lambda\mu \neq 0\} \cong \mathbf{C}^{*2}$.

ANALYTIC NORMAL FORMS	
Class 1	No resonance: $(\alpha z, \beta w)$, $\alpha, \beta \in \Delta^*$. Resonance: $(\alpha z, \alpha^k w + \varepsilon z^k)$, $\alpha \in \Delta^*$, $\varepsilon = 0, 1$, $k \in \mathbf{N}^*$.
Class 2	$(\alpha z, wz^q + P(z))$, $\alpha \in \Delta^*$, $q \geq 1$, $P \in \mathfrak{M}_q[z]$. Formal normal form: $(\alpha z, wz^q)$, $\alpha \in \Delta^*$, $q \geq 1$.
Class 3	$(\alpha z, w^p)$, $\alpha \in \Delta^*$, $p \geq 2$.
Class 4	Non-special case: $(z^p, \lambda wz^q + P(z))$, $p \geq 2$, $q \geq 1$, $\lambda \neq 0$, $P \in \mathfrak{M}_q[z]$. Special case: $(z^p, wz^q + P(z) + az^{pq/p-1})$, $a \in \mathbf{C}$, $p \geq 2$, $q \geq 1$, $(p-1)\|q$, $P \in \mathfrak{M}_q[z]$.
Class 5	$(\alpha z, z^c w^d)$, $\alpha \in \Delta^*$, $c \geq 1$, $d \geq 2$.
Class 6	$(\lambda_1 z^a w^b, \lambda_2 z^c w^d)$, $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$, $ad - bc \neq 0$, $a_2 + c_2, b_2 + d_2 \geq 2$. $\min(a+b, c+d) \geq 2$.
Class 7	$(z^a w^b (1+\Phi)^{-\beta/\delta}, z^c w^d (1+\Phi)^{\alpha/\delta})$ with $\Phi(z,w) = \lambda z^\mu w^\nu + P(z^\alpha w^\beta)$, $ad = bc$, $(a+b)(c+d) \neq 0$, $\alpha\nu - \beta\mu = \delta \neq 0$, $\lambda \neq 0$, $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, $\mu + a + c, \nu + b + d \geq 2$, $r = \min\{k \in \mathbf{N},\ k\alpha \geq \mu,\ k\beta \geq \nu\}$. Non-special case: $P \in \mathfrak{M}_r[z]$. Special case: when $(p-1)\|q$, $\lambda = 1$, and $r < q/(p-1)$; $P = Q + az^{q/p-1}$, with $Q \in \mathfrak{M}_r[z]$, $a \in \mathbf{C}$.

Table 1.2: Normal forms for contracting rigid germs

- *If there is a resonance:*
  - $f = (\alpha z, \alpha w)$*:* $\mathrm{Aut}(f) = \mathrm{GL}(2, \mathbf{C})$*.*
  - $f = (\alpha z, \alpha^k w)$*,* $k \geq 2$*:* $\mathrm{Aut}(f) = \{(\lambda_1 z, \lambda_2(w + \mu z^k))\} \cong \mathbf{C} \rtimes \mathbf{C}^{*2}$*, with the action* $(\lambda_1, \lambda_2).\mu = \lambda_1^k \mu / \lambda_2$*.*
  - $f = (\alpha z, \alpha^k w + z^k)$*:* $\mathrm{Aut}(f) = \{(\lambda z, \lambda^k(w + \mu z^k)),\ \lambda \in \mathbf{C}^*, \mu \in \mathbf{C}\} \cong \mathbf{C} \times \mathbf{C}^*$*.*

1.1.2 Irreducible germs

We assume now that $\mathcal{C}(f^\infty)$ is irreducible. It is given by a smooth curve passing through the origin. By making a change of coordinates, we can always suppose that $\mathcal{C}(f^\infty) = \{z = 0\}$.

$\boxed{\text{CLASS 2: } \mathcal{C}(f^\infty) \text{ IS IRREDUCIBLE, } \mathrm{tr}(Df_0) \neq 0, \text{ AND } \deg(f) = 1.}$

Define $\alpha := \mathrm{tr}(Df_0) \in \mathbf{C}^*$, and $q \in \mathbf{N}^*$ the multiplicity of the holomorphic germ $\det Df_z$ at the origin. These are invariant of conjugacy both formal and analytic.

Formal classification 2. *[D84]*

We have

$$f \sim (\alpha z, w z^q) \ .$$

Analytic classification 2. *[DK96]*

We have

$$f \cong (\alpha z, w z^q + P(z)) \ , \tag{1.2}$$

with $P(z) \in \mathfrak{M}_q[z]$*.*

Two normal forms are conjugate if and only if $P_1(z) = bP_2(\zeta z)$ *for some* $\zeta \in \mathbf{U}_q$ *and* $b \in \mathbf{C}^*$*.*

Proposition 1.1.3. *[D84]*
The two following assertions are equivalent:

- *A rigid map of class 2 is analytically conjugated to its formal normal form* $f \cong (\alpha z, w z^q)$*;*
- *there exists a germ of* f*-invariant curve not contained in* $\mathcal{C}(f)$*.*

When either condition is satisfied, the invariant curve is unique, and f *is called an* Inoue germ*.*

Proof. If f is an Inoue germ, the line $\{w = 0\}$ is invariant and not contained in $\mathcal{C}(f) = \{z = 0\}$.

Conversely, we look first for formal curves $\gamma \not\subset \{z = 0\}$ invariant under an Inoue germ $f(z, w) = (\lambda z, w z^q)$. We can assume that γ is given by a

Weierstrass polynomial $w^k = \sum_{i=0}^{k-1} w^i h_i(z)$. The f-invariance is equivalent to the implication

$$w^k = \sum_{i=0}^{k-1} w^i h_i(z) \Rightarrow w^k z^{qk} = \sum_{i=0}^{k-1} w^i z^{qi} h_i(\lambda z).$$

We then eliminate the variable w. By looking at the resultant of these two polynomials, we get z^q divides $h_0^k(\lambda z)$. If $\mu(0,.)$ is the multiplicity at 0 of a formal power series, and if $h_0 \not\equiv 0$, we have

$$\mu(0, h_0) = k^{-1}\mu(0, h_0^k(\lambda z)) \geq k^{-1}\mu(0, z^q)\ .$$

We apply this inequality to f^n for $n \in \mathbf{N}$. This replaces z^q by $C(\lambda)z^{qn}$ and $h_0^k(\lambda z)$ by $h_0^k(\lambda^n z)$. Hence

$$\mu(0, h_0) \geq nk^{-1}\mu(0, z^q)\ .$$

Hence $h_0 \equiv 0$ and $\{w = 0\} \subset \gamma$. We deduce from these considerations that each irreducible component of γ is mapped into $\{w = 0\}$ by some iterate of f. Therefore $\gamma = \{w = 0\}$.

Let now $f(z, w) = (\lambda z, wz^q + P(z))$ be an arbitrary normal form, and γ a f-invariant curve not contained in $\mathcal{C}(f) = \{z = 0\}$. As f is formally equivalent to an Inoue germ, we can find a formal change of coordinates such that γ is mapped into $\{w = 0\}$ which is non singular. So γ is also smooth, given by some graph $w = \psi(z)$. We set $\phi(z, w) = (z, w + \psi(z))$. The map $\phi^{-1} \circ f \circ \phi$ is of the form $(\lambda z, wz^q + \widetilde{P}(z))$ and preserves $\{w = 0\}$. So $\widetilde{P} \equiv 0$, and f is conjugated to an Inoue germ. □

Automorphism group 2. *[DK96]*
For a normal form $f(z, w) = (\alpha z, wz^q + P(z))$, we have:

- *if f is an Inoue germ:*

$$\mathrm{Aut}(f) = \{(\zeta z, \lambda w),\ \zeta^q = 1,\ \lambda \neq 0\} \cong \mathbf{U}_q \times \mathbf{C}^*;$$

- *if f is not an Inoue germ:*

$$\mathrm{Aut}(f) = \{(\zeta z, \xi w),\ \zeta^q = 1,\ a_j \neq 0 \Rightarrow \xi = \zeta^j\} \cong \mathbf{U}_l,$$

with $l := \gcd\{q, j_1 - j_2$ s.t. $a_{j_1} a_{j_2} \neq 0\}$ and $P(z) = \sum_{1\leq k\leq q} a_k z^k$.

$\boxed{\text{CLASS 3: } \mathcal{C}(f^\infty) \text{ IS IRREDUCIBLE, } \mathrm{tr}(Df_0) \neq 0, \text{ AND } \deg(f) \geq 2.}$

We put $\alpha := \mathrm{tr}(Df_0)$ and $p := \deg(f) \geq 2$. These are invariant of conjugacy.

Analytic classification 3.
Formal and analytic classification coincide. We have

$$f \cong (\alpha z, w^p) \ . \tag{1.3}$$

A normal form is uniquely determined by its conjugacy class.

Automorphism group 3.
$\mathrm{Aut}(f) = \{(\lambda z, \zeta w),\ \zeta^{p-1} = 1\ , \lambda \neq 0\} \cong \mathbf{C}^* \times \mathbf{U}_{p-1}$.

$\boxed{\text{CLASS 4: } \mathcal{C}(f^\infty) \text{ IS IRREDUCIBLE, } \mathrm{tr}(Df_0) = 0.}$

We denote by $2 \leq p \in \mathbf{N}$ the degree of the action of f on $\pi_1(\Delta^2 - \{z = 0\}) \cong \mathbf{Z}$. We also define the integer $q \in \mathbf{N}^*$ such that $p + q - 1$ is the multiplicity of $\det Df_z$ at 0 and $\kappa := q/(p-1)$. These are invariant of conjugacy.

Analytic classification 4.
Formal and analytic classifications coincide. We have

$$f \cong (z^p, \lambda w z^q + g(z)) \ \ , \tag{1.4}$$

with $\lambda \neq 0$, and $g \in \mathfrak{M}$. More precisely,

1. *if $\kappa \notin \mathbf{N}$ or $\lambda \neq 1$ (f is non-special):*
   $g(z) = P(z)$ *with* $P \in \mathfrak{M}_q[z]$*;*
2. *if $\kappa \in \mathbf{N}$ and $\lambda = 1$ (f is special):*
   $g(z) = P(z) + a_{\kappa+q} z^{\kappa+q}$ *with* $P \in \mathfrak{M}_q[z]$ *and* $a_{\kappa+q} \in \mathbf{C}$.

Two normal forms are conjugated if and only if $\lambda_1 = \zeta^q \lambda_2$, and $g_1(z) = b g_2(\zeta z)$, with $\zeta \in \mathbf{U}_{p-1}$ and $b \neq 0$.
If $P(z) = \sum_{1 \leq k \leq q} a_k z^k$, the topological degree of f is given by

$$\deg(f) = \gcd\{p, k \leq q,\ \textit{such that } a_k \neq 0\} \ .$$

For a normal form of the previous type, if we let $\tau(f) := (p-1)/\gcd\{p-1, q\}$, the condition $\kappa \in \mathbf{N}$ is equivalent to $\tau(f) = 1$. The germ f is special if and only if $\tau(f) = 1$ and $\lambda = 1$. Note also that $\lambda^{\tau(f)}$ is always an invariant of conjugacy.

We can also give an analogous statement of Proposition 1.1.3. Compare with [D84] Proposition 1.10.

Proposition 1.1.4.
Assume $f(z,w) = (z^p, \lambda w z^q + P(z))$ is a rigid germ of the fourth class . Then the following assertions are equivalent:

- *The map f is conjugate to $(z,w) \to (z^p, \lambda w z^q)$.*

- *there exists a germ of f-invariant curve not contained in $\mathcal{C}(f)$.*

In particular when f is strict, the only f-invariant curve is $\{z = 0\}$.

Proof. Let $\gamma \not\subset \{z = 0\}$ be a f-invariant curve. We can assume that γ is given by a Weierstrass polynomial $\gamma = \{h = 0\}$ with $h(z, w) = w^k + \sum_{i=0}^{k-1} w^i h_{k-i}(z)$. As f is linear in the w-variable, the germ $h \circ f \in \mathbf{C}\{z\}[w]$ is a polynomial in w of the same degree as h. The curve γ is invariant, hence we have $h|h \circ f$. We can hence find $\psi \in \mathcal{O}(z)$ s.t. $h \circ f(z, w) = h(z, w) \cdot \psi(z)$. We infer

$$\begin{aligned} \psi(z) \cdot w^k &= \lambda^k z^{qk} \cdot w^k \\ \psi(z) h_1(z) \cdot w^{k-1} &= \lambda^{k-1} z^{q(k-1)} (kP(z) + h_1(z^p)) \cdot w^{k-1}. \end{aligned}$$

Whence $\psi(z) = \lambda^k z^{qk}$ and we get

$$\lambda z^q h_1(z) - h_1(z^p) = kP(z).$$

Define the biholomorphism $\phi(z, w) := (z, w - k^{-1} h_1(z))$. We immediately check that $\phi^{-1} \circ f \circ \phi(z, w) = (z^p, \lambda w z^q)$. This concludes the proof. $\square$

Automorphism group 4.
Let $l := \gcd\{p - 1,\ q,\ j_1 - j_2$ such that $a_{j_1} a_{j_2} \neq 0\}$.

- *If f is not special:*

$$\begin{aligned} \mathrm{Aut}(f) &= \{(\zeta z, \xi w),\ \zeta^{p-1} = \zeta^q = 1,\ a_k(\zeta^k - \xi) = 0\} \\ &\cong \begin{cases} \mathbf{U}_l & \text{if } P \not\equiv 0; \\ \mathbf{U}_l \times \mathbf{C} & \text{if } P \equiv 0. \end{cases} \end{aligned}$$

- *If f is special:*

$$\begin{aligned} \mathrm{Aut}(f) &= \{(\zeta z, \xi w + c z^\kappa)\ , \zeta \in \mathbf{U}_{p-1} \cap \mathbf{U}_q,\ a_k(\zeta^k - \xi) = 0,\ c \in \mathbf{C}\} \\ &\cong \begin{cases} \mathbf{C} \rtimes \mathbf{U}_l & \text{if } P \not\equiv 0; \\ (\mathbf{C} \rtimes \mathbf{U}_l) \times \mathbf{C} & \text{if } P \equiv 0. \end{cases} \end{aligned}$$

In the last two cases, the action of $\mathbf{U}_l$ on $\mathbf{C}$ is given by $\zeta.z := \zeta^\kappa \times z$.

1.1.3 Reducible germs

Let us begin with some general remarks on the reducible case. If f is reducible, we can assume that $\mathcal{C}(f^\infty) = \{zw = 0\}$. As $\mathcal{C}(f^\infty)$ is totally invariant, f has the following form

$$f(z, w) = (z^a w^b \psi_1(Z), z^c w^d \psi_2(Z))$$

with $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{O}^*$ and $a, b, c, d \in \mathbf{N}$. The map f acts naturally on $\pi_1(\Delta^{*2}) \cong \mathbf{Z}^2$. In the natural basis $\gamma_1(t) = (\exp(2i\pi t), 1)$, $\gamma_2(t) = (1, \exp(2i\pi t))$, it is given by a 2×2 matrix with non-negative integer coefficients whose transpose is given by

$$M(f) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}.$$

We define the involution $\Sigma(z, w) = (w, z)$. The class of $M(f)$ in the set $M(2, \mathbf{N})/\{\mathrm{Id}, \Sigma\}$ is an invariant of conjugacy.

We use the following notations. If $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{C}^2$, $Z = (z, w) \in (\mathbf{C}^*)^2$ we define $\lambda.Z := (\lambda_1 z, \lambda_2 w)$, and $\log Z := (\log z, \log w)$. Given $M \in M(2, \mathbf{Z})$, we define the meromorphic mapping $Z^M := \exp(\log ZM) = (z^a w^b, z^c w^d)$. We can also extend the definition to the case where $M \in M(2, \mathbf{R}^+)$ as soon as $|z - 1| < 1$ and $|w - 1| < 1$.

$\boxed{\text{CLASS 5: } \mathcal{C}(f^\infty) \text{ IS REDUCIBLE, } \mathrm{tr}(Df_0) \neq 0.}$

We set $\alpha := \mathrm{tr}(Df_0)$, $2 \leq d := \deg(f)$, and define the integer $c \geq 1$ such that $c + d - 1$ is the multiplicity of $\det Df_z$ at 0.

Analytic classification 5.
Formal and analytic classification coincide. We have

$$f \cong (\alpha z, z^c w^d) \; . \tag{1.5}$$

Normal forms are uniquely determined by their conjugacy class.

Automorphism group 5.

$$\mathrm{Aut}(f) = \{(\lambda z, \mu w),\ \lambda^c \mu^{d-1} = 1\} \cong \mathbf{C}^*.$$

$\boxed{\text{CLASS 6: } \mathcal{C}(f^\infty) \text{ IS REDUCIBLE, } \mathrm{tr}(Df_0) = 0, \text{ AND } \det M(f) \neq 0.}$

Define $\Sigma(z, w) = (w, z)$.

Analytic classification 6.
Formal and analytic classification coincide. There exists $\lambda \in (\mathbf{C}^*)^2$ such that

$$f \cong \lambda Z^{M(f)} \; . \tag{1.6}$$

Conversely a map of the form $Z \to \lambda Z^M$ belongs to the sixth class if and only if $ad \neq bc$, and $\begin{cases} \textit{either } b + d \geq 2 \textit{ and } a + c \geq 2, \\ \textit{or } ad = 0 \textit{ and } \min(a + c, b + d) \geq 2. \end{cases}$

- *If $1 \notin \mathrm{Spec}(M(f))$, we can choose $\lambda = 1$. Two normal forms are conjugated if and only if $M(f_1) = M(f_2)$ or $M(f_1) = \Sigma \circ M(f_2) \circ \Sigma$.*

- *If $1 \in \mathrm{Spec}(M(f))$, choose $\kappa \in \mathbf{Z}^2$ a vector spanning $\ker(M(f) - \mathrm{Id})$. Two normal forms are conjugated if and only if $M(f_1) = M(f_2)$ and $\lambda_1^\kappa = \lambda_2^\kappa$, or $M(f_1) = \Sigma \circ M(f_2) \circ \Sigma$ and $\lambda_1^{\kappa_1} = \lambda_2^{\Sigma\kappa_1}$.*

The degree of f is given by

$$\deg(f) = |\det(M)|\ .$$

In [D88-1] G. Dloussky gives normal forms for germs of the sixth class with $|\det M| = 1$.

Automorphism group 6.

If $f(Z) = \lambda Z^M$, then for any $\phi \in \mathrm{Aut}(f)$, there exists $\mu_1, \mu_2 \in \mathbf{C}^*$ and $\varepsilon \in \{0,1\}$ such that $\phi(z,w) = \Sigma^\varepsilon(\mu_1 z, \mu_2 w)$.

- *Assume $\Sigma M \Sigma \neq M$.*
  - *If $1 \notin \mathrm{Spec}(M)$: $\mathrm{Aut}(f) \cong \mathbf{U}_p \times \mathbf{U}_q$ for some $p, q \in \mathbf{N}^*$ such that $pq = \det(M - \mathrm{Id})$.*
  - *If $1 \in \mathrm{Spec}(M)$: $\mathrm{Aut}(f) \cong \mathbf{U}_l \times \mathbf{C}^*$ with $l = \mathrm{tr}(M - \mathrm{Id})$.*
- *Assume $\Sigma M \Sigma = M$.*
  - *If $1 \notin \mathrm{Spec}(M)$: $\mathrm{Aut}(f) \cong \mathbf{U}_l \rtimes \{-1,+1\}$ with $-1.(z,w) = (w,z)$, with $l = \det(M - \mathrm{Id})$.*
  - *If $1 \in \mathrm{Spec}(M)$ (define $l := \mathrm{tr}(M - \mathrm{Id})$),*
    - *$\lambda_1 = \lambda_2$:*
      $\mathrm{Aut}(f) \cong \mathbf{U}_l \times (\mathbf{C}^* \rtimes \{-1,+1\})$ *with the action $-1.z = z^{-1}$.*
    - *$\lambda_1 = -\lambda_2$:*
      $\mathrm{Aut}(f) \cong \mathbf{C}^* \rtimes \mathbf{U}_{2l}$ *with the action $\zeta.z = z^{\zeta^l}$.*
    - *$\lambda_1^2 \neq \lambda_2^2$:*
      $\mathrm{Aut}(f) \cong \mathbf{U}_l \times \mathbf{C}^*$.

$\boxed{\text{CLASS 7: } \mathcal{C}(f^\infty) \text{ IS REDUCIBLE, } \mathrm{tr}(Df_0) = 0, \text{ AND } \det M(f) = 0.}$

We first make some remarks on maps of this class and characterize some integer invariants associated to it. All assertions will be proved later. Recall f is given in coordinates by

$$f(z,w) = (z^a w^b \psi_1(Z), z^c w^d \psi_2(Z)),$$

with $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{O}^*$, and $a, b, c, d \in \mathbf{N}$.

The matrix $M := M(f)$ has rank 1, and its four coefficients satisfy $a + b > 0$, $c + d > 0$. Let $v = (\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^2$ be the only vector with mutually prime non-negative integer coefficients such that v generates the image of M. One sees that v is also an eigenvector whose eigenvalue is $p := \mathrm{tr} M(f)$.

By hypothesis, the Jacobian determinant of f vanishes exactly on $\{zw = 0\}$. Hence $\det Df(z,w) \in z^{k_0} w^{l_0} \mathcal{O}^*$ for some integers $k_0, l_0 \geq 1$. We define the two integers $\mu := k_0 + 1 - (a + c)$, and $\nu := l_0 + 1 - (b + d)$. We shall prove that they are both non-negative, and that (μ, ν) and (α, β) are linearly independent. We define $\delta := \alpha\nu - \beta\mu \in \mathbf{Z}^*$, and $q \in \mathbf{N}^*$ such that $M^t(\mu,\nu) = q^t(\alpha,\beta)$. We also define $\kappa = q/(p-1)$ and $r := \min\{k \in \mathbf{N}^*,$ such that $k\alpha \geq \mu, k\beta \geq \nu\}$. We finally define $t_1, t_2 \in \mathbf{N}$ by $t_1 := a/\alpha = b/\beta$, and $t_2 := c/\alpha = d/\beta$.

Analytic classification 7.

Formal and analytic classification are equivalent. We have

$$f \cong (z^a w^b(1 + \lambda z^\mu w^\nu + g(z^\alpha w^\beta))^{-\beta/\delta}, z^c w^d(1 + \lambda z^\mu w^\nu + g(z^\alpha w^\beta))^{\alpha/\delta}) ,$$

with $\lambda \neq 0$ *and* $g \in \mathfrak{M}$. *More precisely,*

1. *If* $r \leq \kappa$,
   - *and* $\kappa \notin \mathbf{N}$, *or* $\kappa \in \mathbf{N}$ *and* $\lambda \neq 1$ *(non-special maps):* $g = P$ *for some* $P \in \mathfrak{M}_{r-1}[z]$.
   - *and* $\kappa \in \mathbf{N}$ *and* $\lambda = 1$ *(special maps):* $g = P + a_\kappa z^\kappa$ *for some* $P \in \mathfrak{M}_{r-1}[z]$, *and* $a_\kappa \in \mathbf{C}$.
2. *If* $r > \kappa$ *(non-special maps):* $g = P$ *for some* $P \in \mathfrak{M}_{r-1}[z]$.

Conversely, a normal form as above belongs to the class 7 if and only if $a + b \geq 1$, $c + d \geq 1$, $\mu + a + c \geq 2$, *and* $\nu + b + d \geq 2$.

Two normal forms are conjugate if and only if

- $M(f_1) = M(f_2)$ *(this determines* α, β, μ, ν*), and there exists* $\zeta \in \mathbf{U}_{p-1}$ *such that* $\lambda_1 = \zeta^q\lambda_2$, *and* $P_1(x) = P_2(\zeta x)$;
- *or* $M(f_1) = \Sigma M(f_2)\Sigma$, *and* $(\alpha_1, \beta_1) = (\beta_2, \alpha_2)$, $(\mu_1, \nu_1) = (\mu_2, \nu_2)$, *and* $P_1(x) = P_2(\zeta x)$, $\lambda_1 = \zeta\lambda_2$ *for some* $\zeta \in \mathbf{U}_{p-1}$.

We give only partial results for the computation of the degree of these maps. Define $\Pi(z,w) := (z^\alpha w^\beta, z^\mu w^\nu)$. *We always have*

$$\deg(f) \geq \deg(\Pi) = |\delta| \ .$$

Assume now that $\deg(\Pi) = 1$. *If* $P(x) = \sum_{1 \leq k < r} a_k x^k$, *then*

$$\deg(f) = \gcd\{p, q, k \text{ such that } a_k \neq 0\} \ .$$

We also have $r = [q/p] + 1$, *and when* $\kappa \in \mathbf{N}$, *we have* $r \leq \kappa$.

The link between germs of the fourth and the seventh class is explained by the following fact:

Proposition 1.1.5.

Any germ f of the seventh class is semiconjugated to a germ of the fourth class. In fact, with the notations above, we have the commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{C}^2,0) \ni (z,w) \arrow[r, "f(z,w)"] \arrow[d, "\Pi=(z^\alpha w^\beta, z^\mu w^\nu)"'] & (\mathbf{C}^2,0) \arrow[d, "\Pi=(z^\alpha w^\beta, z^\mu w^\nu)"] \\
(\mathbf{C}^2,0) \ni (x,y) \arrow[r, "\overline{f}(x,y)"] & (\mathbf{C}^2,0)
\end{tikzcd} \tag{1.7}$$

with $\overline{f}(x,y) = (x^p, \lambda y x^q + x^q(1+g(x)))$.

Automorphism group 7.
Let $l := \gcd\{p-1, q, j_1 - j_2$ *such that* $a_{j_1} a_{j_2} \neq 0\}$, *with* $P(x) = \sum_{k<r} a_k x^k$, *and recall we defined* $t_1 = a/\alpha$, *and* $t_2 = d/\beta$.

- *If f is not special,*

$$\mathrm{Aut}(f) = \{(\zeta^{t_1} z, \zeta^{t_2} w),\ \zeta^{p-1} = \zeta^q = 1,\ a_k \neq 0 \Rightarrow \zeta^k = 1\} \cong \mathbf{U}_l \ ;$$

- *If f is special,*

$$\mathrm{Aut}(f) = \left\{ \left(\zeta^{t_1} z (1 + c\frac{(z^\alpha w^\beta)^\kappa}{z^\mu w^\nu})^{-\beta/\delta}, \zeta^{t_2} w (1 + c\frac{(z^\alpha w^\beta)^\kappa}{z^\mu w^\nu})^{\alpha/\delta} \right) \right. ,$$
$$\left. \zeta^{p-1} = \zeta^q = 1,\ a_k \neq 0 \Rightarrow \zeta^k = 1,\ c \in \mathbf{C} \right\} \cong \mathbf{C} \rtimes \mathbf{U}_l \ .$$

The action of $\mathbf{U}_l$ on $\mathbf{C}$ is given by $\zeta.z := \zeta^{\kappa p - q} \times z$.

1.1.4 Some remarks about this classification

Remark : We have the following conjecture of J. Ecalle.

Conjecture 1. *Let f and $g : (\mathbf{C}^n, 0) \circlearrowleft$ be two superattractive holomorphic germs, that is* $\mathrm{Spec}(Df_0) = \mathrm{Spec}(Dg_0) = \{0\}$. *Then f and g are analytically conjugated if and only if they are formally conjugated.*

The stated classification supports the conjecture in the sense it proves it for contracting rigid germs in dimension 2. In fact analytic and formal classification coincide except for germs of the second class. But for such germs the Jacobian has non zero trace. Of course, it does not give any idea on how to handle the general problem. ♦

Remark : Rigid contracting strict germs.

Let us give a small discussion on the classification of strict rigid germs, which is an immediate consequence of the classification. One checks the following:

Proposition 1.1.6.

- *Every map of class 1 is strict.*
- *Every map of class 2 is strict.*
- *A map of class 4 is strict if and only if* $\gcd\{p, k \leq q$ *such that* $a_k \neq 0\} = 1$*. In particular, if f is strict, one can never have* $P \not\equiv 0$*.*
- *A map of class 6 is strict if and only if* $|\det M(f)| = 1$*. In particular, if f is strict,* $\Sigma M \Sigma \neq M$ *and* $1 \notin \mathrm{Spec}(M)$*.*
- *A map of class 7 is strict if and only if we have* $|\delta| = 1$ *and* $\gcd\{p,\ q,\ k$ *such that* $a_k \neq 0\} = 1$*. And we have* $r \leq \kappa$*, when* $\kappa \in \mathbf{N}$*.*

In the other cases, the degree is greater than 2*.*

We will use this proposition in the next section. ♦

Remark : Note on the higher dimensional case.

In dimension two, every rigid germ is equivalent to a polynomial map. In higher dimension, this fact is no longer true. Take $\lambda_1, \lambda_2 \in \Delta^*$ with no resonances, and define for each $h \in \mathfrak{M}$ depending only on one single variable the germ

$$f_h(z_1, z_2, w) = (\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2, w z_1 + h(z_2)) \ .$$

One can prove that $f_{h_1} \cong f_{h_2}$ if and only if $h_1(z_2) = \xi h_1(\zeta z_2)$ for some $\xi, \zeta \in \mathbf{C}^*$. Hence the space of holomorphic mapping $\{f_h\}_{h \in \mathfrak{M}}$ modulo analytic conjugacy is not finite dimensional. However it should be possible to find normal forms by induction on the dimension. ♦

Remark : A natural question is whether this classification can be extended to the larger class of contracting germs such that $\mathcal{C}(f^\infty)$ is an analytic curve. It is equivalent to say that for some $n \in \mathbf{N}$ the curve $\mathcal{C}(f^n)$ is totally invariant.

Question:

Let $f : (\mathbf{C}^2, 0) \circlearrowleft$ be a holomorphic germ such that $\mathcal{C}(f^\infty)$ is an analytic curve. Can we make a change of coordinates so that $\mathcal{C}(f^\infty) = \{P = 0\}$ for some quasi-homogeneous polynomial? ♦

1.2 Kato surfaces

To each contracting rigid germ f of degree 1, it is possible to associate a compact complex surface $S(f)$ its Kato surface. When f_1 and f_2 are conjugated, their associated surface are isomorphic. The geometry of $S(f)$ is deeply linked with study of the normal form of f. In this section, we will apply the classification obtained above to deduce some geometric features of Kato surfaces. We will restrict ourselves to Kato surfaces associated to strict germs of the fourth and seventh class.

1.2.1 Basic constructions

We follow closely the introduction of [DO98]. We also refer to [D84] for details and proofs. In the sequel, we write B for the unit ball in $\mathbf{C}^2$.

Definition 1.2.1. *Finite tower of blow-ups above* 0.

A morphism $\Pi = \Pi_1 \circ \cdots \circ \Pi_n : \widehat{B} \to B$ *is a finite tower of point blow-ups above* 0 *if it is a composition of* n *point blow-ups s.t.*

- $\widehat{B}_0 = B$; $0_0 = 0$;
- *for each* $1 \leq i \leq n$, $\Pi_i : \widehat{B}_i \to \widehat{B}_{i-1}$ *is the blow-up at the point* O_{i-1};
- *for each* $1 \leq i \leq n-1$, $O_i \in E_i := \Pi_i^{-1}(O_{i-1})$.

Definition 1.2.2. *A holomorphic map* $f : B \circlearrowleft$ *on the unit ball in* $\mathbf{C}^2$ *is a Dloussky map if one can write* $f = \Pi\sigma$ *where* $\Pi : \widehat{B} \to B$ *is a finite tower of blow-ups above* 0 *and* $\sigma : B \to \widehat{B}$ *is an injective holomorphic map with* $\sigma(0) := \widehat{O} \in E_n$.

Π_1 Π_2 Π_3

$\mathcal{C}(f)$ $\widehat{0}$

0_1 0_2

0 E_1 E_2

E_3

B $\widehat{B}_1$ $\widehat{B}_2$ $\widehat{B}_3 = \widehat{B}$

Figure 1.1: Example of tower of point blow-ups

Take $\varepsilon < 1$ small and define the shell $A_\varepsilon := B \backslash (1-\varepsilon)B$. The composition $\widehat{f} = \sigma \circ \Pi$ maps a neighborhood of the boundary of $\widehat{B}$ injectively into $\widehat{B}$, namely the restriction $\widehat{f} : \Pi^{-1}(A_\varepsilon) \to \sigma(A_\varepsilon)$ is a biholomorphism. We can hence define the minimal compact complex surface:

$$S(f) := \left(\widehat{B} \setminus \sigma((1-\varepsilon)B)\right) /_{z\sim\widehat{f}(z)}$$

by patching $\Pi^{-1}(A_\varepsilon)$ and $\sigma(A_\varepsilon)$ with $\widehat{f}$.

When f is an automorphism i.e. $n = 0$, the surface $S(f)$ is a Hopf surface. When f is not regular i.e. $n \geq 1$, the surface $S(f)$ is called the Kato surface associated to f.

Notations:

1. in the sequel, we denote by $\widehat{\varpi} : \widehat{B} \setminus \widehat{O} \to S(f)$ the natural projection. It is a holomorphic surjective map of maximal rank which is invariant under $\widehat{f} := \sigma\Pi$.

2. for a Dloussky map $f = \sigma\Pi$, we also denote by $\{E_i\}_{1\leq i\leq n} \subset \widehat{B}$ the proper transform by $\Pi_i \circ \cdots \circ \Pi_n$ of $\Pi_i^{-1}(O_{i-1})$. We denote by $\mathcal{C}(f) = \sigma^{-1}\Pi^{-1}(0)$ the critical set of f and also its proper transform under $\Pi_1 \circ \cdots \circ \Pi_i$.

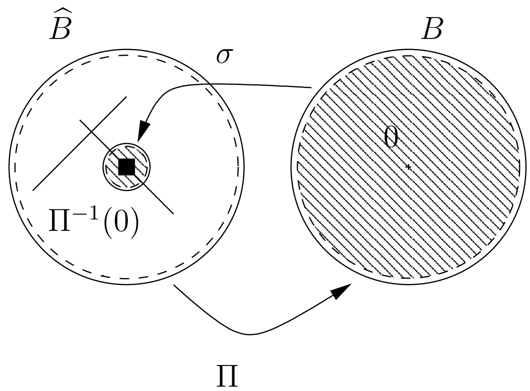

Figure 1.2: Construction of Kato surfaces

One shows (see [D84] and Section 1.2.4 where $H^2(S(f), \mathbf{Z})$ is studied in details):

Proposition 1.2.3. *The Betti numbers of $S(f)$ are given by $b_1(S(f)) = 1$ and $b_2(S(f)) = n$. In particular S is non-Kähler.*

In the Kodaira classification, $S(f)$ belongs to the VII_0 class (see [BPV84] p.188). By definition, this means $b_1(S(f)) = 1$, $\dim H^0(S, K_S^n) = 0$ for all $n \geq 0$ and $S(f)$ is minimal, where K_S is the canonical line bundle. We will study sections of the anti-canonical line bundle in Section 1.2.5.

The surface $S(f)$ depends only on the germ $(f, 0)$. We can hence speak of the Kato surface associated to a Dloussky germ. Moreover if f_1 and f_2 are

$S_\imath$ $B(S)$

π σ

B

B

Figure 1.3: Inverse construction

two conjugated Dloussky germs, the conjugacy induces a biholomorphism between $S(f_1)$ and $S(f_2)$.

On the other hand, one has an intrinsec geometric characterization of surfaces of the type $S(f)$.

Definition 1.2.4. *Global spherical shell.*

Let S be a compact complex surface. A global spherical shell (in short G.S.S.) is a holomorphic embedding $\imath : A_\varepsilon \hookrightarrow S$ such that $S \setminus \imath(A_\varepsilon)$ remains connected.

Note that in the construction above, the inclusion

$$\sigma(f) : A_\varepsilon \overset{\sigma}{\hookrightarrow} \widehat{B} \setminus \sigma((1-\varepsilon)B) \xrightarrow{\widehat{\varpi}} S(f)$$

defines a G.S.S.

Let us describe how to get a Dloussky map from a minimal compact surface S given with a G.S.S. we denote by $\imath$. We construct first an open complex manifold $S_\imath$ as follows. Define $S_0 := S \setminus \imath\{1-2\varepsilon/3 < |Z| < 1-\varepsilon/3\}$, and attach to S_0 by $\imath$ two disjoint copies of A_ε, A_ε^1 to $\imath\{1-\varepsilon/3 < |Z| < 1\}$ and A_ε^2 to $\imath\{1-\varepsilon < |Z| < 1-2\varepsilon/3\}$. The boundary of the manifold $S_\imath$ has two components, both isomorphic to A_ε, one pseudoconcave (A_ε^1) and the other pseudoconvex (A_ε^2). We then glue a ball B to the pseudoconcave part of $S_\imath$ (see figure 1.3). We obtain a strongly pseudoconvex open manifold $B(S)$ together with a biholomorphism π from a neighborhood of its boundary onto $B \setminus (1-\varepsilon)B$. One can extend it as a global modification $\pi : B(S) \to B$ by a result of Grauert [G62]. The morphism π is then a finite tower of point blow-ups above a single point 0 because S is minimal (see [La71]). The natural inclusion σ of B into the ball we attached to $S_\imath$ defines a biholomorphism into $B(S)$. By construction, the map $f(S,i) := \pi \circ \sigma$ is Dloussky.

We can summarize our discussion by the theorem:

Theorem 1.2.5. *The two correspondences $f \to S(f)$ and $(S,\imath) \to f(S,i)$ are inverse one to the other and induce an isomorphism between*

- *minimal compact complex surfaces with a G.S.S.* $(S, \imath)$*;*
- *Dloussky maps* $f := \Pi\sigma : B \to B$.

One can show there are n classes of isomorphisms of Dloussky germs $f_1, \cdots, f_n$ such that $S(f_i)$ is biholomorphic to S. More precisely, for a Dloussky germ $f = \Pi\sigma$, define $\mathfrak{S}(f)$ to be the holomorphic germ at $\widehat{O}_1$ given by $\mathfrak{S}(f) = \Pi_2 \circ \cdots \circ \Pi_n \circ \sigma \circ \Pi_1$.

Lemma 1.2.6. *The germ* $\mathfrak{S}(f)$ *is Dloussky.*

Note that if Π is defined by n blow-ups, $\mathfrak{S}^n(f) = \sigma f \sigma^{-1}$ is conjugated to f. Moreover, one has $\Pi_1 \circ \mathfrak{S}(f) = f \circ \Pi_1$ and Π_1 induces a biholomorphism between $S(f)$ and $S(\mathfrak{S}(f))$.

Theorem 1.2.7. *([D84])*
Let f *and* g *be two Dloussky germs. Then* $S(g)$ *and* $S(f)$ *are biholomorphic iff there exists an integer* $k \in \mathbf{N}$ *such that* g *and* $\mathfrak{S}^k(f)$ *are conjugate.*

Proof. Lemma 1.2.6
Let $f = \pi\sigma$ be a Dloussky germ. We use the notations of Definition 1.2.1. We construct a manifold $\check{B}$ as follows. Remove $\sigma(B)$ from $\widehat{B}$ and attach $\widehat{B}_1$ to $\widehat{B} \setminus \sigma(B)$ by the biholomorphism $\sigma \circ \Pi_1$ defined on the boundary of $\widehat{B}_1$. One gets a morphism $\check{\Pi} : \check{B} \to \widehat{B}$ induced by $\Pi_2 \circ \cdots \circ \Pi_n$ on $\widehat{B} \setminus \sigma(B)$ and $\mathfrak{S}(f)$ on $\widehat{B}_1$. The natural injection $\imath : \widehat{B}_1 \hookrightarrow \check{B}$ induces a biholomorphism. By [La71] Theorem 5.7., $\check{\Pi}$ is a tower of point blow-ups above 0 and one has $\mathfrak{S}(f) = \check{\Pi} \circ \imath$. Hence $\mathfrak{S}(f)$ is a Dloussky map. □

1.2.2 Dloussky maps and rigid germs.

The link between Dloussky germs and rigid germs is given by the following proposition. We give its proof at the end of this section.

Proposition 1.2.8. *Let $f : (\mathbf{C}^2, 0) \circlearrowleft$ be a holomorphic germ. The following are equivalent:*

1. *f is a Dloussky germ;*
2. *f is contracting, rigid and has topological degree* 1.

We can hence use our classification of rigid germs to classify minimal Kato surfaces. In particular by Proposition 1.1.6, a Dloussky germ belongs to the first, second, fourth, sixth or seventh class. Let us describe first the relationship between different classes of contracting germs and the geometry of their respective associated Kato surfaces.

Let us recall some basic notions on intersection product of curves on surfaces. Let S be any compact complex surface and V_1, V_2 be two irreducible curves on S. We can define the intersection product $V_1 \cdot V_2$ in a purely geometric way. Deform V_1 by a smooth isotopy into a a smooth real surface V_1^ε intersecting tranversely V_2. At each point $p \in V_1^\varepsilon \cap V_2$, we let $\varepsilon_p = +1$ if the orientation given by the orientation of V_1^ε and V_2 is compatible with the given orientation of S, and $\varepsilon_p = -1$ otherwise. Then the integer $V_1 \cdot V_2 := \sum_{p \in V_1^\varepsilon \cap V_2} \varepsilon_p$ does not depend on the choice of deformations and is by definition the intersection product of V_1 by V_2. We can extend this definition by linearity to any divisors. Note that when V_1 and V_2 does not have any common irreducible components, then $V_1 \cdot V_2 \geq 0$.

Let now $S = S(f)$ be a Kato surface with $b_2(S) = n > 0$. The projection in S of the n exceptional curves of Π gives exactly n rational curves $\Gamma_1 := \widehat{\varpi}(E_1), \cdots, \Gamma_n := \widehat{\varpi}(E_n)$. We let $M(S)$ be the matrix whose entries are given by the intersection numbers $\Gamma_i.\Gamma_j$. One can define the invariant $\sigma_n(S) := -\mathrm{tr}(M(S)) + 2N$ where N is the number of curves Γ_i which are singular. One proves (see Corollaire 3.2. [D84])

$$2n \leq \sigma_n(S) \leq 3n.$$

The invariant $\sigma_n(S)$ is related to the way the sequence of blow-ups Π_i is performed.

In fact, $\sigma_n(S) = 2n$ iff $\mathcal{C}_1$ the proper transform of $\mathcal{C}(f)$ by Π_1 does not contain O_1, for all $2 \leq i \leq n$, $O_i \in E_i \setminus \cup_{k=1}^{i-1} E_k$ (by convention $O_n = \widehat{0}$). On the other hand, $\sigma_n(S) = 3n$ iff $\mathcal{C}_1 \ni 0_1$, and for all $2 \leq i \leq n$ one has $O_i \in E_i \cap \mathcal{C}_i \cup_{k=1}^{i-2} E_k$ where $\mathcal{C}_i$ denotes the proper transform of $\mathcal{C}(f)$ by $\Pi_1 \circ \cdots \circ \Pi_i$.

The following theorem is essentially due to Dloussky.

Theorem 1.2.9.
Let $f : (\mathbf{C}^2, 0) \circlearrowleft$ be a contracting rigid germ of degree 1. Assume f is not an automorphism and let S be the Kato surface associated to it. Then,

- $\sigma_n(S) = 2n$ *iff* $\mathrm{tr}Df_0 \neq 0$ *that is when f belongs to the second class.*
- $\sigma_n(S) = 3n$ *iff f belongs to the sixth class. We say in that case that f and S are Inoue-Hirzebruch.*
- $2n < \sigma_n(S) < 3n$ *iff f belongs to the fourth or seventh class. In that case we say that f and S are intermediate. Moreover, one can always find a germ of the fourth class f_1 and a germ of the seventh class f_2 such that $S \cong S(f_1) \cong S(f_2)$.*

We also mention the following theorem due to Nakamura:

Theorem 1.2.10. *Let S be a minimal Kato surface, and $M(S)$ be the matrix of intersection of its rational curves.*

1. *When $\sigma_n(S) > 2n$, $M(S)$ is negative definite;*
2. *when $\sigma_n(S) = 2n$, $M(S)$ is negative with a one dimensional kernel generated by the vector* $(1, \cdots, 1)$.

For a proof of this result see [D84], where a complete description of the matrix $M(S)$ is given.
Proof. Theorem 1.2.9.

Dloussky shows that $\sigma_n(S) = 2n$ iff $\mathrm{tr}Df_0 \neq 0$ ([D84]), and that $\sigma_n(S) = 3n$ iff f is conjugate to $(z, w) \to (z^a w^b, z^c w^d)$ (see [D88-2]).

To prove the last assertion, one has to show that for any rigid germ f of either the fourth or the seventh class, the set $\{\mathfrak{S}^k(f)\}_{k \in \mathbf{N}}$ contains germs of both the fourth *and* the seventh class.

If f is a germ of the seventh class, it is a consequence of the proof of Proposition 1.1.5 that there exists a rigid germ of the fourth class $\overline{f}$ and an integer k such that $\mathfrak{S}^k(\overline{f}) = f$. In particular, $\mathfrak{S}^{n-k}(f) = \overline{f}$.

On the other hand take a rigid germ of the fourth class of degree 1: $f(z, w) = (z^p, \lambda w z^q + z^r(1 + P(z)))$ with $r \leq q$ and $P(z) = \sum_{l \geq 0} a_l z^l$. Let $k_1 \geq 0$ be the largest integer such that $pk_1 < r$.

If $\widetilde{\Pi}_1(z, w) = (z, wz^{k_1})$ then $\widetilde{\Pi}_1 f = g_1 \widetilde{\Pi}_1$ with

$$g_1(z, w) = (z^p, \lambda w z^{q - k_1(p-1)} + z^{r - pk_1}(1 + P(z)),$$

hence $\mathfrak{S}^{k_1}(f) = g_1$. If $p(k_1 + 1) > r$ and $\Pi_1(z, w) = (zw, w)$ then $\Pi_1 g_1 = f_1 \Pi_1$ with

$$f_1(z, w) = ((zw)^{p(k_1+1)-r}(1 + \lambda (zw)^{q-r+k_1} + P(zw))^{-1},$$
$$(zw)^{r-pk_1}(1 + \lambda(zw)^{q-r+k_1} + P(zw))$$

hence $\mathfrak{S}^{k_1+1}(f) = f_1$ which belongs to the seventh class.

Otherwise $pk_1 + p = r$ and if we set $\Pi_1(z,w) = (z, z(w+1))$ then $\Pi_1 g_1 = f_1 \Pi_1$ with

$$\begin{aligned} f_1(z,w) = (z^p, \lambda w z^{q+k_1-r+1} + P(z) + z^{q+k_1-r+1}) \\ = (z^p, \lambda w z^{q_1} + z^{r_1}(1 + P_1(z))), \end{aligned}$$

hence $\mathfrak{S}^{k_1+1}(f) = f_1$.

We can iterate the process and find a sequence f_j such that $\mathfrak{S}^{k_j+1}(f_j) = f_{j+1}$ until f_j belongs to the seventh class. This precisely happens when p does not divide r_j. But as f has degree 1, $\gcd\{p, r, r+l \text{ s.t. } a_l \neq 0\} = 1$ which implies that $\gcd\{p, r_j\} = 1$.

We infer the existence of an integer k such that $\mathfrak{S}^k(f)$ belongs to the seventh class. □

Proof. Proposition 1.2.8.

The implication (1) $\Rightarrow$ (2) is relatively easy. Take $f = \Pi\sigma$ a Dloussky map. As $\sigma(B) \subset\subset \widehat{B}$, the map f is contracting. As Π and σ are strict, f is strict too. One checks that $\mathcal{C}(f) = \sigma^{-1}(\Pi^{-1}(0))$. But $\Pi^{-1}(0)$ is always a divisor with normal crossings hence so is $\mathcal{C}(f)$. One concludes with the help of the following lemma.

Lemma 1.2.11.

If f, g are two Dloussky germs, their composition $g \circ f$ is also Dloussky.

This implies that for all $n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{C}(f^n)$ is a divisor with normal crossings. Hence f is rigid.

Proof. Lemma 1.2.11

Write $f = \Pi_1\sigma_1$ and $g = \Pi_2\sigma_2$ with $\Pi_i : \widehat{B}_i \to B$ for $i = 1, 2$. We construct a manifold $\widehat{B}$ as follows. Remove $\sigma_1(B)$ from $\widehat{B}_1$ and attach $\widehat{B}_2$ to $\widehat{B}_1 \setminus \sigma_1(B)$ by the biholomorphism $\sigma_1^{-1} \circ \Pi_2$ defined on the boundary of $\widehat{B}_2$. One gets a morphism $\Pi : \widehat{B} \to B$ induced by Π_1 on $\widehat{B}_1 \setminus \sigma_1(B)$ and $\Pi_1\sigma_1^{-1}\Pi_2$ on $\widehat{B}_2$, and a biholomorphism $\sigma : B \to \widehat{B}$ defined by σ_2. By [La71] Theorem 5.7., Π is a tower of point blow-ups above 0 and one has $g \circ f = \Pi \circ \sigma$. Hence $g \circ f$ is a Dloussky map. □

For the proof of the converse (2) $\Rightarrow$ (1), one uses the classification of rigid germs. If f is a contracting rigid germ of degree 1, then f belongs either to the first, second, fourth, sixth or seventh class.

When f is **regular**, there is nothing to prove. If f is singular, we construct by induction a sequence of blow-ups $\Pi_k : B_k \to B_{k-1}$ (by convention $B_0 = B$), such that $f = \Pi_1 \circ \cdots \circ \Pi_k \circ \sigma_k$ for each k and such that σ_k eventually becomes a local biholomorphism.

Take $f(z,w) = (\alpha z, wz^q + P(z))$ with $P(z) = \sum_{l\geq 1} a_l z^l$ a germ of the **second class**. Define $\Pi_1(z,w) = (z, z(w + a_1))$. Then $f = \Pi_1\sigma_1$ with

$\sigma_1(z,w) = (\alpha z, \alpha^{-1}(wz^{q-1}+\sum_{l\geq 2} a_l z^l))$. By induction, we define $\Pi_k(z,w) = (z, z(w+\alpha^{-k}a_k))$. We can hence write the map f under the form $f = \Pi_1 \cdots \Pi_k \sigma_k$ with $\sigma_k(z,w) = (\alpha z, \alpha^{-k}(wz^{q-k}+\sum_{l\geq k+1} a_l z^{l-k}))$. We conclude by noticing that σ_q is a biholomorphism.

Take now a rigid germ of the **sixth class** $f(z,w) = (z^a w^b, z^c w^d)$ with $|ad-bc| = 1$. Let M be the matrix

$$M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix},$$

and define

$$T_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

It is an elementary fact that one can expand the matrix M as a product $M = \Sigma^{\varepsilon_0} T_{\varepsilon_1} T_{\varepsilon_2} \cdots T_{\varepsilon_k}$ with $\varepsilon_i \in \{0,1\}$. This implies $f = \Pi_{\varepsilon_k} \cdots \Pi_{\varepsilon_1} \Sigma^{\varepsilon_0}$ where $\Pi_0(z,w) = (z, zw)$ and $\Pi_1(z,w) = (zw, w)$.

Let f belong to the **fourth class**: $f(z,w) = (z^p, \lambda w z^q + P(z))$ with $p \geq 2$, $q \geq 1$, $\lambda \neq 0$ and $P(z) = \sum_{k\geq 1} a_k z^{r_k} = \sum_{k=1}^m a_k z^{r_k} + o(z^q)$ where $r_1 < r_2 < \cdots < r_m \leq q$ and $\gcd\{p, r_1, \cdots, r_m\} = 1$. We will describe precisely the sequence of blow-ups Π such that $f = \Pi \circ \sigma$ for some biholomorphism σ. The proof is quite technical.

We define $P_0(z,w) \equiv 1$ and for $1 \leq l \leq m$ we let

$$P_l(z,w) := \lambda w z^{q-r_l} + \sum_{k\geq l+1} a_k z^{r_k - r_l},$$

so that we have the relations for $1 \leq l \leq m-1$

$$P_l(z,w) = z^{r_{l+1}-r_l}\left(a_{l+1} + P_{l+1}(z,w)\right).$$

We also let $p_0 = p$, $r_0 = 0$ and $p_l := \gcd\{p_{l-1}, r_l - r_{l-1}\} = \gcd\{p, r_1, \cdots, r_l\}$ for $1 \leq l \leq m$, and write

$$\sigma_0(z,w) := f(z,w) = \left(z^{p_0} Q_0(z^{p_0}, P_0)^{-1}, z^{r_1}(a_1 + P_1) R_0(z^{p_0}, P_0)\right),$$

with $Q_0 \equiv R_0 \equiv 1$.

Lemma 1.2.12.

Let σ_l be a morphism of the form

$$\sigma_l(z,w) = \left(z^{p_l} Q_l(z^{p_l}, P_l)^{-1}, P_l(z,w) R_l(z^{p_l}, P_l)\right),$$

for some polynomials Q_l, R_l such that $Q_l(0,0)R_l(0,0) \neq 0$.

Then there exists Π_{l+1} a finite tower of points blow-ups above 0 such that $\sigma_l = \Pi_{l+1} \circ \sigma_{l+1}$ where

$$\sigma_{l+1}(z,w) = \left(z^{p_{l+1}} Q_{l+1}(z^{p_{l+1}}, P_{l+1})^{-1}, P_{l+1}(z,w) R_{l+1}(z^{p_{l+1}}, P_{l+1})\right),$$

for some polynomials Q_{l+1}, R_{l+1} s.t. $Q_{l+1}(0,0)R_{l+1}(0,0) \neq 0$.

Applying this lemma inductively to $\sigma_0, \sigma_1, \cdots$ we get by induction a sequence Π_k of finite tower of points blow-ups above 0 such that $\sigma_{k-1} = \Pi_k \circ \sigma_k$. Note that $p_m = 1$ which implies that we can write σ_m under the form

$$\sigma_m(z,w) = \left(Az(1+o(1)), Bz^{q-r_m}(\lambda w + O(z))(1 + O(z, wz^{q-r_m}))\right)$$

for some constants $AB \neq 0$. If $r_m = q$, the map σ_M is a local biholomorphism. Otherwise define

$$\widetilde{\Pi}(z,w) = (z, z^{q-r_m} w).$$

We have $\sigma_m = \widetilde{\Pi} \circ \sigma_{m+1}$ with

$$\sigma_{m+1}(z,w) = \left(Az(1+o(1)), BA^{r_m - q}(\lambda w + O(z))(1+o(1))\right).$$

Hence the map σ_{m+1} is a local biholomorphism, and we conclude that $f = \Pi_1 \circ \cdots \circ \Pi_m \circ \widetilde{\Pi} \circ \sigma_{m+1}$ is Dloussky.

Proof. Lemma 1.2.12

Start with $\sigma_l(z,w) = \left(z^{p_l} Q_l(z^{p_l}, P_l)^{-1}, z^{r_{l+1}-r_l}(a_{l+1} + P_{l+1}) R_l(z^{p_l}, P_l)\right)$.
If $p_l < r_{l+1} - r_l$, we have

$$\sigma_l(z,w) = (z, zw) \circ \left(z^{p_l} Q_l(z^{p_l}, P_l)^{-1},\right.$$
$$\left. z^{r_{l+1}-r_l-p_l}(a_{l+1} + P_{l+1})(Q_l R_l)(z^{p_l}, P_l)\right).$$

If $p_l > r_{l+1} - r_l$, we have

$$\sigma_l(z,w) = (zw, w) \circ \left(z^{p_l - r_{l+1} + r_l}(a_{l+1} + P_{l+1})^{-1}(Q_l R_l)(z^{p_l}, P_l)^{-1},\right.$$
$$\left. z^{r_{l+1}-r_l}(a_{l+1} + P_{l+1}) R_l(z^{p_l}, P_l)\right).$$

We can hence find $\widetilde{\Pi}$ a composition of finitely many transformations of the form $(z,w) \to (z, zw)$ or $(z,w) \to (zw, w)$ so that $\sigma_l = \widetilde{\Pi} \circ \widetilde{\sigma}_l$ with

$$\widetilde{\sigma}_l(z,w) = \Big(z^{p_{l+1}}(a_{l+1} + P_{l+1})^{-k}\ \overline{Q}_l(z^{p_l}, P_l)^{-1},$$
$$z^{p_{l+1}}(a_{l+1} + P_{l+1})^{k'}\ \overline{R}_l(z^{p_l}, P_l)\Big),$$

with $p_{l+1} = \gcd\{p_l, r_{l+1} - r_l\}$ and for some $k, k' \in \mathbf{N}$ and some polynomials $\overline{Q}_l, \overline{R}_l$ s.t. $\overline{Q}_l \cdot \overline{R}_l(0,0) \neq 0$. For sake of simplicity, we let h_1 be the first component of the map $\widetilde{\sigma}_l$.

Define now

$$\Pi(z,w) = (z, z(w + \varphi(z))).$$

Then $\widetilde{\sigma}_l = \Pi \circ \sigma_{l+1}$ with

$$\sigma_{l+1}(z,w) = \Big(z^{p_{l+1}}(a_{l+1} + P_{l+1})^{-k}\ \overline{Q}_l(z^{p_l}, P_l)^{-1},$$
$$(a_{l+1} + P_{l+1})^{k+k'}\ (\overline{Q}_l \cdot \overline{R}_l)(z^{p_l}, P_l) - \varphi(h_1(z,w))\Big).$$

We look for a map φ s.t. the second component of σ_{l+1} is divisible by P_{l+1}. This is equivalent to impose the following condition.

$$a_{l+1}^{k+k'}(\overline{Q}_l \cdot \overline{R}_l)(z^{p_l}, a_{l+1}z^{r_{l+1}-r_l}) = \\ \varphi\left(z^{p_{l+1}} a_{l+1}^{-k}\ \overline{Q}_l(z^{p_l}, a_{l+1}z^{r_{l+1}-r_l})^{-1}\right). \quad (1.8)$$

Using the fact that p_{l+1} divides both p_l and $r_{l+1} - r_l$ and that $\overline{Q}_l(0,0) \neq 0$, we rewrite 1.8 under the form

$$\varphi \circ \psi(z^{p_{l+1}}) = R(z^{p_{l+1}}),$$

where $\psi(z) = az(1 + o(z))$ is a local biholomorphism ($a \in \mathbf{C}^*$) and R is a polynomial which does not vanish at the origin. This can be solved by setting $\varphi(z) := R \circ \psi^{-1}(z)$. This shows that

$$\sigma_{l+1}(z,w) = (H_1(z,w), P_{l+1}(z,w)R_{l+1}(z^{p_{l+1}}, P_{l+1})).$$

Finally we have

$$R_{l+1}(0,0) = (k + k') \cdot a_{l+1}^{k+k'-1}(\overline{Q}_l \cdot \overline{R}_l)(0,0) \neq 0,$$

which concludes the proof. $\square$

Finally take f a rigid map of degree 1 of the **seventh class**. Proposition 1.1.5 applies. There exists a map $\widetilde{\Pi} : (z,w) \to (z^\alpha w^\beta, z^\mu w^\nu)$ with $|\alpha\nu - \beta\mu| = 1$ and a rigid map of degree 1 of the fourth class $\overline{f}$ such that $\overline{f}\widetilde{\Pi} = \widetilde{\Pi} f$. The map $\widetilde{\Pi}$ is a finite tower of point blow-ups above 0 viewed in some coordinates chart hence $f = \mathfrak{S}^k(\overline{f})$ for some integer k. By what preceeds, $\overline{f}$ is a Dloussky germ, hence f is Dloussky too. $\square$

1.2.3 Intermediate Kato surfaces: the complement of the rational curves.

In the sequel we restrict our discussion to the case of intermediate Kato surface. For sake of simplicity, we assume that $S = S(f)$ where f belongs to the fourth class. We write $f(z, w) = (z^p, \lambda w z^q + P(z))$ with $p \geq 2$, $\lambda \neq 0$, $q \geq 1$ and $P(z) = \sum_{k=1} a_k z^k$ such that $\gcd\{p, k \leq q \text{ s.t. } a_k \neq 0\} = 1$. We also let B be a small polydisk, on which f has degree 1. By Proposition 1.2.8, we can write $f = \Pi\sigma$ where $\Pi : \widehat{B} \to B$ is a finite tower of point blow-ups above 0 and σ is injective.

Our aim is to show that the normal form of f helps us to understand precisely the geometric structure of S.

We have seen that S contains n rational curves $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n$ given by the projection of the exceptional curves of Π inside S. We denote by Γ the union of all these curves.

Proposition 1.2.13. *([D84] Theorem 2.4)*

The only complex curves contained in S are the rational curves $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n$ contained in Γ.

In particular, S does not have any non-constant meromorphic functions.

Proof.

Take a curve $V_S \subset S$. Define $\widehat{V}$ its projection inside $\widehat{B} \setminus \sigma(B)$ and extend it using the invariance by $\sigma\Pi$. The curve $\widehat{V}$ can be projected down to $B \setminus \{0\}$. Let V be its extension through 0. It is an f-invariant curve hence by Proposition 1.1.4 we have $V = \{z = 0\}$, and $V_S \subset \Gamma$. $\square$

Let us consider $S \setminus \Gamma$ the complement of Γ. This manifold is directly related to the dynamics of the map $f = (z^p, \lambda w z^q + P(z)) : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$.

The topological degree of f is p and its critical set in $\mathbf{C}^2$ is given by $\{z = 0\}$. It defines a covering map of degree p of $\Delta^* \times \mathbf{C}$ onto itself. If we consider f as a rational map of $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, it has exactly two superattractive fixed points. One is the origin in $\mathbf{C}^2$, the point $0 := ([0 : 1], [0 : 1])$ in homogeneous coordinates, and the other is $\infty := ([1 : 0], [1 : 0])$. The basins of attractions of these points in $\mathbf{C}^2$ are respectively $\Omega_0 = \Delta \times \mathbf{C}$, and $\Omega_\infty = (\mathbf{C} \setminus \Delta) \times \mathbf{C}$. The cylinder $S^1 \times \mathbf{C}$ is invariant.

Take a point $Z \in B \setminus (\{z = 0\} \cup f((1 - \varepsilon)B))$. It has a unique preimage $\Pi^{-1}(Z)$ in $\widehat{B}$ which does not lie in $\sigma((1-\varepsilon)B)$. By construction of $S = S(f)$, we can assign to Z a unique point $\varpi(Z) \in S$. As Z does not belong to the critical set of f, we have $\varpi(Z) \notin \Gamma$. The map ϖ is holomorphic, of maximal rank, surjective onto $S \setminus \Gamma$ and f-invariant $\varpi \circ f = \varpi$. One can hence extend it to a global holomorphic map $\varpi : \Delta^* \times \mathbf{C} \to S \setminus \Gamma$.

In the sequel we shall use the group of p-adic integer $\mathbf{Z}[1/p] := \{\alpha = j/p^n \text{ for } j \in \mathbf{Z} \text{ and } n \geq 0\}$. We also deal with the additive group

$$\mathbf{Z}_p := \varprojlim \mathbf{Z}/p^n \cong \mathbf{Z}[1/p]/\mathbf{Z} \ .$$

In multiplicative notations $\mathbf{Z}_p = \cup_{n\geq 0}\mathbf{U}_{p^n}$. We warn the reader that we will endow $\mathbf{Z}_p$ with the *discrete* topology.

Theorem 1.2.14.

1. *The map $\varpi : \Delta^* \times \mathbf{C} \to S \setminus \Gamma$ is a principal $\mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}$-fibration where $\mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}$ is endowed with the discrete topology.*

   In particular, ϖ is a non-ramified covering map.

2. *The quotient of $\Delta^* \times \mathbf{C}$ by the action of f defines a complex manifold, and ϖ induces an isomorphism $\underline{\varpi}$ of the quotient onto $S \setminus \Gamma$:*

$$\begin{tikzcd} \Delta^* \times \mathbf{C} \arrow[r, "\varpi"] \arrow[d] & S \setminus \Gamma \\ \Delta^* \times \mathbf{C}/f \arrow[ur, "\cong", "\underline{\varpi}"'] & \end{tikzcd} \tag{1.9}$$

Thanks to the explicit form of f, we can compute the automorphism group of ϖ, and deduce from it $\pi_1(S \setminus \Gamma)$.

We leave to the reader to check the following proposition by induction.

Proposition 1.2.15. *For all $k \in \mathbf{N}$ we have*

$$f^k(z, w) = (z^{p^k}, \lambda^k w z^{q_k} + P_k(z))$$

with $q_k = q(p-1)^{-1}(p^k - 1)$ and

$$P_{k+1}(z) \quad = \quad \sum_{l=0}^{k} \lambda^l z^{q\frac{p^l-1}{p-1}p^{k-l+1}} P(z^{p^{k-l}}) \ .$$

Theorem 1.2.16. *Covering automorphisms of ϖ.*

1. *Let $\overline{\alpha} \in \mathbf{Z}_p = \mathbf{Z}[1/p]/\mathbf{Z}$, and take $\alpha \in \mathbf{Z}[1/p]$ a representative of $\overline{\alpha}$ and $k \in \mathbf{N}$ such that $p^k\alpha \in \mathbf{Z}$. Define*

$$\begin{aligned} Q_{\overline{\alpha}}(z) \quad &:= \quad \frac{1}{\lambda^k z^{q_k}} \left(P_k(z) - P_k(e^{2i\pi\alpha} z)\right) \in \mathbf{C}(z) \ . \\ \rho(\overline{\alpha}) \quad &:= \quad \exp(2i\pi q_k \alpha) \in \mathbf{Z}_p \end{aligned}$$

   The rational function $Q_{\overline{\alpha}}$ and the complex number $\rho(\overline{\alpha})$ do not depend on the choice of the representative of α and k and are uniquely determined by $\overline{\alpha}$.

2. *The automorphism group of ϖ is given by*

$$\mathrm{Aut}(\varpi) = \left\{\phi_\alpha(z, w) := \left(e^{2i\pi\alpha} z, \rho(\overline{\alpha})^{-1}(w + Q_{\overline{\alpha}}(z))\right) \text{ for } \alpha \in \mathbf{Z}_p\right\} \cong \mathbf{Z}_p.$$

Remark : The covering map ϖ is not Galoisian. The action of $\mathrm{Aut}(\varpi)$ is not transitive on a fiber $\varpi^{-1}\{M\}$ for any point $M \in S - \Gamma$. In fact, if $\varpi(z_0, w_0) = M$, then the equality

$$\mathrm{Aut}(\varpi).(z_0, w_0) = \varpi^{-1}\{M\} \cap \{|z| = |z_0|\}$$

holds. ♦

Let $\mathbf{H}$ be the upper-half plane, and lift f to $\mathbf{H} \times \mathbf{C}$ to an automorphism

$$F(x, w) = (px, \lambda w \exp(2i\pi qx) + P(\exp(2i\pi x))) \ .$$

Denote by $e : \mathbf{H} \times \mathbf{C} \to \Delta^* \times \mathbf{C}$ the mapping $e(x, w) := (\exp(2i\pi x), w)$.

Theorem 1.2.17. *Universal covering of $S \setminus \Gamma$.*

- *The composition $\Upsilon := e \circ \varpi : \mathbf{H} \times \mathbf{C} \to S \setminus \Gamma$ is a universal covering of $S \setminus \Gamma$.*
- *The automorphism group of the covering Υ is given by*

$$\mathrm{Aut}(\Upsilon) = e^*(\mathrm{Aut}(\varpi)) \rtimes < F > \cong \mathbf{Z}\left[\frac{1}{p}\right] \rtimes \mathbf{Z},$$

with the action $k.\alpha = \alpha/p^k$, for $k \in \mathbf{Z}$ and $\alpha \in \mathbf{Z}[1/p]$. In particular,

$$\pi_1(S \setminus \Gamma) \cong \mathbf{Z}\left[\frac{1}{p}\right] \rtimes \mathbf{Z} \ .$$

This gives an intrinsic interpretation of the integer p for the surface S.

Remark : The group $\mathbf{Z}[1/p] \rtimes \mathbf{Z}$ has a finite presentation. It is generated by F and the translation $T_1 = (x+1, w)$ quotiented by one relation $F \circ T_1 = T_1^p \circ F$.

Assume now that $p - 1|q$. We make the change of coordinates

$$(x, w) \mapsto (x, w \exp(2i\pi xq/(p-1)))$$

so that T_1 remains unchanged and F becomes

$$\widetilde{F}(x, w) = (px, \lambda w + e^{-2i\pi \frac{pq}{p-1} x} P(e^{2i\pi x})).$$

This is the form under which [HO94] and [DO99] wrote the group $\mathrm{Aut}(\Upsilon)$ in the case of Hénon mappings of degree $p = 2$. ♦

The rest of this subsection is dedicated to the proofs which are essentially computational except for Theorem 1.2.14.

For all the proofs below, we fix a small polydisk B around the origin s.t. f restricted to B is injective outside its critical set $\{z = 0\}$.
Proof. Theorem 1.2.14.

For the first assertion, take a point $M \in S \setminus \Gamma$. We shall prove that there exists a small neighborhood $W \ni M$ such that if we fix a connected component of $\phi^{-1}(W)$ then $\phi^{-1}(W)$ is "naturally" biholomorphic to $W \times \mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}$.

Let $Z \in \varpi^{-1}(M)$ and take a small ball $U \ni Z$ s.t.

(1) for all $k \geq 0$ the map $f^k : U \to f^k(U)$ is injective;

(2) for all $k > l \geq 0$ one has $f^k(U) \cap f^l(U) = \emptyset$.

This can always be done because f is injective in a neighborhood of the origin and all points tend to $(0, 0)$. We also fix an history of Z i.e. a sequence $\{Z_i\}_{i\in\mathbf{Z}}$ s.t. $f(Z_i) = Z_{i+1}$ and $Z_0 = Z$. We set $W := \varpi(U)$. It is an open neighborhood of M and $\varpi : U \to W$ is a biholomorphism by (2).

We first note that $\varpi^{-1}(W) = \cup_{j,k\geq 0} f^{-j}(f^k(U))$. As the holomorphic map $f^j : \Delta^* \times \mathbf{C} \circlearrowleft$ is a covering map of degree p^j and $f^k(U)$ is simply connected, $f^{-j}(f^k(U))$ is a disjoint union of p^j connected components $f^{-j}(f^k(U)) = U_1^{k,j} \cup \cdots \cup U_{p^j}^{k,j}$ s.t. $f^j : U_l^{k,j} \to f^k(U)$ induces a biholomorphism.

For any $k \geq 0$ we let $U_k := f^k(U) \ni Z_k$ and $f_k : U_k \to U$ be the branch of f^k mapping U_k onto U. For any $k \leq 0$ we let U_k be the connected component of $f^k(U)$ containing Z_k and $f_k := f^{-k}$. We denote the first (resp. the second) projection by $\pi_1(z, w) = z$ (resp. $\pi_2(z, w) = w$). Note that $\pi_1 \circ f^l(z, w) = z^{p^l}$ for any $l \geq 0$.

Let $\widetilde{U} := U_l^{j,k} \subset f^{-j}(f^k(U))$ be any connected component of $\varpi^{-1}(W)$. The holomorphic map $\widetilde{U} \to \mathbf{C} : (z, w) \to z^{-p^j} \times \pi_1 \circ f_j \circ f^j$ takes its value in $\mathbf{U}_{p^j}$ and is hence constant. Its value is determined uniquely by $\widetilde{U}$ independent of the choice of j; we denote it by $\rho(\widetilde{U}) \in \mathbf{Z}_p$. We also let $d(\widetilde{U}) := k - j \in \mathbf{Z}$ which does not depend on any choice either. Note that $f_j \circ f^j : \widetilde{U} \to U_{d(\widetilde{U})}$ is a biholomorphism.

Lemma 1.2.18. *The map $\widetilde{U} \to (\rho(\widetilde{U}), d(\widetilde{U}))$ is a bijection from the set of connected components of $\varpi^{-1}(W)$ onto $\mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}$.*

Proof. For the injectivity take U_1, U_2 two components s.t. $d(U_1) = d(U_2)$ and $\rho(U_1) = \rho(U_2)$. As $d(U_1) = d(U_2)$ one can find an integer $j \in \mathbf{N}$ s.t. $f^j(U_1) = f^j(U_2)$. The equality $\rho(U_1) = \rho(U_2)$ implies then that the holomorphic map $f_{12} := \left(f_j \circ f^j|_{U_2}\right)^{-1} \circ \left(f_j \circ f^j|_{U_1}\right) : U_1 \to U_2$ satisfies $\pi_1 \circ f_{12} = \pi_1$ and $\varpi \circ f_{12} = \varpi$, hence $f = \mathrm{Id}$ and $U_1 = U_2$. The surjectivity is clear. $\square$

Lemma 1.2.19. *For any compact set $K \subset \Delta^* \times \mathbf{C}$, the number of connected components of $\varpi^{-1}(W) \cap K$ is finite.*

Proof. Take $N \gg 1$ s.t. $f^N(K) \subset B$. Let $\widetilde{U} \subset f^{-j}(f^k(U)) \cap K$ be a connected component of $\varpi^{-1}(W)$. We first note that

$$d(\widetilde{U}) \leq N_1 := \max\{|l| \text{ for } l \in \mathbf{Z} \text{ s.t. } f^l(K) \cap K \neq \emptyset\}.$$

Without loss of generality, we can assume that $k \geq j \geq N$ and we write $j = N + j_0$ and $k = N + k_0$. Then $f^{N+j_0}(\widetilde{U}) = f^{N+k_0}()$, and we infer $f^N(\widetilde{U}) = f^{N+d(\widetilde{U})}(B)$ as f is injective on B. Whence $\widetilde{U} \subset f^{-N}(\cup_{|k|\leq N_1} f^{N+k}(B))$ which has finitely many connected components. $\square$

Lemmas 1.2.18 and 1.2.19 show that the map $\phi : \varpi^{-1}(W) \to W \times \mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}$ defined on $\widetilde{U} \subset f^{-j}(f^k(U))$ by

$$\phi(Z) := \left(\varpi(f_{-k} \circ f^j(Z)), \rho(\widetilde{U}), d(\widetilde{U})\right),$$

is a biholomorphism if $\mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}$ is endowed with the discrete topology.

Notice that for a given history of U, ϕ is uniquely determined. If we change it, the first component of ϕ remains the same whereas ρ is multiplied by an element $\zeta \in \mathbf{Z}_p$ and d is increased by an integer $l \in \mathbf{Z}$. This shows that the glueing maps between two trivializations are given by multiplication by an element of the structural group $\mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}$. This concludes the proof that ϖ is a $\mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}$ principal fibration.

The second assertion is clear. By construction ϖ factorizes through $\pi : \Delta^* \times \mathbf{C} \to \Delta^* \times \mathbf{C}/f$ and induces a continuous map $\Delta^* \times \mathbf{C}/f \to S \setminus \Gamma$ which is bijective. $\square$

Proof. Theorem 1.2.16.

1. This is an easy induction using Proposition 1.2.15.

2. Let $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathrm{Aut}(\varpi)$ i.e. φ is a biholomorphism of $\Delta^* \times \mathbf{C}$ satisfying $\varpi \circ \varphi = \varpi$. For any $(z, w) \in \Delta^* \times \mathbf{C}$ there exists k, j s.t. $f^j(\varphi(z, w)) = f^k(z, w)$. As φ is holomorphic, j and k do not depend on (z, w). In particular, $\varphi_1^{p^j}(z, w) = z^{p^k}$ and as φ is injective we infer $j = k$ and $\varphi_1(z, w) = \exp(2i\pi\alpha)z$ for some $\alpha \in \mathbf{Z}_p$. We conclude using Proposition 1.2.15 and the equation $f^j \circ \varphi = f^j$. $\square$

Proof. Theorem 1.2.17.

An element $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathrm{Aut}(\Upsilon)$ is an automorphism of $\mathbf{H} \times \mathbf{C}$ s.t $\Upsilon \circ \varphi = \Upsilon$. We easily check that $\varphi_1(x, w) = p^k x + \alpha$ for some $k \in \mathbf{Z}$ and $\alpha \in \mathbf{Z}[1/p]$ and that this determines uniquely φ_2. We can hence define a bijective map $\phi : \mathrm{Aut}(\Upsilon) \to \mathbf{Z}[1/p] \times \mathbf{Z}$ by $\varphi \mapsto (\alpha, k)$. We note that F is represented by the couple $(0, 1)$ and an element of $e^*(\mathrm{Aut}(\varpi))$ by a couple of the form $(\alpha, 0)$. We can equipped the set $\mathbf{Z}[1/p] \times \mathbf{Z}$ by the group law coming from the composition in $\mathrm{Aut}(\Upsilon)$, and under this identification the two sets $\{(0, k), k \in \mathbf{Z}\}$ and $\{(\alpha, 0), \alpha \in \mathbf{Z}[1/p]\}$ form two subgroups generating the full group. One also checks the composition formula $(0, 1) \cdot (\alpha, 0) = (\alpha/p, 1)$. This shows that ϕ is a group isomorphism from $\mathrm{Aut}(\Upsilon)$ onto $\mathbf{Z}[1/p] \rtimes \mathbf{Z}$ with the action of $\mathbf{Z}$ on $\mathbf{Z}[1/p]$ given by $k \cdot \alpha := \alpha/p^k$. $\square$

1.2.4 Holomorphic line bundles

The study of holomorphic line bundles $H^1(S, \mathcal{O}^*)$ are central for understanding the geometry of S. In this section, we describe the structure of the abelian group $H^1(S, \mathcal{O}^*)$. This group is also referred to the Picard group of S and denoted by $\mathrm{Pic}(S)$.

Lemma 1.2.20.

$$H^1(S, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z} \tag{1.10}$$
$$H^2(S, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}^n \tag{1.11}$$

Proof. The isomorphisms 1.10 and 1.11 follow from the Mayer-Vietoris exact sequence for cohomology groups (see [D84]). □

The cup product induces a natural symmetric bilinear form on the abelian free group $H^2(S, \mathbf{Z})$. We denote it by $<,>$.

If $\{e_1, \cdots, e_n\}$ is a basis for $H^2(S, \mathbf{Z})$, the determinant $\det(< e_i, e_j >)$ is determined uniquely, independent of the choice of the basis. This number is called the discriminant of $<,>$. When it is equal to ± 1 we say that $<,>$ is unimodular.

Lemma 1.2.21. *The cup product* $<,>$: $H^2(S, \mathbf{Z}) \times H^2(S, \mathbf{Z}) \to \mathbf{Z}$ *defines a non degenerate unimodular bilinear form. In an equivalent way, the cup product induces an isomorphism*

$$H^2(S, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}(\mathrm{H}^2(\mathrm{S}, \mathbf{Z}), \mathbf{Z}).$$

Proof. By Poincaré duality (see [Sp66]) the cup product yields a surjective morphism

$$H^2(S, \mathbf{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{H}^2(\mathrm{S}, \mathbf{Z}), \mathbf{Z}) \longrightarrow 0.$$

To conclude we check that the cup product is a non degenerate bilinear form. This follows from the fact that $H^2(S, \mathbf{Z})$ is free, as $\mathrm{rk}(H^2(S, \mathbf{Z})) = \mathrm{rk}(\mathrm{Hom}(\mathrm{H}^2(\mathrm{S}, \mathbf{Z}), \mathbf{Z}))$. □

The exponential exact sequence $0 \longrightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{2\pi i} \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \longrightarrow 0$ yields an exact sequence of cohomology groups:

$$H^1(S, \mathbf{Z}) \longrightarrow H^1(S, \mathcal{O}) \xrightarrow{\delta} H^1(S, \mathcal{O}^*) \longrightarrow H^2(S, \mathbf{Z}) \longrightarrow H^2(S, \mathcal{O}) \tag{1.12}$$

where δ is the connecting homomorphism. For a holomorphic line bundle $L \in H^1(S, \mathcal{O}^*)$, one has $\delta(L) = c_1(L)$ the first Chern class of L (see [BPV84]).

Lemma 1.2.22.

$$H^2(S, \mathcal{O}) \cong 0 \tag{1.13}$$
$$H^1(S, \mathcal{O}) \cong \mathbf{C} \tag{1.14}$$

Proof.

The first isomorphism is a direct computation using the Mayer-Vietoris exact sequence and the fact that $H^2(A_\varepsilon, \mathcal{O}) = H^2(\widehat{B}, \mathcal{O}) = 0$.

For Equation (1.14), we use the general fact that on any non Kähler surface one has $h^{0,1} = h^{1,0} + 1$ and $h^{0,1} + h^{1,0} = b_1$. As $b_1 = 1$ we infer $h^{1,0} = \dim_{\mathbf{C}} H^1(S, \mathcal{O}) = 1$. One can alternatively use Mayer-Vietoris exact sequence. □

We summarize our result in the following proposition:

Proposition 1.2.23. *Let* $\mathrm{Pic}^0(S) := H^1(S, \mathcal{O})/H^1(S, \mathbf{Z})$ *be the group of topologically trivial holomorphic line bundles on* S*. Then we have the following exact sequence*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}^0(S) \cong \mathbf{C}/\mathbf{Z} \longrightarrow \mathrm{Pic}(S) \xrightarrow{c_1} H^2(S, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}^n \longrightarrow 0. \tag{1.15}$$

For any divisor V on S, we let $\mathcal{O}(V)$ be the natural holomorphic line bundle associated to it. This bundle $\mathcal{O}(V)$ admits a meromorphic section whose divisor is exactly V. Conversely, if $L \in \mathrm{Pic}(S)$ admits a meromorphic section s and V denotes the divisor associated to s then L is isomorphic to $\mathcal{O}(V)$.

Take $V_1, V_2 \subset S$ two divisors. One has the following compatibily result:

$$V_1 \cdot V_2 =< c_1(\mathcal{O}(V_1)), c_1(\mathcal{O}(V_2)) >,$$

where $V_1 \cdot V_2$ denotes the intersection product.

We can now describe the structure of $\mathrm{Pic}(S)$ for an intermediate Kato surface.

Theorem 1.2.24. *Let* S *be an intermediate Kato surface with* $b_2(S) = n$*. Let* $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n$ *be the* n *rational curves on* S*, and* $M(S)$ *be the matrix of intersection of the rational curves. Then*

1. *The* n *cohomology classes* $c_1(\Gamma_1), \cdots, c_1(\Gamma_n)$ *generate* $H^2(S, \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Q}$.

2. *The intersection form* $<,>$ *on* $H^2(S, \mathbf{Z})$ *is negative definite and unimodular.*

3. *Let* $\Lambda := \oplus_{i=1}^n \mathbf{Z}.c_1(\Gamma_i)$*. Then*

$$H^2(S, \mathbf{Z})/\Lambda \cong \mathbf{Z}/\sqrt{|\det M(S)|}\mathbf{Z}. \tag{1.16}$$

4. $\det M(S) = (-1)^n (p-1)^2$.

5. *There exists a basis* $e_1, \cdots, e_n$ *of* $H^2(S, \mathbf{Z})$ *s.t.* $< e_i, e_j >= -\delta_{ij}$.

-2 -1

1 *2*

Figure 1.4: $p = 2$: the dual graph for $n = 2$.

-2 -2 -2 -2 -3

1 *2* *3* $n - 1$ n

Figure 1.5: $p = 2$: the dual graph for $n \geq 3$.

Remark : One deduces from the Theorem that the only intermediate Kato surfaces $S = S(f)$ for which $H^2(S, \mathbf{Z}) = \Lambda$ are those with $p = 2$ i.e. $f = (z^2, \lambda w z^q + z^r + \cdots)$. By replacing f by a well-chosen $\mathfrak{S}^k(f)$ for some $k \geq 0$, one can assume that $r = 1$ i.e. $f = (z^2, \lambda w z^q + z + \cdots)$. In this case one can describe explicitely the sequence of blow-ups to resolve f as in the proof of Proposition 1.2.8. We deduce from it that the matrix $M(S)$ is completely determined. The dual graph of the n curves in Γ is described in figures 1.4 and 1.5. Each tranverse intersection between Γ_i and Γ_j (i and j are not necessary distinct) produces an arrow between the corresponding edges. We labeled the curves $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \cdots, \Gamma_{n-1}, \Gamma_n$ in italic and we put above each corresponding edge the corresponding self-intersection. ♦

Remark : In the case of a Kato surface S with $\mathrm{tr}(S) \neq 0$ one obtains an orthogonal representation (with respect to the cup product)

$$H^2(S, \mathbf{Z}) = \Lambda \bigoplus \mathbf{Z} \cdot \frac{1}{n} c_1(T_{\mathcal{F}}),$$

where $T_{\mathcal{F}}$ is the tangent bundle of the unique foliation on S (see [DO98]).

In the case of Inoue-Hirzebruch surfaces $S = S(z^a w^b, z^c w^d)$, (see [D88-2])

$$H^2(S, \mathbf{Z})/\Lambda \cong (\mathbf{Z} + i\mathbf{Z}) \,/\, ((a + ib)\mathbf{Z} + (c + id)\mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}/p_1\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/p_2\mathbf{Z},$$

with $p_1 p_2 = 1 - (a + d) + (ad - bc)$. ♦

We postpone the proof of the theorem to the end of this subsection. To complete the picture let us discuss now in some details $\mathrm{Pic}^0(S)$.

The group $H^1(S, \mathbf{C}^*)$ represents the group of holomorphic line bundles which admits a flat hermitian metric. In particular the first Chern class of any line bundle $L \in H^1(S, \mathbf{C}^*)$ is zero and $H^1(S, \mathbf{C}^*) \subset \mathrm{Pic}^0(S)$. We will see that they are in fact equal.

We define on S the open covering $\mathcal{U} := \{U_1, U_2\}$ (see figure 1.6) where:

- $U_1 := \widehat{\varpi}\left(\Pi^{-1}((1-\varepsilon)B) \setminus \overline{\sigma((1-\varepsilon)B)}\right)$;
- $U_2 := \widehat{\varpi}\left(\widehat{B} \setminus \overline{\sigma(B)}\right)$.

The intersection $U_1 \cap U_2$ is a disjoint union of a shell $V := \widehat{\varpi}\left(\Pi^{-1}A_\varepsilon\right)$ and a open subset $W := \widehat{\varpi}\left(\Pi^{-1}((1-\varepsilon)B) \setminus \overline{\sigma(B)}\right)$.

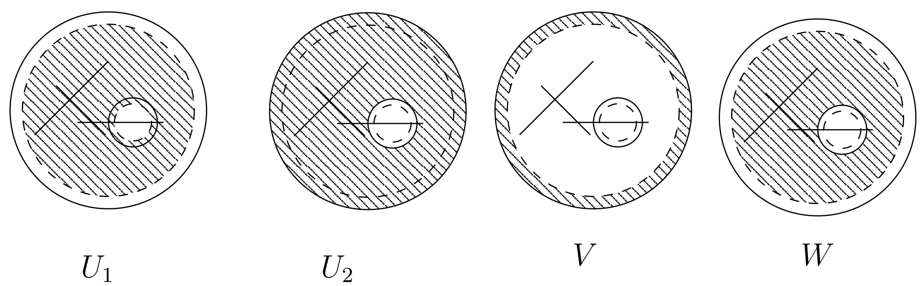

Figure 1.6: The covering $\mathcal{U}$ of S.

Definition 1.2.25. *For each $\beta \in \mathbf{C}^*$, we define the holomorphic line bundle $L_\beta \in H^1(\mathcal{U}, \mathbf{C}^*) \subset H^1(S, \mathbf{C}^*)$ by the cocycle*

$$n_{12} = \begin{cases} \beta \in V \\ 1 \in W \end{cases}$$

Equivalently, L_β is the disjoint union $U_1 \times \mathbf{C}$ with $U_2 \times \mathbf{C}$ patched together by the equivalence relation if $z \in W$ and $t \in \mathbf{C}$ then $(z,t) \sim (z,t)$, and if $z \in V$ and $t \in \mathbf{C}$ then $(z,t) \sim (z, \beta t)$.

Proposition 1.2.26. *([DO98])*
(1) The morphism $L_\bullet : \beta \to L_\beta$ and $\imath : H^1(\mathcal{U}, \mathbf{C}^*) \to H^1(S, \mathbf{C}^*)$

$$\mathbf{C}^* \xrightarrow[L_\bullet]{\cong} H^1(\mathcal{U}, \mathbf{C}^*) \xrightarrow{\cong} H^1(S, \mathbf{C}^*)$$

are group isomorphisms.
(2) The natural inclusion $H^1(S, \mathbf{C}^*) \overset{\cong}{\hookrightarrow} \mathrm{Pic}^0(S)$ is an isomorphism.

We refer to [DO98] for a proof.
Proof. Theorem 1.2.24
By Theorem 1.2.10, the matrix

$$M(S) := (\Gamma_i \cdot \Gamma_j) = (< c_1(\mathcal{O}(\Gamma_i)), c_1(\mathcal{O}(\Gamma_j)) >)$$

is negative definite. It follows that the $\{c_1(\mathcal{O}(\Gamma_i))\}_{i=1,\cdots,n}$ are free over the module $H^2(S, \mathbf{Z})$. Whence they generate $H^2(S, \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Q}$. This implies that

$<,>$ is also negative definite on $H^2(S,\mathbf{Z})$ and the second assertion follows from Lemma 1.2.21.

As the set $\{c_1(\mathcal{O}(\Gamma_i))\}_{i=1,\cdots,n}$ is free, the subgroup $\Lambda = \oplus_{i=1}^n \mathbf{Z}\cdot c_1(\Gamma_i)$ is a sublattice of $H^2(S,\mathbf{Z})$ of maximal rank n. Hence $H^2(S,\mathbf{Z})/\Lambda$ is a finite abelian group. Moreover as $(H^2(S,\mathbf{Z}),<,>)$ is unimodular, we have

$$\mathrm{Card}(H^2(S,\mathbf{Z})/\Lambda)^2 = |\det M(S)|. \tag{1.17}$$

To conclude one has to look carefully at some Mayer-Vietoris exact sequences. Recall that $S = S(f)$ with $f = \Pi\sigma$ where $\Pi : \widehat{B} \to B$ is a finite tower of point blow-up above 0 and $\sigma : B \to \widehat{B}$ is injective. We have in coordinates $f(z,w) = (z^p, \lambda w z^q + P(z))$ so that the critical set $\mathcal{C}(f) = \{z = 0\}$ is irreducible.

For any $\varepsilon > 0$, we define the followings open sets $\widehat{B}_\varepsilon := \Pi^{-1}((1-\varepsilon)B)$, $\mathrm{Ann}_\varepsilon(f) := \widehat{B}_{\varepsilon/2} \setminus \sigma((1-\varepsilon/2)B)$, $A_\varepsilon := B \setminus (1-\varepsilon)B$.

Decompose $\widehat{B}_{\varepsilon/2} = \mathrm{Ann}_\varepsilon(f) \cup \sigma(B)$, denote by $\imath_\varepsilon : \mathrm{Ann}_\varepsilon(f) \hookrightarrow \widehat{B}_{\varepsilon/2}$ and $\imath_\sigma : \sigma(B) \hookrightarrow \widehat{B}_{\varepsilon/2}$ the inclusion maps and apply the Mayer-Vietoris exact sequence. We have $\mathrm{Ann}_\varepsilon(f) \cap \sigma(B) = \sigma(A_{\varepsilon/2})$ hence

$$\begin{tikzcd} H^1(\sigma(A_{\varepsilon/2}),\mathbf{Z}) \arrow[r] & H^2(\widehat{B}_{\varepsilon/2},\mathbf{Z}) \arrow[d, "\imath_\varepsilon^*\oplus\imath_\sigma^*"] & \\ & H^2(\mathrm{Ann}_\varepsilon(f),\mathbf{Z}) \oplus H^2(\sigma(B),\mathbf{Z}) \arrow[r] & H^2(\sigma(A_{\varepsilon/2})) \end{tikzcd}$$

One obtains that the restriction map $\imath_\varepsilon^* : H^2(\widehat{B}_{\varepsilon/2},\mathbf{Z}) \to H^2(\mathrm{Ann}_\varepsilon(f),\mathbf{Z})$ induces an isomorphism.

In a similar way, we decompose $S = \mathrm{Ann}_\varepsilon(f) \cup A_\varepsilon$ and the Mayer-Vietoris exact sequence again gives that the inclusion map $\widehat{\imath}_\varepsilon : \mathrm{Ann}_\varepsilon(f) \to S$ induces an isomorphism between cohomology groups $\widehat{\imath}_\varepsilon^* : H^2(S,\mathbf{Z}) \to H^2(\mathrm{Ann}_\varepsilon(f),\mathbf{Z})$.

The cohomology group $H^2(\widehat{B}_{\varepsilon/2},\mathbf{Z})$ is generated by the classes of the exceptional curves (see [BPV84] p.28) i.e. $H^2(\widehat{B}_{\varepsilon/2},\mathbf{Z}) = \oplus_{i=1}^n \mathbf{Z}\cdot c_1(\mathcal{O}(E_i))$, therefore

$$H^2(\mathrm{Ann}_\varepsilon(f),\mathbf{Z}) = \oplus_{i=1}^{n-1}\mathbf{Z}\cdot c_1(\mathcal{O}(E_i)) \oplus \mathbf{Z}\cdot c_1(\mathcal{O}(E_n \cap \mathrm{Ann}_\varepsilon(f))), \tag{1.18}$$

and

$$H^2(S,\mathbf{Z}) = \oplus_{i=1}^{n-1}\mathbf{Z}\cdot \widehat{\imath}_\varepsilon^* c_1(\mathcal{O}(E_i)) \oplus \mathbf{Z}\cdot \widehat{\imath}_\varepsilon^* c_1(\mathcal{O}(E_n \cap \mathrm{Ann}_\varepsilon(f))). \tag{1.19}$$

Let us compute the pull-back by $\widehat{\imath}_\varepsilon^*$ of the generators of $H^2(S,\mathbf{Z})$.

Chern classes are functorial hence $\widehat{\imath}_\varepsilon^* c_1(\mathcal{O}(\Gamma_i)) = c_1(\mathcal{O}(\widehat{\imath}_\varepsilon^*\Gamma_i))$. The set $\sigma(B)$ avoids $\cup_{i=1}^{n-1} E_i$ because $\mathcal{C}(f)$ is irreducible, hence for $1 \le i \le n-1$,

$$\widehat{\imath}_\varepsilon^* c_1(\mathcal{O}(\Gamma_i)) = c_1(\mathcal{O}(E_i)).$$

For $i = n$, we have

$$\widehat{\imath}_\varepsilon^* c_1(\mathcal{O}(\Gamma_n)) = c_1(\mathcal{O}(E_n \cap \mathrm{Ann}_\varepsilon(f))) + c_1(\mathcal{O}(\mathcal{C})) \tag{1.20}$$

where $\mathcal{C}$ is the proper transform of the critical set $[z = 0]$ by Π. Let $a_i \in \mathbf{N}$ be s.t. $\Pi^*[z = 0] = \mathcal{C} + \sum_{i=1}^n a_i E_i$. As $f = \Pi\sigma = (z^p, \star)$ we infer

$$\begin{aligned} \sigma^*(\Pi^*[z = 0]|_{\sigma(B)}) &= \sigma^*(a_n[E_n \cap \sigma(B)]) = a_n[z = 0] \\ &= f^*[z = 0] = p[z = 0], \end{aligned}$$

hence $a_n = p$. In $\widehat{B}_{\varepsilon/2}$, we have

$$0 = c_1(\mathcal{O}(\Pi^*[z = 0])) = c_1(\mathcal{O}(\mathcal{C})) + pc_1(\mathcal{O}(E_n)) + \sum_{i=1}^{n-1} a_i c_1(\mathcal{O}(E_i)),$$

therefore by restriction on $\mathrm{Ann}_\varepsilon(f)$, we obtain

$$c_1(\mathcal{O}(\mathcal{C})) = -pc_1(\mathcal{O}(E_n \cap \mathrm{Ann}_\varepsilon(f))) - \sum_{i=1}^{n-1} a_i c_1(\mathcal{O}(E_i)).$$

Together with Equation (1.20) this shows that

$$\widehat{\imath}_\varepsilon^* c_1(\mathcal{O}(\Gamma_n)) = (1 - p)c_1(\mathcal{O}(E_n \cap \mathrm{Ann}_\varepsilon(f))) - \sum_{i=1}^{n-1} a_i c_1(\mathcal{O}(E_i)).$$

We conclude

$$\widehat{\imath}_\varepsilon^* \Lambda = \mathbf{Z} \cdot (1 - p)c_1(\mathcal{O}(E_n \cap \mathrm{Ann}_\varepsilon(f)) \oplus_{i=1}^{n-1} \mathbf{Z} \cdot c_1(\mathcal{O}(E_i)),$$

and

$$H^2(S, \mathbf{Z})/\Lambda \cong \mathbf{Z}/(p - 1)\mathbf{Z}.$$

Together with Equation (1.17), this gives $\det(M) = \pm(p - 1)^2$. Finally, the sign of $\det(M)$ is $(-1)^n$ as M is definite negative of size n.

Note that $(\widehat{\imath}_\varepsilon^*)^{-1} \circ \imath_\varepsilon^* : H^2(\widehat{B}_{\varepsilon/2}, \mathbf{Z}) \to H^2(S, \mathbf{Z})$ gives an isomorphism which preserves the cup product. One checks by induction on n that there exists a basis of $H^2(\widehat{B}_{\varepsilon/2}, \mathbf{Z})$ of the form $e_1 = c_1(\mathcal{O}(E_1)), e_i = c_1(\mathcal{O}(E_i)) - \sum_{j<i} a_j c_1(\mathcal{O}(E_j))$, with $a_j \in \{0, 1\}$ so that $< e_i, e_j >= -\delta_{ij}$. This concludes the proof of the theorem. $\square$

1.2.5 The anti-canonical line bundle.

On a complex surface S, the canonical line bundle is defined by $K_S := \det(T^*S) = \bigwedge^2(T^*S)$ where T^*S is the cotangent bundle of S. The rate of growth of $H^0(K_S^l)$ for $l \to \infty$ is a fundamental invariant in the classification of compact complex surfaces known as the Kodaira dimension of S. More precisely, one defines

$$\kappa(S) := \limsup_{l\to\infty} l^{-1} \log \dim H^0(S, K_S^l).$$

In our case $\kappa(S) = -\infty$.

We consider negative powers of the canonical bundle K_S^{-k}(k-anticanonical bundles). We ask when such a bundle admits non-zero holomorphic sections. When it is the case, there exists non-negative integers $k_1, \cdots, k_n$ s.t. $K_S^{-k} = \otimes_{i=1}^n \mathcal{O}(\Gamma_i)^{k_i}$. In general it may not happen for any $k \in \mathbf{N}$. However Theorem 1.2.24 shows that we can always find an integer k s.t. $c_1(K_S^{-k}) \in \Lambda$. By Propositions 1.2.23 and 1.2.26 we can find a flat line bundle L_β and integers k_i s.t. $K_S^{-k} = L_\beta \otimes_{i=1}^n \mathcal{O}(\Gamma_i)^{k_i}$.

Let us precise these considerations. Our method relies again on the normal form of f and is merely computational. It will give some geometric interpretation of the two quantities $\tau(f) := (p-1)/\gcd\{(p-1), q\}$ and $\lambda^{\tau(f)}$.

We can state the following theorem:

Theorem 1.2.27.

Let S be a minimal intermediate Kato surface. Then there exists a unique couple $\tau_S \in \mathbf{N}^*$, $\alpha_S \in \mathbf{C}^*$, s.t.

$$\dim_{\mathbf{C}} H^0(S, K_S^{-k} \otimes L_\beta) = \begin{cases} 1 \text{ if } k = \tau_S \times j \text{ with } j \in \mathbf{N} \text{ and } \beta = (p^{\tau_S}\alpha_S)^j, \\ 0 \text{ otherwise.} \end{cases}$$

If $S = S(f)$ with $f = (z^p, \lambda w z^q + P(z))$, one has $\tau_S = (p-1)/\gcd\{(p-1), q\}$, and $\alpha_S = \lambda^{\tau_S}$.

Corollary 1.2.28. *There exists n positive integers $k_1, \cdots, k_n \geq 1$ s.t.*

$$K_S^{-\tau_S} = L_{p^{-\tau_S}\alpha_S^{-1}} \otimes_{i=1}^n \mathcal{O}(\Gamma_i)^{k_i}.$$

Proof. Theorem 1.2.27

Assume first the following lemma.

Lemma 1.2.29.

$$H^0(S, K_S^{-k} \otimes L_\beta) \cong \left\{ \phi \in \mathcal{O}(\Delta \times \mathbf{C}) \text{ s.t. } \phi \circ f(Z) = \frac{1}{\beta}(\det f_Z)^k \phi(Z) \right\}$$

Take ϕ as in Lemma 1.2.29. Because of its functional equation and Propostion 1.1.4, ϕ vanishes at 0 and its zero set is exactly $\{z = 0\}$. We can thus write $\phi(Z) = Cz^l(1 + \psi(Z))$ for some $l \geq 1$ and some $\psi \in \mathfrak{M}$. Using again the functional relation, this implies $(p-1)l = k(p+q-1)$, $\beta = (\lambda p)^k$, and we infer $\psi \circ f = \psi$. Finally, we get $\phi(Z) = Cz^{k(1+\frac{q}{p-1})}$ which solves our problem iff $k = \tau(f) \times j$ for some $j \in \mathbf{N}$, and $\beta = (\lambda p)^{\tau(f)j}$. $\square$

Let us prove now Lemma 1.2.29.

Proof. Lemma 1.2.29

Take a section $\phi \in H^0(S, K_S^{-k} \otimes L_\beta)$. It is defined in the covering $\mathcal{U}$ by two k anti-canonical divisors $\omega_i \in \mathcal{O}^*(U_i)$. They satisfy the relations

$$\begin{cases} \omega_2 = \omega_1 \text{ on } W \\ \omega_2 = \beta f^* \omega_1 \text{ on } \pi^{-1} A_\varepsilon \end{cases}$$

We can thus extend ω_2 to a k anti-canonical divisor on $\widehat{B} - \widehat{0}$, hence on $\widehat{B}$ satisfying the relation $\omega_2 = \beta f^* \omega_2$. We push it down to B, and extend it through 0. We finally get a k anti-canonical divisor ω_2 together with the property $\omega_2 = \beta f^* \omega_2$. For k anti-canonical divisors $\omega = \phi(dz \wedge dw)^{-k}$, this exactly means

$$\phi = \beta(\det Df_Z)^{-k} \phi \circ f \ .$$

$\square$

Note that in the notations of Corollary 1.2.28, we have $k_n = \tau_S(1 + q/(p-1))$.

1.2.6 Foliation and vector fields

In this subsection we study existence and uniqueness of holomorphic foliations on S.

We let $\Omega^1(\log\Gamma)$ be the sheaf of meromorphic 1-forms with poles along the divisor Γ and Θ be the sheaf of holomorphic vector fields on S.

Theorem 1.2.30. *([DO98] Theorem 4.11 and 5.4)*

Let S be a minimal intermediate Kato surface defined by the germ of the fourth class $f(z,w) = (z^p, \lambda z^q w + P(z))$.

There exists a unique foliation $\mathcal{F}$ on S. This foliation $\mathcal{F}$ is defined by a section $\omega \in H^0(S, \Omega^1(\log\Gamma)\otimes L_p)$, and we have $[\omega] = -\sum_{i=1}^n [\Gamma_i]$.

The foliation is defined by a holomorphic vector field in the following cases. Note that a partial answer has been given in [DO98] in a simple case. We give here a complete answer.

Theorem 1.2.31.

Let S be as above. Recall that f is special iff $\tau := (p-1)/\gcd\{p-1, q\} = 1$ and $\lambda = 1$.

There exists a holomorphic vector field on S iff f is special. More precisely

$$\dim_{\mathbf{C}} H^0(S, \Theta\otimes L_\beta) = \begin{cases} 1 & \text{if } \tau = 1 \text{ and } \beta = \lambda, \\ 0 & \text{otherwise}; \end{cases}$$

or in an equivalent way,

$$\dim_{\mathbf{C}} H^0(S, \Theta\otimes L_\beta) = \dim_{\mathbf{C}} H^0(S, K_S^{-1}\otimes L_{p\beta}). \tag{1.21}$$

Remark : As we will see in the proof, Equation (1.21) follows essentially from the isomorphism $K_S \cong T^*_{\mathcal{F}} \otimes N^*_{\mathcal{F}}$ where $T^*_{\mathcal{F}}$ (resp. $N^*_{\mathcal{F}}$) is the cotangent (resp. conormal) bundle to the foliation. ♦

We can describe precisely the geometry of $\mathcal{F}$.

Theorem 1.2.32.

1. *The singularities of the foliation $\mathcal{F}$ are exactly the n intersection points of the irreducible components of Γ.*

2. *Each irreducible component defines a leaf of $\mathcal{F}$.*

3. *Any leaf L distinct from Γ is isomorphic to $\mathbf{C}$, and its closure in S contains Γ.*

Let us describe for sake of completeness the structure of the closure of a non-compact leaf without proof. We refer to [DO98] for a detailed treatment.

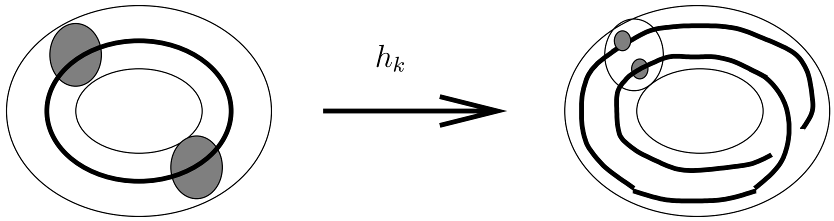

Figure 1.7: Solenoid of degree 2.

Definition 1.2.33. *View S^3 as a one point compactification of $\mathbf{C}^2$, and embedd the torus $\mathbf{T} := \Delta \times S^1 \hookrightarrow \mathbf{C}^2 \to S^3$.*

Let $h_k : \mathbf{T} \to \mathbf{T}$ be a sequence of injective $\mathcal{C}^1$-mappings of the form

$$h_k(e^{i\theta}, w) := (e^{ip\theta}, g_k(e^{i\theta}, w)),$$

with $\sup_{\mathbf{T},k} |\partial g_k / \partial w| \leq \varepsilon$ for some $0 < \varepsilon \ll 1$. Each map h_k wraps $\mathbf{T}$ p-times around itself.

We define the compact set

$$\Sigma_p(\{h_k\}) := \bigcap_{j \geq 0} h_j \circ h_{j-1} \circ \cdots \circ h_1(\mathbf{T}).$$

It is called a solenoid.

By an abuse of notations, we let Σ_p be a solenoid defined by some sequence of mappings as above.

Define $\check{G}(z, w) := \log |z|$ on $\Delta^* \times \mathbf{C}$ with values in $\mathbf{R}_-^*$. We have the invariance property $\check{G} \circ f = p\check{G}$ hence $\check{G}$ defines a real analytic function $G : S \backslash \Gamma = \Delta^* \times \mathbf{C}/f \longrightarrow \mathbf{R}_-^*/\{x \sim px\} \cong S^1$. This function is a submersion. Take L any non-compact leaf of $\mathcal{F}$. By definition $G|_L$ is constant, and we easily see that $G^{-1}\{G(L)\} = \overline{L} \setminus \Gamma$. One shows more precisely the following theorem.

Theorem 1.2.34. *[DO98]*

The function $G : S \setminus \Gamma \to S^1$ defined above is a real-analytic submersion.

- *For any non-compact leaf L, we have*

$$\overline{L} \setminus \Gamma = G^{-1}\{G(L)\}.$$

- *Each fiber $G^{-1}\{\xi\}$ is homeomorphic to $S^3 \setminus \Sigma_p$ where Σ_p is a solenoid embedded in the 3-sphere as in Definition 1.2.33.*

Remarque: The precise topological structure of the embedding of Σ_p into S^3 depends on p, q and the coefficients of P. In the case of Henon mappings of degree 2, it was described in [HO94]. ♦

The rest of this subsection is devoted to the proof of the two Theorems 1.2.31 and 1.2.32.

Proof. Theorem 1.2.31

Existence.

Let us begin by the construction of $\mathcal{F}$. The holomorphic foliation $dz = 0$ on B is f-invariant. We can hence pull it back to $\widehat{B}$. It defines a holomorphic foliation $\widehat{\mathcal{F}}$ which is compatible with the patching defining $S = S(f)$. By projection, this gives $\mathcal{F}$.

The meromorphic 1-form $\omega_0 := z^{-1}dz$ satisfies the invariance relation $f^*\omega_0 = p\omega_0$. Define $\widehat{\omega} := \Pi^*\omega_0$. This is a meromorphic 1-form with poles along $\Pi^{-1}(0) \cup \sigma(\mathcal{C}(f))$ and such that $\widehat{f}^*\widehat{\omega} = p\widehat{\omega}$. This exactly means that the projection ω of $\widehat{\omega}$ in S is well defined and that $\omega \in H^0(S, \Omega^1(\log \Gamma) \otimes L_p)$. Moreover one checks by induction on that the divisor $[\widehat{\omega}] = -\sum_{i=1}^n [E_i]$, hence $[\omega] = -\sum_{i=1}^n [\Gamma_i]$.

Uniqueness.

Let $\mathcal{G}_S$ be a holomorphic foliation on S. By restriction, it induces a foliation $\widehat{\mathcal{G}}$ on $\widehat{B} - \sigma((1-\varepsilon)B)$ which is invariant under $\sigma\Pi$. We can thus extend it to $\widehat{B} \setminus \widehat{0}$, and pull it back to $\widehat{B} \setminus \{0\}$ by σ. We extend it to B. This defines a foliation $\mathcal{G}$ on the ball B invariant under f. It is given by a global holomorphic 1-form $\omega = h_1 dz + h_2 dw$ with $h_1^{-1}(0) \cap h_2^{-1}(0) = 0$. As $\mathcal{G}$ is f-invariant, there exists a holomorphic function ϕ such that $f^*\omega = \phi \cdot \omega$ i.e.

$$\phi(Z)h_1(Z) = pz^{p-1}h_1 \circ f(Z) + h_2 \circ f(Z)(\lambda q z^{q-1} + P'(z)) \quad (1.22)$$
$$\phi(Z)h_2(Z) = \lambda z^q h_2 \circ f(Z) \quad (1.23)$$

If $h_2(0) \neq 0$, $\mathcal{G}$ is regular at 0. The leaf L passing through 0 is a regular, f-invariant curve transverse to $z = 0$, which is not possible by Proposition 1.1.4.

Assume $h_2(0) = 0$ but $h_2 \not\equiv 0$. We will show it is impossible. The curve $V := h_2^{-1}(0)$ is also f-invariant. So we can assume that $h_2(Z) = z^k$ for some integer $k \geq 1$ by Proposition 1.1.4. In particular we get $\phi(Z) = \lambda z^{q+(p-1)k}$.

We now use Theorem 3. p.515 and Proposition p.519 of [MM80] combined with the fact that f is Dloussky.

There exists a composition $\widetilde{\Pi}$ of point blow-ups above 0 s.t. the first order jet of $\Pi^*\omega$ in some coordinate chart (x, y) has one of the following form:

$$(\Pi^*\omega)_1 = \lambda_1 y dx - \lambda_2 x dy \qquad \text{with } \lambda_1\lambda_2 \neq 0,\ \lambda_1/l_2 \notin \mathbf{N},\ \lambda_2/\lambda_1 \notin \mathbf{N};$$
$$(\Pi^*\omega)_1 = x dy.$$

As $f = \Pi \circ \sigma$ is Dloussky, by taking a sufficiently high iterate of f, we infer that the jet of first order of ω itself has of one of the two forms above in some coordinates (x, y). In the first case, ω admits two transverse invariant curves which is impossible by Proposition 1.1.4. We are hence in the second case. By Théorème 2 p. 522 of [MM80], we can assume that $\{y = 0\}$ is an integral curve of the foliation ω passing through the origin, which implies again by Proposition 1.1.4 that $\{y = 0\} = \{z = 0\}$. One can hence choose $y \sim z$ and $x \sim w + Cz$ for some constant $C \in \mathbf{C}$. It follows $h_1(z, w) = w + Cz + O(|z|^2 + |w|^2)$ and $h_{1w}(0) \neq 0$.

Differentiate now Equation (1.22) with respect to w. One obtains

$$z^{(p-1)k} h_{1w}(Z) = pz^{p-1} h_{1w}(f(Z)) + qz^{pk-1}, \tag{1.24}$$

hence $p - 1 = \min\{(p - 1)k, pk - 1\}$ and $k = 1$. Equation (1.24) can be rewritten under the form

$$h_{1w} - ph_{1w} \circ f = q.$$

This implies that $h_1(z, w) = q(1 - p)^{-1} w + \tilde{h}(z)$ for some $\tilde{h} \in \mathfrak{M}$. Finally, we inject again h_1 in Equation (1.17) to get

$$\lambda z^q \tilde{h}(z) - p\tilde{h}(z^p) = zP'(z) + \frac{qp}{1 - p} P(z)\ . \tag{1.25}$$

Now f is strict hence P has a special form, namely it contains a monomial $a_r z^r$ with $a_r \neq 0$, $r \leq q$ and r not divisible by p. Looking at Equation (1.25), we get $0 = (r + (1 - p)^{-1} qp)a_r$ which is a contradiction.

We have proved that $h_2 \equiv 0$ hence $\mathcal{G}$ is defined by $dz = 0$. This concludes the proof of the uniqueness of $\mathcal{F}$. $\square$

Proof. Theorem 1.2.31

We give two different proofs of the theorem. The first one is a direct computation as in the proof of Theorem 1.2.27. The second is more conceptual.

First proof:

In a similar way to Lemma 1.2.29 we have:

Lemma 1.2.35.

$$H^0(S, \Theta \otimes L_\beta) \cong \{\Xi \in \Theta(\Delta \times \mathbf{C})\ s.t.\ Df \cdot \Xi(Z) = \beta\ \Xi(f(Z))\}$$

We are thus reduced to look for vector fields in $\Delta \times \mathbf{C}$, $\Xi = a_1 \frac{\partial}{\partial z} + a_2 \frac{\partial}{\partial w}$ satisfying $Df \cdot \Xi = \beta \Xi \circ f$.

The vector field Ξ defines a holomorphic foliation on S which is equal to $\mathcal{F}$ by Theorem 1.2.30, hence $a_1 \equiv 0$. We infer

$$\lambda z^q a_2(Z) = \beta a_2 \circ f(Z) \tag{1.26}$$

By differentiating with respect to w, we see that a_2 only depends on the z variable. Hence $\beta = \lambda$ and $p - 1|q$ (or equivalently $\tau(f) = 1$), and we obtain $a_2(Z) = Cz^{q/p-1}$ with $C \in \mathbf{C}$ finishing the proof of Theorem 1.2.31.

Second proof: We prove Equation (1.21) and conclude using Theorem 1.2.27.

Let $T_{\mathcal{F}}$ (resp. $N_{\mathcal{F}}$) be the tangent (resp. normal) bundle associated to the foliation. We refer to [Bn97] for definitions and basics on these line bundles. The fact that $\mathcal{F}$ is generated by a (p-twisted) meromorphic 1-form with poles of order 1 on each Γ_i means precisely that the conormal bundle

$$N^*_{\mathcal{F}} \cong L_p \otimes_{i=1}^n \mathcal{O}([\Gamma_i])^{-1}.$$

In a similar way, $\mathcal{F}$ is generated by a (β-twisted) holomorphic vector field $\Xi \in H^0(S, \Theta \otimes L_\beta)$ iff $T_{\mathcal{F}} \cong L_\beta \otimes_{i=1}^n \mathcal{O}([\Gamma_i])^{k_i}$, for some integers $k_i \in \mathbf{N}$. On the other hand, we have a natural duality $K_S^{-1} \cong (T^*_{\mathcal{F}} \otimes N^*_{\mathcal{F}})^* \cong T_{\mathcal{F}} \otimes N_{\mathcal{F}}$.

Assume $\dim H^0(S, \Theta \otimes L_\beta) \geq 1$. Any non-zero section defines the foliation $\mathcal{F}$ by the uniqueness Theorem 1.2.30. We infer $T_{\mathcal{F}} \cong L_\beta \otimes_{i=1}^n \mathcal{O}([\Gamma_i])^{k_i}$ for some integers k_i and by duality

$$K_S^{-1} \cong T_{\mathcal{F}} \otimes N_{\mathcal{F}} \cong L_{p^{-1}\beta} \otimes_{i=1}^n \mathcal{O}([\Gamma_i])^{k_i+1}.$$

Conversely assume $\dim H^0(S, K_S^{-1} \otimes L_{p\beta^{-1}}) \geq 1$. Then by Corollary 1.2.28 we infer

$$K_S^{-1} \cong L_{p^{-1}\beta} \otimes_{i=1}^n \mathcal{O}(\Gamma_i)^{l_i},$$

for some positive integers $l_i \geq 1$. By duality

$$T_{\mathcal{F}} \cong K_S^{-1} \otimes N_{\mathcal{F}}^{-1} \cong L_\beta \otimes_{i=1}^n \mathcal{O}([\Gamma_i])^{l_i - 1},$$

and $T_{\mathcal{F}} \otimes L_{\beta^{-1}}$ admits a holomorphic section. Hence we have $\dim(H^0(S, \Theta \otimes L_\beta)) \geq 1$.

To conclude, we notice that for any line bundle L, $\dim H^0(S, L) \leq 1$ as S does not carry any non-constant meromorphic functions, and that $\dim H^0(S, \Theta \otimes L_\beta) \leq \dim H^0(S, T_{\mathcal{F}})$. □

Proof. Theorem 1.2.32.

The first and second assertions are easy to check. The foliation $\widehat{\mathcal{F}}$ is the pull-back by a tower of point blow-ups Π above 0 of the regular foliation $dz = 0$ on B. By induction on the number of blow-ups, one easily sees that all exceptional curves E_i are leaves for $\widehat{\mathcal{F}} := \Pi^*\{dz = 0\}$ and that the singular points of $\widehat{\mathcal{F}}$ are exactly the intersections $E_i \cap E_j$ and the intersection of the proper transform of $\mathcal{C}(f)$ with $\Pi^*(0)$. At a singular point, in some coordinates $\Pi^*(dz) = d(z^\alpha w^\beta)$ for some integers α, β hence all singularities of $\widehat{\mathcal{F}}$ are of hyperbolic type. By projection onto S we get assertions 1 and 2 of the theorem.

For the third assertion pick a leaf L not contained in Γ. By Proposition 1.2.13 the leaf L is non compact. The set $\varpi^{-1}(L)$ is a countable union of leaves of the foliation $dz = 0$. Fix $\{z = c\} \cong \mathbf{C}$ one such leave. The map ϖ is injective on $\{z = c\}$ and L is non-compact, hence L is isomorphic to $\mathbf{C}$.

Moreover, $\overline{\varpi^{-1}(L)}$ contains the curve $\{z = 0\}$. If we blow-up the origin $\pi_1 : B_1 \to B$, we still keep the property $\overline{\pi_1^{-1}(\varpi^{-1}(L))} \supset \pi_1^{-1}\{z = 0\}$. By induction we infer that $\overline{\Pi^{-1}((\varpi^{-1}(L))} \supset \Pi^{-1}(0)$ hence $\overline{L}$ contains Γ. This concludes the proof. $\square$

1.2.7 Automorphism group of intermediate Kato surface.

In this section, we study holomorphic self maps and biholomorphisms of S. We start by the following proposition:

Proposition 1.2.36. *Any holomorphic surjective selfmap $\phi : S \circlearrowleft$ is an automorphism.*

Remark : For a Kato surface with non-zero trace, this result is still valid. However for Inoue-Hirzebruch surfaces, it is no longer true. ♦

Proof. Proposition 1.2.36.

Let $\phi : S \circlearrowleft$ be a surjective holomorphic map. For all $1 \leq i \leq n$, $\phi^{-1}(\Gamma_i)$ is a compact curve on S, hence $\phi^{-1}(\Gamma_i) \subset \Gamma$ by Proposition 1.2.13. As ϕ is surjective, for each $1 \leq i \leq n$ one can find an integer $k_i \in \{1, \cdots, n\}$ s.t. $\phi(\Gamma_{k_i}) = \Gamma_i$. The map $i \mapsto k_i$ is injective from $[\![1, n]\!]$ into itself hence surjective. We let $\phi(\Gamma_i) = \Gamma_{\phi(i)}$. The map ϕ induces a permutation on the (finite) set of irreducible components of Γ hence $\phi^{-1}(\Gamma_i) = \Gamma_{\phi^{-1}(i)}$. By taking an iterate of ϕ if necessary, we can assume that $\phi(\Gamma_i) = \Gamma_i = \phi^{-1}(\Gamma_i)$ for all i. In terms of divisors, we infer $\phi^*[\Gamma_i] = \gamma_i[\Gamma_i]$ for some integers $\gamma_i \geq 1$. We can use the functoriality of the cup product and we get

$$\begin{aligned}\phi^* \left(c_1(\mathcal{O}(\Gamma_i)) \cdot c_1(\mathcal{O}(\Gamma_j))\right) &= \phi^* \left([\Gamma_i] \cdot [\Gamma_j]\right) = \deg(\phi) \times [\Gamma_i] \cdot [\Gamma_j] \\ &= \phi^* c_1(\mathcal{O}(\Gamma_i)) \cdot \phi^* c_1(\mathcal{O}(\Gamma_j)) = \gamma_i \gamma_j \times [\Gamma_i] \cdot [\Gamma_j]\end{aligned}$$

On the other hand, we always have

$$\deg(\phi) = \deg(\phi|_{\Gamma_i}) \times \gamma_i.$$

To conclude we need one fact on the configuration of the compact curves. For an intermediate Kato surface, one shows (see Theorem 2.39 [D84]) that there exists a smooth rational curve $\Gamma_{i_0} \subset \Gamma$ s.t. either the set $A := \Gamma_{i_0} \cap \cup_{i \neq i_0} \Gamma_i$ contains three points, or $\mathrm{Card} A = 1$ and Γ_{i_0} has an ordinary double point singularity.

In both cases, the lift of ϕ to the normalization of Γ_{i_0} admits a totally invariant set which contains three distinct points. Therefore $(\phi|_{\Gamma_{i_0}})^3 = \mathrm{Id}$, and $\deg(\phi|_{\Gamma_{i_0}}) = 1$. We conclude that $\deg(\phi) = \gamma_{i_0} = \gamma_{i_0}^2 = 1$. □

The group structure of $\mathrm{Aut}(S)$ is not completely understood but we have the following theorem.

Theorem 1.2.37. *Let $S = S(f)$ be an intermediate Kato surface defined by the germ of the fourth class $f(z, w) = (z^p, \lambda z^q w + P(z))$.*

There exists an integer $k \geq 1$ s.t. the following exact sequence of groups holds:

$$0 \to \mathrm{Aut}(f) \to \mathrm{Aut}(S) \to \mathbf{Z}/k \to 0. \tag{1.27}$$

Let $l := \gcd\{p - 1,\ q,\ j_1 - j_2$ such that $a_{j_1} a_{j_2} \neq 0\}$.

- *If f is not special:*

$$\mathrm{Aut}(f) = \{(\zeta z, \xi w),\ \zeta^{p-1} = \zeta^q = 1,\ a_k(\zeta^k - \xi) = 0\}$$
$$\cong \mathbf{U}_l \text{ if } P \not\equiv 0;$$

- *If f is special:*

$$\mathrm{Aut}(f) = \{(\zeta z, \xi w + cz^\kappa)\ , \zeta \in \mathbf{U}_{p-1} \cap \mathbf{U}_q,\ a_k(\zeta^k - \xi) = 0,\ c \in \mathbf{C}\}$$
$$\cong \mathbf{C} \rtimes \mathbf{U}_l \text{ if } P \not\equiv 0.$$

In the last two cases, the action of $\mathbf{U}_l$ on $\mathbf{C}$ is given by $\zeta.z := \zeta^\kappa \times z$.

Remarque: The exact sequence 1.27 is given in [D88-2]. The automorphism group of non-zero trace Kato surfaces is direct product of $\mathrm{Aut}(f)$ with a cyclic group (see [DK96]). However in general, the automorphism group of an intermediate Kato surface is not a skew product. ♦

Proof.

Let $\phi \in \mathrm{Aut}(S)$. It acts on the set of curves $\{\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n\}$ as a bijection which preserves the natural action of $\mathbf{Z}/n$ given by $+1 \cdot \Gamma_i = +1 \cdot \varpi(E_i) := \varpi(E_{i+1})$. We hence have a natural morphism $\psi : \mathrm{Aut}(S) \to \mathbf{Z}/n$. Its range is a cyclic group isomorphic to $\mathbf{Z}/k$. To conclude we have to show that $\ker\psi$ is isomorphic to $\mathrm{Aut}(f)$.

Let $\phi \in \mathrm{Aut}(f)$ defined on the ball B and let $\widehat{\phi}$ be its lift to $\widehat{B}$. It commutes with $\widehat{f}$ and fixes all exceptional curves E_i. It hence defines an automorphism $\rho(\phi) \in \mathrm{Aut}(S) \cap \ker\psi$. the morphism ρ is injective.

Conversely, take $\phi \in \ker\psi$. It induces a bijection from $\widehat{B} \setminus \sigma(B)$ onto itself which is discontinuous on $\phi^{-1}(\partial B \cup \partial\sigma(B))$. We can find a shell $\{c_1 < |Z| < c_2\}$ avoiding this set. We infer that ϕ can be extended as a global injective holomorphic map from $\{|Z| < c_2\}$ into B which commutes with $\widehat{f}$. We let $\varphi := \Pi \circ \phi \circ \sigma$. This is an element of $\mathrm{Aut}(f)$ s.t. $\rho(\varphi) = \phi$. This concludes the proof that ρ is a bijective morphism. □

Chapitre 2

Dynamique des applications rationnelles: structure du courant de Green.

Introduction

Dans ce chapitre, nous donnons les éléments de base de la dynamique des applications f méromorphes dominantes d'une variété kählérienne X dans elle-même. Nous suivons les méthodes initiées par Fornaess-Sibony dans [FS92-2] (voir aussi [Si99]). Nous cherchons à décrire cette dynamique par des méthodes stochastiques en construisant une mesure invariante possédant des propriétés particulières (ergodique ou mélangeante, d'entropie maximale). La présence de points d'indétermination rend cependant l'étude complexe. En particulier on ne sait pas définir de telle mesure en général. On peut cependant assez naturellement associer à f un objet "de codimension 1" analogue aux mesures. On va construire un courant dit "de Green" $T(f)$ positif fermé de bidegré $(1,1)$ et invariant par image réciproque par f. Dans la plupart des cas il sera défini de manière unique. Le résultat principal de ce chapitre (Théorème 2.4.6) est la preuve que les singularités essentielles de $T(f)$ (nombre de Lelong strictement positif) sont concentrées sur l'ensemble d'indétermination $I(f^\infty)$.

Nous donnons à la Section 1 quelques définitions générales sur les objets que nous manipulerons par la suite. A la Section 2, nous détaillons l'action de f sur les formes lisses, les courants positifs et sur la cohomologie de X. Cette étude est cruciale pour la suite, en particulier pour la construction du courant de Green que nous faisons à la Section 4. Nous donnons dans cette Section 4 les propriétés fondamentales satisfaites par ce courant et énonçons notre théorème principal (Théorème 2.4.6). La Section 5 est consacrée au développement de l'outil clé de la preuve du Théorème 2.4.6: les multiplicités asymptotiques. Notons que des notions analogues seront considérées au Chapitre 4. Enfin nous donnons une démonstration précise du Théorème 2.4.6 à la Section 6.

Les résultats de ce chapitre sont essentiellement dûs à Fornaess-Sibony ([FS92-2], [Si99]) dans le cas des applications rationnelles de $X = \mathbf{P}^n$. Il nous a paru cependant important de les reformuler dans un cadre assez général sans s'appuyer sur les propriétés particulière de l'espace X considéré. La construction du courant de Green est dûe a V. Guedj (Théorème 2.4.3). Notre Théorème 2.4.6 constitue un apport totalement original et est le coeur de ce chapitre. Notons qu'il sera utilisé de manière cruciale au Chapitre 5 pour démontrer le mélange de la mesure invariante associée à certaine classe d'applications birationnelles.

2.1 Applications méromorphes: généralités

Dans toute cette section X désignera une variété complexe réduite (éventuellement singulière) irréductible et compacte de dimension n.

Une application méromorphe $f : X \to X$ est la donnée d'une sous-variété irréductible $\Gamma(f) \subset X \times X$ de dimension n t.q. la première projection $\pi_1 : \Gamma(f) \to X$ soit une modification propre (voir [Fi76]). En d'autres termes, il existe une sous-variété propre $V \subsetneq X$ t.q. $\pi_1 : \Gamma(f) \backslash \pi_1^{-1}V \to X \backslash V$ soit un biholomorphisme. Notons que $\Gamma(f)$ n'est pas lisse en général même si X est une variété lisse. On dira que $\Gamma(f)$ est le graphe de l'application f.

On notera $I(f)$ l'ensemble d'indétermination de f. C'est un sous-ensemble analytique de codimension au moins 2 dans X lorsque X est normale. On notera aussi $D(f) := X \setminus I(f)$ le domaine de définition de f.

L'ensemble critique $\mathcal{C}(f)$ est le sous-ensemble analytique de X défini hors de $I(f)$ par l'annulation du déterminant Jacobien Jf de f dans un système de coordonnées locales. On dira que f est *dominante* si $\mathcal{C}(f)$ est une sous-variété propre de X ou de manière équivalente si le Jacobien Df de f est de rang générique maximal égal à n, ou encore $\pi_2(\Gamma(f)) = X$.

On notera aussi $\mathfrak{C}(f)$ l'adhérence de l'ensemble des points de X où f n'est pas un morphisme fini. On vérifie que $\mathfrak{C}(f)$ est un sous-ensemble analytique de X (voir [Fi76]).

On a toujours

$$\mathcal{C}(f) \supset \mathfrak{C}(f) \cup I(f). \tag{2.1}$$

Mais en général, on peut avoir $\mathfrak{C}(f) = \emptyset$ même si $I(f) \neq \emptyset$.

Lorsque f est dominante, $\mathfrak{C}(f)$ est de codimension au moins 2 dans X.

Définition 2.1.1. *Soit f une application méromorphe de $f : X \to X$, et $V \subset X$ un sous-ensemble analytique complexe (non nécessairement réduit). On définit les sous-ensembles analytiques suivants:*

1. *l'image totale de V par f:*
$$\widehat{f}(V) := \pi_2(\pi_1^{-1}(V));$$
2. *l'image propre de V par f:*
$$f(V) := \overline{f|_{D(f)}(V)};$$
3. *l'image inverse de V par f*
$$f^{-1}(V) := \pi_1(\pi_2^{-1}(V)).$$

Si Λ est une variété analytique quelconque une famille d'applications méromorphes de X dans X paramétrée par Λ est la donnée d'une sous-variété $\Gamma \subset \Lambda \times X \times X$ t.q. pour tout $\lambda \in \Lambda$, la fibre Γ_λ au-dessus de λ soit une application méromorphe de X dans X.

Proposition 2.1.2. *Soit Λ une variété connexe, $\lambda_0 \in \Lambda$, et $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Gamma}$ une famille d'applications méromorphes de X dans X. Si f_{λ_0} est dominante, $\{\lambda \in \Lambda$ t.q. f_λ est dominante$\}$ est un ouvert de Zariski dense dans Λ.*

Démonstration. Considérons

$$V := \{(x, \lambda) \in X \times \Lambda \text{ t.q. } \operatorname{rang}(Df_\lambda(x)) \leq n-1\}.$$

Cet ensemble définit un sous-ensemble analytique de $X \times \Lambda$. Notons π_1 et π_2 les projections de V respectivement sur X et Λ. L'application π_2 est propre. Si $x \in X$ est un point fixé, $V_x := \pi_2(\pi_1^{-1}\{x\} \cap V)$, l'ensemble des applications f_λ t.q. $\operatorname{rang}(Df_\lambda(x)) \leq n-1$, forme donc un sous-ensemble analytique de Λ. L'ensemble des paramètres de Λ t.q. f_λ n'est pas dominante est exactement $\cap_{x\in X} V_x$, et définit donc un fermé analytique de Λ. □

Soit $f : X \to X$ une application méromorphe. Nous voulons étudier la dynamique de cette application. Cependant, à cause de l'existence de points d'indétermination, f n'induit pas de système dynamique naturel sur X. Nous adoptons le point de vue de Friedland (voir [Fr95]). Considérons $X^{\mathbf{Z}} = \{x^\bullet = (\cdots, x_{-1}, x_0, x_1, \cdots)\}$ muni de la distance $d(x^\bullet, y^\bullet) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} 2^{-|k|} d_X(x_k, y_k)$ pour une distance d_X définissant la topologie de X. C'est un espace métrique compact. On notera $\pi_i : X^{\mathbf{Z}} \to X$ la projection sur la i-ème composante $\pi_i(x^\bullet) = x_i$. On définit le sous-espace fermé

$$\Gamma^\infty(f) := \{x^\bullet \in X^{\mathbf{Z}} \text{ t.q. } \forall i \in \mathbf{Z}, (x_i, x_{i+1}) \in \Gamma(f)\}.$$

Le shift à gauche $\widehat{f}(\{x_i\}) = \{x_{i+1}\}$ définit un homéomorphisme de $\Gamma^\infty(f)$ sur lui-même et

$$\pi_0(\widehat{f}(x^\bullet)) = f(\pi_0(x^\bullet)),$$

dès que f est holomorphe en x_0.

Définition 2.1.3. *Le système dynamique $(\Gamma^\infty(f), \widehat{f})$ est le système dynamique associé à l'application méromorphe f. On appellera $\widehat{f}$ l'extension naturelle de f.*

Il peut arriver que f ne définisse aucun système dynamique dans X.

Exemple 2.1.4. *Soit $f : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$, défini en coordonnées homogènes par $f[z_0 : z_1 : z_2] = [z_2(z_0 - z_1) : z_2(z_0 - z_1) : z_0^2 + z_1^2]$. Alors $f(\mathbf{P}^2) = \{z_0 = z_1\}$. Et $f(z_0 = z_1) = [0 : 0 : 1] \in I(f)$. L'application f n'induit donc aucun système dynamique naturel dans $\mathbf{P}^2$.*

Définition 2.1.5. *Soit f une application méromorphe $f : X \to X$. On définit:*

$$\begin{aligned} I(f^\infty) &:= \bigcup_{k\geq 0} f^{-k} I(f), \\ E(f) &:= \overline{I(f^\infty)}, \\ \mathcal{C}(f^\infty) &:= \bigcup_{k\geq 0} f^{-k}\mathcal{C}(f), \\ \mathfrak{C}(f^\infty) &:= \bigcup_{k\geq 0} f^{-k}\mathfrak{C}(f). \end{aligned}$$

Si $z \notin I(f^\infty)$, on note $\mathcal{O}(z) := \cup_{k\geq 0} f^k(z)$ l'orbite positive de z, et $\mathcal{O}_T(z) := \cup_{k\in\mathbf{Z}} f^k(z)$ son orbite totale.

On vérifie que si f est dominante, tous ses itérés le sont et donc $I(f^\infty)$ est inclus dans une réunion dénombrable d'hypersurfaces de X. En particulier dans ce cas, pour un point générique de X, son orbite est bien défini.

Concluons cette section par quelques définitions générales pour des systèmes dynamiques holomorphes.

Définition 2.1.6. *Soit $f : X \to X$ une application méromorphe.*

- *Un point x est dans l'ensemble de Fatou de f, noté $F(f)$, s'il existe un voisinage U de x tel que la famille $\{f^k|_U\}_{k\geq 0}$ définisse une famille d'applications holomorphes équicontinues. L'ensemble de Julia, noté $J(f)$, est le complémentaire de l'ensemble de Fatou.*

- *Un point est dit normal s'il existe un voisinage U de x et un voisinage V de $I(f)$ tels qu'on ait $f^j(U) \cap V = \emptyset$ pour tout $j \in \mathbf{N}$. On note $\mathcal{N}(f)$ l'ensemble des points normaux de f.*

- *Enfin f est normale si $\mathcal{N}(f) = X \setminus E(f)$.*

Il résulte des définitions précédentes que l'ensemble de Fatou est ouvert et disjoint de $E(f)$ et que $\mathcal{N}(f)$ est un ouvert de $X \setminus E(f)$.

2.2 Action de f sur les courants positifs fermés et $H^\bullet(X)$.

Dans toute la suite de ce travail, X sera une variété complexe *lisse, compacte et connexe* de dimension n. On supposera de plus que X est *kählérienne* et on notera ω_X une forme de Kähler sur X. On considère $f : X \to X$ une application méromorphe *dominante.*

Dans cette section, nous précisons quelques définitions relativement à l'action de f sur les formes lisses, les courants positifs fermés, ainsi que sur les groupes de cohomologie de X. Cette étude est cruciale pour la construction de courants invariants (voir section suivante).

2.2.1 Cas des formes lisses

Définition 2.2.1. *Soit $f : X \to X$ une application méromorphe dominante et $\widetilde{\Gamma} \to \Gamma(f)$ une désingularisation de $\Gamma(f)$. Soient π_1, π_2 les deux projections de $\widetilde{\Gamma} \to X$.*

Soit $\phi \in \mathcal{C}^\infty_{p,q}(X)$ une (p,q)-forme lisse sur X. On définit le (p,q)-courant

$$f^*\phi := \pi_{1*}\pi_2^*\phi,$$

où $\pi_2^*\phi$ est le image réciproque de ϕ au sens des formes et π_{1*} est le image directe au sens des courants. Cette définition est indépendante du choix de la désingularisation.

De manière analogue, le courant

$$f_*\phi := \pi_{2*}\pi_1^*\phi$$

définit l'image directe de ϕ par f.

Notons que π_{1*} et π_{2*} sont bien définis car X est compacte.

Proposition 2.2.2. *Soit $f : X \to X$ une application méromorphe dominante, et ϕ une (p,q)-forme lisse sur X.*

1. *Le courant $f^*\phi$ est une forme à coefficients L^1_{loc}, lisse dans $X \setminus I(f)$.*

1'. *Le courant $f_*\phi$ est une forme à coefficients L^1_{loc}, lisse dans $X \setminus \widehat{f}(\mathcal{C}(f))$.*

2. *$d(f^*\phi) = f^*(d\phi)$; $d(f_*\phi) = f_*(d\phi)$.*
3. *Si $\phi \geq 0$ est une forme positive, alors $f^*\phi, f_*\phi \geq 0$.*
4. *Les opérateurs f^*, f_* sont continues au sens suivant: si $\phi_k \to \phi$ au sens des courants, alors $f^*\phi_k \to f^*\phi$ et $f_*\phi_k \to f_*\phi$ au sens des courants.*

5. *Pour toute (p, q)-forme lisse ϕ, et $(n-p, n-q)$-forme lisse α, l'égalité*

$$< f^*\phi, \alpha > = < \phi, f_*\alpha >$$

est satisfaite.

Démonstration.

Les preuves de (1) et (1') sont similaires, nous ne démontrerons que (1). Soit donc ϕ une (p, q)-forme lisse. La forme $\pi_2^*\phi$ est lisse dans $\widetilde{\Gamma}$. Pour voir que $f^*\phi$ est représentée par une forme à coefficients L^1_{loc}, on se place dans une carte locale $U \subset X$ et on montre que pour tout choix de multi-indices $|\beta| = n-p, |\gamma| = n-q$ la mesure définie par

$$\mu_{\beta,\gamma}(\chi) := < f^*\phi, \chi \cdot dz^\beta \wedge d\overline{z}^\gamma >$$

pour toute fonction test $\chi \in \mathcal{C}^\infty(U)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Si $A \subset X$ est un borélien de volume nul, on a aussi $\mathrm{Vol}(\pi_1^{-1}(A)) = 0$. De plus, la forme $\pi_2^*\phi \wedge \pi_1^*(dz^\beta \wedge d\overline{z}^\gamma)$ est lisse et par suite

$$|\mu_{\beta,\gamma}(A)| := \Big| < \pi_2^*\phi, \mathbb{1}_A \circ \pi_1 \cdot \pi_1^*(dz^\beta \wedge d\overline{z}^\gamma) > \Big| \leq C\mathrm{Vol}(\pi_1^{-1}(A)) = 0$$

pour une constante $C > 0$, ce qui conclut la preuve.

La preuve des assertions (2), (3) et (4) est immédiate et résulte des propriétés correspondantes pour les opérateurs π_{1*}, π_{2*} et π_1^*, π_2^*.

Pour (5), il suffit de remarquer que l'égalité

$$< f^*\phi, \alpha > = < \pi_2^*\phi, \pi_1^*\alpha > = < \phi, f_*\alpha >$$

est satisfaite. □

Remarque: On n'a pas en général $f^*(\phi_1 \wedge \phi_2) = f^*(\phi_1) \wedge f^*(\phi_2)$. En général, le membre de droite n'est pas défini car les formes $f^*\phi_i$ possèdent des singularités. Voir l'Exemple 2.2.3 ci-dessous. ♦

Considérons maintenant l'action de f sur la cohomologie de X. Pour tout $\phi \in \mathcal{C}^\infty_{p,q}(X)$ t.q. $\overline{\partial}\phi = 0$, on notera $\{\phi\} \in H^{p,q}(X)$ sa classe de cohomologie. Le théorème de Dolbeault-De Rham permet d'identifier canoniquement

$$\begin{aligned} H^{p,q}(X) &\cong \{\phi \in \mathcal{C}^\infty_{p,q}(X), \overline{\partial}\phi = 0\}/\overline{\partial}\mathcal{C}^\infty_{p,q-1}(X) \\ &\stackrel{\cong}{\longrightarrow} \{T \in \mathcal{D}'_{p,q}(X), \overline{\partial}T = 0\}/\overline{\partial}\mathcal{D}'_{p,q-1}(X), \end{aligned}$$

où $\mathcal{D}'_{p,q}(X)$ désigne l'espace des courants de bidegré (p, q) sur X, et la flèche d'isomorphisme est donnée par l'inclusion $\mathcal{C}^\infty_{p,q}(X) \subset \mathcal{D}'_{p,q}(X)$.

La Proposition 2.1.2 (2) permet de définir l'opérateur $f^* : H^{p,q}(X) \to H^{p,q}(X)$ en posant

$$f^*\{\phi\} := \{f^*\phi\},$$

pour toute forme $\phi \in \mathcal{C}^\infty_{p,q}(X)$ $\overline{\partial}$-fermée.

Exemple 2.2.3. *Soit $f : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$ défini en coordonnées homogènes par $f[z : w : t] := [zw : wt : t^2]$. On vérifie que si ω_{FS} est la forme de Fubini-Study de $\mathbf{P}^2$, on a (voir Section 2.2.5)*

$$\begin{aligned}\{f^*(\omega_{FS}^2)\} &= \{\omega_{FS}^2\},\\ \{f^*\omega_{FS}\} &= 2\{\omega_{FS}\}.\end{aligned}$$

Par suite, $\{(f^*\omega_{FS})^2\} = 4\{\omega_{FS}^2\} \neq \{f^*(\omega_{FS}^2)\}$.

2.2.2 Image réciproque des courants positifs fermés

On veut maintenant étendre l'action f^* à $\mathcal{C}_p^+(X)$ l'ensemble des courants positifs fermés de bidegré (p, p). Ceci est impossible de manière générale même lorsque f est holomorphe et propre (voir [M96]). Il est important de noter que l'on ne peut pas définir d'opérateur continu $f^* : \mathcal{C}_p^+(X) \to \mathcal{C}_p^+(X)$ étendant l'image réciproque des formes lisses. Cependant, on peut tirer parti de la compacité de X.

On notera la masse d'un courant $T \in \mathcal{C}_p^+(X)$ par $\|T\| :=< T, \omega_X^p >\geq 0$.

Définition 2.2.4. *Soit $f : X \to X$ une application méromorphe dominante, et $T \in \mathcal{C}_p^+(X)$. Posons $S := \left(f|_{X\setminus\mathcal{C}(f)}\right)^* T$. Si la masse de S est bornée dans X, on définit le courant positif fermé*

$$f^\bullet T := \widetilde{S}$$

où $\widetilde{S}$ désigne l'extension triviale de S à travers $\mathcal{C}(f)$ (voir Appendice A).

Si $\phi \in \mathcal{C}_{p,p}^\infty(X)$ est une forme positive fermée, cette définition coïncide avec celle donnée précédemment. En effet, $f^*\phi$ est une forme à coefficients L^1_{loc}, et par suite ne charge pas $\mathcal{C}(f)$.

Proposition 2.2.5. *Soit $T \in \mathcal{C}_p^+(X)$, et supposons qu'il existe une suite $\phi_j \in \mathcal{C}_{p,p}^\infty(X)$ de formes positives fermées t.q. $\phi_j \to T$.*

Alors $f^\bullet T$ existe.

Remarque: En général on n'a pas $f^\bullet T = \lim_{j\to\infty} f^*\phi_j$. L'action $f^\bullet$ n'est pas continue sur $\mathcal{C}_p^+(X)$. ♦

Exemple 2.2.6. *Reprenons l'exemple 2.2.3. Soit $f : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$ t.q. $f[z : w : t] := [zw : wt : t^2]$. Soit χ_k une suite de fonctions lisses positives d'intégrale 1 et dont le support est disjoint de $\{w = 0\}$. Supposons de plus que $\chi_k \to \delta_0$ la massse de Dirac au point $[0 : 0 : 1]$. Alors la masse de $f^*\chi_k = f^\bullet\chi_k$ est constante égale à 1 bien que $f^\bullet\delta_0 = 0$.*

Remarque:

(1) Lorsque X est un espace homogène (par exemple si X est un produit d'espaces projectifs), on peut régulariser tout courant positif fermé (voir [Hu94]). La condition ci-dessus est automatiquement satisfaite.

(2) Si $T \in \mathcal{C}_n^+(X)$ est une mesure positive, la condition ci-dessus est aussi automatiquement satisfaite. ♦

Démonstration. Notons $f_r^*T := \left(f|_{X\setminus\mathcal{C}(f)}\right)^* T$ et la restriction $f_r^*\phi_i := f^*\phi_i|_{X\setminus\mathcal{C}(f)}$. On veut prouver que la masse $< f_r^*T, \omega_X^p >< +\infty$.

La suite de réels $< f^*\phi_i, \omega_X^p >$ ne dépend que de la classe de cohomologie de $f^*\phi_i$. Comme $\{\phi_i\} \to \{T\}$ et que $f^* : H^{p,p}(X) \to H^{p,p}(X)$ est linéaire, on a $C := \sup_i < f^*\phi_i, \omega_X^p >< +\infty$. Fixons $\chi_k \in \mathcal{C}^\infty(X)$ une suite croissante de fonctions lisses à support compact dans $X \setminus \mathcal{C}(f)$ et tendant vers la fonction indicatrice $\mathbb{1}_{X\setminus\mathcal{C}(f)}$. Dans $X\setminus\mathcal{C}(f)$, on a convergence faible $f_r^*\phi_i \to f_r^*T$. Il s'ensuit pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$< f_r^*T, \chi_k\omega_X^p >= \lim_{i\to\infty} < f_r^*\phi_i, \chi_k\omega_X^p >\leq C,$$

et par convergence monotone $< f_r^*T, \omega_X^p >\leq C$. □

2.2.3 Image réciproque des courants de bidegré $(1,1)$

Toutes ces considérations se simplifient dans le cas des courants de bidegré $(1,1)$. Ce cas sera particulièrement important dans la suite. Soit $f : X \to X$ une application méromorphe dominante, et $T \in \mathcal{C}_1^+(X)$. On peut définir naturellement le courant $\pi_2^*T \in \mathcal{C}_1^+(\widetilde{\Gamma})$ de la façon suivante. Localement, on a $T = dd^cu$ avec u plurisousharmonique (psh en abrégé). Comme f est dominante, π_2 l'est aussi et $u \circ \pi_2$ n'est pas identiquement $-\infty$. On peut donc poser $\pi_2^*T := dd^c(u \circ \pi_2)$. Cette définition ne dépend pas du potentiel choisi.

Définition 2.2.7. *Soit $f : X \to X$ une application méromorphe dominante, et $T \in \mathcal{C}_1^+(X)$. On pose*

$$f^*T := \pi_{1*}\pi_2^*T \in \mathcal{C}_1^+(X).$$

Proposition 2.2.8. *Soit $f : X \to X$ une application méromorphe* dominante.

1. *L'opérateur $f^* : \mathcal{C}_1^+(X) \to \mathcal{C}_1^+(X)$ est continu.*
2. *On a $f^\bullet T \leq f^*T$.*
3. *Pour toute hypersurface analytique $V \subset X$, on a*

$$f^*[V] = [f^{-1}(V)].$$

Démonstration.

(1) On suit la démonstration donnée dans [Si99]. Il suffit de vérifier que l'application $T \mapsto \pi_2^* T$ est continue. Ceci résulte du fait que f est dominante. Soit $T_i \to T$ une suite de courants de $\mathcal{C}_1^+(X)$. On travaille localement. On peut trouver une suite de potentiels psh u_i, u avec $T_i = dd^c u_i$, $T = dd^c u$ et t.q. $u_i \to u$ dans L^1_{loc}. La suite de fonctions $u_i \circ \pi_2$ est localement uniformément majorée, on peut donc en extraire une sous-suite convergeante dans L^1_{loc} et p.p vers une fonction psh v. Or f est génériquement de rang maximal donc π_2 aussi et $v = u \circ \pi_2$ p.p. donc partout. Il s'ensuit $\pi_2^* T_i \to \pi_2^* T$.

(2) On a égalité des courants $f^\bullet T|_{X \setminus \mathcal{C}(f)} = f^* T|_{X \setminus \mathcal{C}(f)}$. Comme $f^\bullet T$ est l'extension triviale de ce courant à travers $\mathcal{C}(f)$, on a bien $f^\bullet T \leq f^* T$.

(3) Ceci résulte de la définition en remarquant que $\pi_2^*[V] = [\pi_2^{-1}(V)]$.

□

Sur un espace compact, toute fonction psh est constante. Pour définir des potentiels globaux de courants positifs fermés de bidegré $(1,1)$, on est amené à introduire la notion suivante.

Définition 2.2.9. *Une fonction $U : X \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ est dite quasi-psh si elle admet localement une décomposition*

$$U = u + \gamma$$

où u est psh et γ lisse. On notera QPSH(X) l'ensemble des fonctions quasi-psh de X.

Tout courant $T \in \mathcal{C}_1^+(X)$ peut s'écrire globalement comme une somme

$$T = \alpha + dd^c U$$

où $\alpha \in \mathcal{C}^\infty_{1,1}(X)$ et $U \in \mathrm{QPSH}(X)$. En effet, dans des cartes locales on peut écrire $T|_{U_i} = dd^c u_i$ pour des fonctions psh u_i. Il suffit alors de recoller les u_i à l'aide de partitions de l'unité θ_i en posant $U := \sum \theta_i u_i$ et en remarquant que pour tout i, la fonction $U - u_i$ est lisse.

Proposition 2.2.10. *Soit $f : X \to X$ une application méromorphe dominante. Soit $T \in \mathcal{C}_1^+(X)$, et fixons une représentation $T = \alpha + dd^c U$ avec $\alpha \in \mathcal{C}^\infty_{1,1}(X)$ et $U \in QPSH(X)$. Alors la fonction $U \circ f$ est localement intégrable en tout point de X, et on a*

$$f^* T = f^* \alpha + dd^c (U \circ f).$$

En particulier, l'éaglité

$$f^*\{T\} = \{f^* T\}$$

est satisfaite.

Démonstration. Soit $\omega_{\widetilde{\Gamma}}$ une forme de Kähler sur $\widetilde{\Gamma}$, et fixons une constante $C > 0$ t.q. $\pi_1^*\omega_X \leq C\omega_{\widetilde{\Gamma}}$. La fonction $V := U \circ \pi_2$ est quasi-psh dans $\widetilde{\Gamma}$ et donc localement intégrable. On peut alors estimer

$$\|U \circ f\|_{L^1(X\setminus I(f))} = \int_{X\setminus I(f)} |V \circ \pi_1^{-1}|\omega_X^n = \int_{\widetilde{\Gamma}\setminus\pi_1^{-1}I(f)} |V|\pi_1^*\omega_X^n$$
$$\leq C\int_{\widetilde{\Gamma}} |V|\omega_{\widetilde{\Gamma}}^n < +\infty.$$

La fonction $U \circ f$ est donc localement intégrable et on peut définir le courant $f^*\alpha + dd^c(U \circ f)$.

Par ailleurs, par définition les deux courants π_2^*T et $\pi_2^*\alpha + dd^c(U \circ \pi_2)$ coïncident. Enfin remarquons que

$$\pi_{1*}dd^c(U \circ f) = dd^c(U \circ \pi_2 \circ \pi_1^{-1}) = dd^c(U \circ f).$$

On conclut alors $f^*T = f^*\alpha + dd^c(U \circ f)$. □

Enfin il est important de remarquer:

Proposition 2.2.11. *Soit $T \in \mathcal{C}_1^+(X)$, et $\phi \in \mathcal{C}_{1,1}^\infty(X)$ une forme fermée satisfaisant $\{T\} = \{\phi\}$. Alors il existe une fonction $U \in QPSH(X)$ t.q.*

$$T = \phi + dd^cU.$$

Démonstration. Ecrivons $T = \alpha_1 + dd^cU_1$ avec $\alpha_1 \in \mathcal{C}_{1,1}^\infty(X)$ et $U_1 \in$ QPSH(X). On a $\{\alpha_1\} = \{\phi\}$. Or X est Kähler, donc toute forme lisse d-exacte est aussi dd^c-exacte. En particulier on peut trouver une fonction $U_2 \in \mathcal{C}^\infty(X)$ t.q. $\phi - \alpha_1 = dd^cU_2$. Il vient alors $T = \phi + dd^c(U_1 - U_2)$. □

2.2.4 Image réciproque des sous-variétés analytiques.

On a défini la préimage par f d'une sous-variété analytique $Y \subset X$ par $f^{-1}Y = \pi_1\pi_2^{-1}(Y)$. On vérifie que l'on a toujours $[f^{-1}(Y)] \geq f^\bullet[Y]$.

Proposition 2.2.12. *Soit $Y \subset X$ une sous-variété analytique de dimension pure p en position générale par rapport à $\widehat{f}(\mathcal{C}(f))$ i.e.*

$$\overline{f^{-1}(Y) \cap \mathcal{C}(f)} = f^{-1}(Y).$$

Alors pour toute forme $\alpha \in \mathcal{C}_{n-p,n-p}^\infty(X)$ on a

$$< [f^{-1}(Y)], \alpha >=< [Y], f_*\alpha > .$$

En particulier, dans ce cas l'égalité

$$f^*\{Y\} = \{f^{-1}(Y)\}$$

est satisfaite.

Démonstration. Notons $\mathcal{C} := \mathcal{C}(\pi_2)$, $\mathcal{C}_X := \pi_2\mathcal{C}(\pi_2) = \widehat{f}(\mathcal{C}(f))$, et $Z := \pi_2^{-1}(Y)$. Fixons $\phi \in \mathcal{C}^\infty(X)$ une forme lisse fermée t.q. $\{Y\} = \{\phi\}$. Pour toute forme lisse fermée $\beta \in \mathcal{C}^\infty(X)$ on a donc $\int_Y \beta = \int \beta \wedge \phi$.

Soit $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma)$ une forme lisse fermée. On va prouver que

$$\int_Z \alpha = \int \alpha \wedge \pi_2^*\phi \ . \tag{2.2}$$

Par dualité, on a alors $\{Z\} = \{\pi_2^*\phi\}$ donc

$$\begin{aligned} f^*\{Y\} &= \pi_{1*}\pi_2^*\{\phi\} = \pi_{1*}\{\pi_2^*\phi\} = \pi_{1*}\{\pi_2^{-1}Y\} \text{ par (2.2)} \\ &= \{\pi_1\pi_2^{-1}(Y)\} = \{f^{-1}(Y)\}, \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve.

Prouvons (2.2). Rappelons que $\pi_{2*}\alpha$ est une forme à coefficients L^1, lisse dans $X \setminus \mathcal{C}_X$. On a

$$\int \alpha \wedge \pi_2^*\phi = \int \pi_{2*}\alpha \wedge \phi.$$

Par ailleurs, comme Y est en position générale par rapport à $\mathcal{C}_X$, la formule de changement de variable donne

$$\int_Z \alpha = \int_{Z\setminus\mathcal{C}} \alpha = \int_{Y\setminus\mathcal{C}_X} \pi_{2*}\alpha.$$

En particulier, $\pi_{2*}\alpha \in L^1(Y)$. Soit $\beta_\varepsilon \to \pi_{2*}\alpha$ une suite de formes lisses fermées convergeant dans L^1 vers $\pi_{2*}\alpha$. Les formes β_ε sont données par convolution et le théorème de convergence dominée donne alors $\int_Y \beta_\varepsilon \to \int_Y \pi_{2*}\alpha$. Comme pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\int_Y \beta_\varepsilon = \int \beta_\varepsilon \wedge \phi$, il s'ensuit à la limite

$$\int_Y \pi_{2*}\alpha = \int \pi_{2*}\alpha \wedge \phi,$$

d'où (2.2). □

2.2.5 Degrés dynamiques

Nous allons définir dans cette section les degrés dynamiques d'une application méromorphe $f : X \to X$ d'une variété rationnelle dans elle-même en suivant [Fr95] (voir aussi [RS97]). Ceux-ci sont des invariants birationnels fondamentaux et contrôlent la dynamique de f (voir par exemple le Théorème 3.3.1).

Fixons tout d'abord X une variété projective compacte. On notera $H^{p,p}_+(X)$ (resp. $H^{p,p}_{an}(X)$) le sous-espace de $H^{p,p}(X)$ engendré par les courants positifs fermés de bidegré (p,p) (resp. les cycles analytiques de codimension p).

Pour deux courants $S, T \in \mathcal{C}^+_p(X)$, on note $T \geq S$ dès que $T - S$ est un courant positif.

Lemme 2.2.13. *La relation d'ordre de $\mathcal{C}_p^+(X)$ se projette naturellement dans $H_{an}^{p,p}(X)$.*

Démonstration. Il faut vérifier que si $\{T_1\} = \{S_1\}$ et $\{T_2\} = \{S_2\}$ avec $T_1 \geq T_2$ et $S_1 \leq S_2$ alors $T_1 = T_2$ et $S_1 = S_2$. On a $T_i = S_i + dR_i$ pour des courants R_1, R_2. On en déduit

$$d(R_1 - R_2) = (T_1 - T_2) - (S_1 - S_2) \geq 0.$$

D'où on tire $< d(R_1 - R_2), \omega_X^p >= 0$ et il s'ensuit $0 \leq T_1 - T_2 = S_1 - S_2 \leq 0$. Donc $T_1 = T_2$ et $S_1 = S_2$. $\square$

Considérons tout d'abord le cas de l'espace projectif $X = \mathbf{P}^n$. Rappelons que pour tout $0 \leq p \leq n$ les espaces $H^{p,p}(\mathbf{P}^n) = H_+^{p,p}(\mathbf{P}^n) = H_{an}^{p,p}(\mathbf{P}^n)$ coïncident et sont engendrés de manière équivalente soit par ω_{FS}^p (où ω_{FS} désigne la forme de Fubini-Study), soit par un sous-espace linéaire $L \subset \mathbf{P}^n$ de codimension p.

Définition 2.2.14. *Soit $f : \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^n$ une application rationnelle dominante et $0 \leq p \leq n$. Les trois quantités coïncident:*

1. *le rayon spectral de l'action de f^* sur $H^{p,p}(\mathbf{P}^n)$;*
2. *l'intégrale $\int_{\mathbf{P}^n} f^*\omega_{FS}^p \wedge \omega_{FS}^{n-p}$;*
3. *le degré $\deg(f^{-1}(L))$ pour un sous-espace linéaire L de codimension p générique (en position générale par rapport à $\widehat{f}(\mathcal{C}(f))$).*

On notera cette quantité $\rho_p(f)$.

Démonstration. Pour tout $T \in \mathcal{C}_p^+(X)$, on a

$$\{T\} = \left(\int_{\mathbf{P}^n} T \wedge \omega_{FS}^{n-p} \right) \times \{\omega_{FS}^p\}.$$

Les quantités (1) et (2) coïncident donc. Pour un sous-espace générique L de codimension p, on peut appliquer la Proposition 2.2.12 et on a $f^*\{L\} = \{f^{-1}L\}$. Par ailleurs la classe d'une sous-variété de codimension p arbitraire $V \subset \mathbf{P}^n$ est $\deg(V)\{\omega_{FS}^p\}$ où $\deg(V)$ est le nombre de point d'intersection de V avec un sous-espace linéaire générique de dimension p. On en déduit donc

$$\deg(f^{-1}L)\{\omega_{FS}^p\} = \{f^*L\} = \rho_p(f)\{L\},$$

ce qui conclut la preuve. $\square$

Notons que l'on peut remplacer L par une sous-variété V générique arbitraire et on a alors

$$\deg(f^{-1}V) = \rho_p(f)\deg(V).$$

Par ailleurs, pour $p = n$ on obtient $\rho_n(f) = \deg(f)$ le degré topologique de f.

Proposition 2.2.15. *Soit $f, g : \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^n$ deux applications rationnelles dominantes.*

1. *Pour tout $0 \leq p \leq n$, on a*

$$\rho_p(g \circ f) \leq \rho_p(f) \times \rho_p(g).$$

On a égalité dès que Codim $(f^{-1}I(g)) > p$.

2. *Pour tout couple $0 \leq p, q \leq n$ t.q. $p + q \leq n$ on a*

$$\rho_{p+q}(f) \leq \rho_p(f) \times \rho_q(f).$$

On a égalité dès que Codim $(I(f)) > p + q$.

Démonstration. Donnons une preuve analytique de cette proposition (voir [RS97]).

(1) Pour un courant $T \in \mathcal{C}_p^+(\mathbf{P}^n)$, notons T_ε une suite de formes lisses positives fermées cohomologues à $\{T\}$ et t.q. $T_\varepsilon \to_{\varepsilon \to 0} T$. Notons que pour toute forme lisse fermée α de bidegré (p, p) on a $\{f^*\alpha\} = f^*\{\alpha\} = \rho_p(f)\{\alpha\}$. On a donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{P}^n} f^*((g^*\omega_{FS}^p)_\varepsilon) \wedge \omega_{FS}^{n-p} &= \rho_p(f) \int_{\mathbf{P}^n} (g^*\omega_{FS}^p)_\varepsilon \wedge \omega_{FS}^{n-p} \\ &= \rho_p(f) \cdot \rho_p(g). \end{aligned}$$

Par ailleurs, $f^*((g^*\omega_{FS}^p)_\varepsilon) \wedge \omega_{FS}^{n-p}$ est une suite de mesure positive de masse constante tendant faiblement vers $(g \circ f)^*\omega_{FS}^p \wedge \omega_{FS}^{n-p}$ dans $\mathbf{P}^n \setminus f^{-1}I(g)$. On a donc

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbf{P}^n} f^*((g^*\omega_{FS}^p)_\varepsilon) \wedge \omega_{FS}^{n-p} &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbf{P}^n \setminus f^{-1}I(g)} f^*(g^*\omega_{FS}^p)_\varepsilon \wedge \omega_{FS}^{n-p} \\ &= \int_{\mathbf{P}^n \setminus f^{-1}I(g)} (g \circ f)^*\omega_{FS}^p \wedge \omega_{FS}^{n-p} = \rho_p(g \circ f), \end{aligned}$$

et on conclut $\rho_p(g \circ f) \leq \rho_p(f) \cdot \rho_p(g)$.

Pour tout courant $T \in \mathcal{C}_p^+(X)$ il existe une constante ne dépendant que de la masse de T t.q. pour toute boule $B(r) \subset \mathbf{P}^n$ de rayon $r > 0$ on a $\int_{B(r)} T \wedge \omega_{FS}^{n-p} \leq Cr^{2(n-p)}$. Lorsque Codim $(f^{-1}I(g)) = q > p$, on en déduit que

$$\int_{B(f^{-1}I(g), r)} f^*(g^*\omega_{FS}^p)_\varepsilon \wedge \omega_{FS}^{n-p} \leq C.r^{2(n-p)} \times r^{2q} \leq Cr^2,$$

où $B(f^{-1}I(g), r) := \{x \in \mathbf{P}^n, \text{ t.q. } \mathrm{dist}(x, f^{-1}I(g)) \leq r\}$. On en déduit alors le cas d'égalité $\rho_p(g \circ f) = \rho_p(f)\rho_p(g)$.

(2) On a de même

$$
\begin{aligned}
\rho_p(f)\rho_q(f) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{(f^*\omega_{FS}^p)_\varepsilon\right\}\cdot\left\{(f^*\omega_{FS}^q)_\varepsilon\right\}\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbf{P}^n}(f^*\omega_{FS}^p)_\varepsilon\wedge(f^*\omega_{FS}^q)_\varepsilon\wedge\omega_{FS}^{n-p-q}\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbf{P}^n\setminus I(f)}(f^*\omega_{FS}^p)_\varepsilon\wedge(f^*\omega_{FS}^q)_\varepsilon\wedge\omega_{FS}^{n-p-q}\\
&\geq \int_{\mathbf{P}^n\setminus I(f)} f^*\omega_{FS}^p\wedge f^*\omega_{FS}^q\wedge\omega_{FS}^{n-p-q}\\
&= \int_{\mathbf{P}^n\setminus I(f)} f^*\omega_{FS}^{p+q}\wedge\omega_{FS}^{n-p-q} = \rho_{p+q}(f).
\end{aligned}
$$

Le cas d'égalité se traite comme précédemment. □

On déduit de (1) que la suite $\{\rho_p(f^k)^{1/k}\}_{k\geq 0}$ est sous-multiplicative et on peut poser:

Définition 2.2.16. *Soit $f:\mathbf{P}^n\to\mathbf{P}^n$ une application rationnelle dominante. Pour tout $0\leq p\leq n$, on définit*

$$\lambda_p(f) := \lim_{k\to\infty}\rho_p(f^k)^{1/k}$$

le p-ième degré dynamique de f.

Proposition 2.2.17. *Invariance birationnelle des degrés dynamiques.*

Soient $f_1, f_2:\mathbf{P}^n\to\mathbf{P}^n$ deux applications rationnelles dominantes et $h:\mathbf{P}^n\to\mathbf{P}^n$ une application birationnelle t.q. $h\circ f_1 = f_2\circ h$. Pour tout $0\leq p\leq n$ on a alors égalité

$$\lambda_p(f_1)=\lambda_p(f_2)$$

entre degrés dynamiques.

Démonstration. L'égalité résulte immédiatement de la Proposition 2.2.15 (1). □

On peut donc étendre la définition à une variété X rationnelle quelconque.

Définition 2.2.18. *Soit $f:X\to X$ une application rationnelle dominante sur une variété rationnelle X muni d'une application birationnelle $h:X\to\mathbf{P}^n$. Pour tout $0\leq p\leq n$ on définit*

$$\lambda_p(f) := \lambda_p(h\circ f\circ h^{-1})$$

le p-ième degré dynamique de f.

On construira à la Section 2.4 des courants positifs fermés de bidegré $(1,1)$ invariant par f^*. La condition suivante jouera un rôle important.

Définition 2.2.19. *Soit $f : X \to X$ une application rationnelle dominante. On dit que f est algébriquement stable ssi pour tout $T \in \mathcal{C}_1^+(X)$ et pour tout $k \geq 0$ on a $(f^k)^*T = (f^*)^k T$.*

On utilisera la caractérisation suivante.

Proposition 2.2.20. *Soit $f : X \to X$ une application rationnelle dominante. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. *f est algébriquement stable;*
2. *il n'existe aucune hypersurface $V \subset X$ t.q. $f^k(V) \subset I(f)$ pour un entier $k \geq 0$;*
3. *pour tout $k \geq 0$ on a $\dim(I(f^k)) \leq n-2$.*

Démonstration. Les deux conditions (2) et (3) sont évidemment équivalentes. Soit $T \in \mathcal{C}_1^+(X)$ et $k \geq 0$. On a $(f^*)^k T = (f^*)^k T$ hors de $X \setminus I(f^k)$.

Si (2) est satisfaite, on a $\dim I(f^k) \leq n-2$ donc $(f^*)^k T = (f^*)^k T$ partout dans X et f est algébriquement stable.

Réciproquement considérons k un entier minimal et V une hypersurface irréductible t.q. $V \subset f^{-k} I(f)$. Prenons une hypersurface W contenant $f^k(V) \subset I(f)$. On a alors $(f^k)^{-1}(W) \cup V \subset f^{-k} W$ et il s'ensuit

$$(f^*)^k [W] \geq (f^k)^* [W] + [V],$$

donc f n'est pas algébriquement stable. $\square$

2.3 Entropie et mélange

Nous donnons ici quelques éléments généraux de théorie ergodique que nous utiliserons au Chapitre 4. La lecture de cette section n'est donc pas strictement nécessaire à la compréhension de la suite du Chapitre 2 et du Chapitre 3.

Soit $f : X \to X$ une application méromorphe dominante d'une variété complexe lisse compacte kählérienne et $\mu \in \mathcal{M}_1^+(X)$ une mesure borélienne positive de masse 1 (i.e. de probabilité). On définit l'image directe $f_*\mu \in \mathcal{M}_1^+(X)$ par

$$f_*\mu(E) := \mu(f^{-1}(E)),$$

pour tout borélien $E \subset X$ et avec $f^{-1}(E) := \pi_1\pi_2^{-1}(E)$ (voir Définition 2.1.1). On dira que μ est f-invariante si $f_*\mu = \mu$.

En général, on imposera de plus $\mu(I(f)) = 0$. Sous cette hypothèse, et si μ est f-invariante, on a $\mu(I(f^\infty)) = 0$, et l'application restreinte $f : X \setminus I(f^\infty) \to X \setminus I(f^\infty)$ laisse invariante la mesure de probabilité $\mu|_{X\setminus I(f^\infty)}$.

Il est de plus important de noter que lorsque $\mu(\mathcal{C}(f)) = 0$ (en particulier $\mu(I(f)) = 0$) et que μ vérifie l'équation d'invariance $f^\bullet\mu = \deg(f)\mu$, alors on a aussi $f_*\mu = \mu$ au sens précédent.

Des notions plus fortes d'invariance jouent un rôle important en théorie des systèmes dynamiques.

Définition 2.3.1.

- *La mesure $\mu \in \mathcal{M}_1^+(X)$ est dite ergodique ssi pour tout borélien $A \subset X$ t.q. $f^{-1}(A) = A$, on a $\mu(A) = 0$ ou 1.*

- *La mesure $\mu \in \mathcal{M}_1^+(X)$ est dite mélangeante ssi pour tout couple de boréliens $A, B \subset X$, on a*

$$\lim_{k\to\infty} \mu(f^{-k}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

Toute mesure mélangeante est ergodique. Le théorème ergodique de Birkhoff indique:

Théorème 2.3.2. *Théorème de Birkhoff.*

Soit $\mu \in \mathcal{M}_1^+(X)$ une mesure ergodique t.q. $\mu(I(f)) = 0$, et $\varphi \in L^1(\mu)$. Alors on a convergence

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \varphi \circ f^i(x) = \int \varphi d\mu$$

pour presque tout $x \in X$.

Notons que la fonction $\varphi \circ f^i$ est bien définie presque partout car on a $\mu(I(f^i)) = \mu(I(f)) = 0$.

L'ergodicité implique donc la coïncidence des moyennes temporelles et spatiales. Notons la caractérisation d'une mesure mélangeante:

Proposition 2.3.3. *Soit $\mu \in \mathcal{M}_1^+(X)$ t.q. $\mu(I(f)) = 0$. Alors μ est mélangeante ssi pour toutes fonctions test $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^\infty(X)$, la convergence*

$$\lim_{k\to\infty} \int \varphi \circ f^k \cdot \psi d\mu = \int \varphi d\mu \int \psi d\mu$$

est satisfaite.

A la Section 2.1, on a défini l'extension naturelle de f que l'on note $\widehat{f} : \Gamma^\infty \to \Gamma^\infty$. On munit Γ^∞ de la tribu engendrée par les cylindres de la forme

$$C(A_{-k}, \cdots, A_k) = \{x^\bullet \in \Gamma^\infty, x_i \in A_i\},$$

pour des boréliens $A_i \subset X$. Cette tribu coïncide avec la tribu des boréliens de Γ^∞ muni de la topologie produit. Si $\mu \in \mathcal{M}_1^+(X)$ est f-invariante, on peut définir une unique mesure $\widehat{\mu} \in \mathcal{M}_1^+(\Gamma^\infty)$ vérifiant les deux conditions

$$\pi_*\widehat{\mu} = \mu \quad \text{et} \quad \widehat{f}_*\widehat{\mu} = \widehat{\mu}.$$

On vérifie facilement le lemme suivant.

Lemme 2.3.4.

- *La mesure μ est ergodique ssi $\widehat{\mu}$ est ergodique.*
- *La mesure μ est mélangeante ssi $\widehat{\mu}$ est mélangeante.*

Rappelons maintenant très brièvement la définition de l'entropie. Nous renvoyons à [W82] pour une étude détaillée de ce concept. On suppose jusqu'à la fin de cette section que μ est f-invariante et que $\mu(I(f)) = 0$.

Soit $\xi = \{A_1, \cdots, A_k\}$ une partition finie de X par des boréliens. On définit l'entropie de ξ par

$$H(\xi) := -\sum_i \mu(A_i) \log \mu(A_i),$$

avec la convention $0 \log 0 = 0$. Si $\xi = \{A_i\}$ et $\eta = \{B_j\}$ sont deux partitions, on note $\xi \vee \eta$ la partition jointe $\xi \vee \eta := \{A_i \cap B_j\}$.

Définition 2.3.5. *L'entropie métrique de f par rapport à μ est le réel $h_\mu(f) \in \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$ défini par*

$$h_\mu(f) := \sup_\xi h(f, \xi),$$

où $h(f,\xi) := \lim_{k\to\infty} k^{-1} H(\bigvee_{i=0}^{k-1} f^{-i}\xi)$.

L'entropie métrique quantifie le degré de complexité du système (f, μ). Elle peut aussi s'interpréter comme une mesure de dilatation en moyenne grâce à la formule de Rohlin-Parry. Nous utiliserons le corollaire suivant (voir [P69] chapitre 10 ou [Br97] pour une reformulation simple).

Proposition 2.3.6. *Formule de Rohlin-Parry*

Soit $f : X \to X$ une application méromorphe dominante t.q. $\deg(f) \geq 2$, *et $\mu \in \mathcal{M}_1^+(X)$ une mesure de probabilité t.q. $\mu(\mathcal{C}(f)) = 0$ et vérifiant $f^\bullet\mu = \deg(f)\mu$ (en particulier $f_*\mu = \mu$). Alors l'inégalité*

$$h_\mu(f) \geq \log|\deg(f)| \tag{2.3}$$

est satisfaite.

Remarque: Les cas d'égalité sont assez difficiles à caractériser. Nous renvoyons à [Ro67] et [Br97] pour des énoncés précis. ♦

Exemple 2.3.7. *Soit $\mathbf{T}$ le tore complexe $\mathbf{T} := \mathbf{C}/\mathbf{Z} + i\mathbf{Z}$, et $A : \mathbf{T} \to \mathbf{T}$ un automorphisme linéaire de $\mathbf{T}$ hyperbolique (i.e. une matrice $A \in M(2, \mathbf{Z})$ t.q. $|\det A| = 1$ et le rayon spectral $\rho(A) > 1$).*

Soit $f : \mathbf{P}^1 \times \mathbf{T} \to \mathbf{P}^1 \times \mathbf{T}$ l'application holomorphe définie par $f(z, x) = (z^2, A.x)$. La mesure μ produit direct des mesures de Lebesgue sur S^1 et sur $\mathbf{T}$ vérifie $f^\bullet\mu = 2\mu$ et ne charge pas $\mathcal{C}(f)$. Cependant, l'estimation

$$h_\mu(f) = \log 2 + \log \rho(A) > \log 2$$

est satisfaite.

On peut aussi définir le concept d'entropie topologique sans faire référence à une mesure invariante particulière.

Soit $g : Y \to Y$ est une application continue d'un espace métrique compact muni de la distance d. On définit pour tout $\varepsilon > 0$ et $k \in \mathbf{N}$ la quantité $s_g(k, \varepsilon)$ comme le nombre maximal de points $\{x_1, \cdots, x_N\}$ t.q. pour tout $\alpha \neq \beta$ on a

$$\max_{0 \leq i \leq k} d(f^i(x_\alpha), f^i(x_\beta)) \geq \varepsilon.$$

On peut alors poser (voir [W82])

$$h_{top}(g) := \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} \log s_g(k, \varepsilon).$$

Définition 2.3.8. *L'entropie topologique d'une application méromorphe dominante $f : X \to X$ d'une variété complexe compacte dans elle-même est par définition*

$$h_{top}(f) := h_{top}(\widehat{f})$$

l'entropie topologique de son extension naturelle.

Le principe variationnel relie les deux notions d'entropie. Dans notre cadre il s'exprime sous la forme (voir [W82]):

Théorème 2.3.9. *Principe variationnel.*

Soit $f : X \to X$ une application méromorphe dominante d'une variété complexe compacte. Alors

$$h_{top}(f) = \sup\{h_{\widehat{\mu}}(\widehat{f}),\ \textit{pour } \widehat{\mu} \in \mathcal{M}_1^+(\Gamma^\infty)\ \textit{et } \widehat{f}_*\widehat{\mu} = \widehat{\mu}\}.$$

Suivant les travaux de Newhouse et Gromov, Friedland ([Fr95]) a relié l'entropie topologique de f au type de croissance des itérés des sous-variétés de X. Les quantités $\lambda_i(f)$ ont été définies à la section précédente.

Théorème 2.3.10. *Théorème 3.5 [Fr95]*

Soit $f : X \to X$ une application rationnelle dominante d'une variété complexe compacte rationnelle. *Alors l'inégalité*

$$h_{top}(f) \leq \max_{0 \leq i \leq n} \log \lambda_i(f) \tag{2.4}$$

est satisfaite.

Lorsque f est une application holomorphe, les travaux de Yomdin impliquent l'égalité dans (2.4). Il est conjecturé que celle-ci reste valable dans le cas méromorphe (voir p.225 [Fr95]).

Notons que les deux théorèmes précédents et la formule de Rohlin-Parry implique le corollaire suivant:

Corollaire 2.3.11. *Soit $f : X \to X$ une application rationnelle dominante d'une surface rationnelle compacte. Supposons que* $\deg(f) = \lambda_2(f) > \lambda_1(f)$ *et qu'il existe une mesure $\mu \in \mathcal{M}_1^+(X)$ t.q. $f^\bullet\mu = \deg(f)\mu$ et $\mu(\mathcal{C}(f)) = 0$.*

Alors μ est d'entropie maximale et l'égalité

$$h_{top}(f) = h_\mu(f) = \log\deg(f)$$

est vérifiée.

Ce résultat sera utilisé au Chapitre 4 pour calculer l'entropie des produits croisés polynomiaux de $\mathbf{C}^2$.

2.4 Courants de Green

Dans cette section $f : X \to X$ est une application méromorphe dominante d'une variété kählérienne compacte connexe lisse de dimension n.

2.4.1 Construction des courants de Green.

Nous construisons des courants positifs fermés de bidegré $(1,1)$ invariants, et étudions leur premières propriétés et leur lien avec la dynamique de f.

Toute application continue d'un espace métrique compact dans lui-même admet une mesure invariante. De manière analogue, on a le résultat général d'existence.

Proposition 2.4.1. *Soit $S \in \mathcal{C}_1^+(X)$ et $\rho > 1$ t.q. $f^*\{S\} = \rho\{S\}$. Alors il existe un courant $T \in \mathcal{C}_1^+(X)$ t.q. l'équation d'invariance*

$$f^*T = \rho T$$

est satisfaite.

En général, ce courant contient peu d'information intéressante sur la dynamique de f et peut être réduit au courant d'intégration sur une hypersurface.

Exemple 2.4.2. *Soit $f : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$ défini en coordonnées homogènes par $f[z : w : t] = [z^d : w^d : t^d]$ pour $d \geq 2$. Relevons f à $\widehat{\mathbf{P}}^2$ l'éclaté de $\mathbf{P}^2$ à l'origine $[0 : 0 : 1]$, et notons E la fibre exceptionnelle. Alors $f^*[E] = d[E]$.*

Démonstration. On pose $\widetilde{S}_j := \rho^{-j}(f^*)^j S$ et $S_j := j^{-1}\sum_{k=0}^{j-1}\widetilde{S}_k$. On a $\{S_j\} = \{S\}$ pour tout j donc la suite de courants S_j est de masse bornée. Soit $S_{i_k} \to T$ une valeur d'adhérence. Alors $\{T\} = \{S\}$ et de $jf^*S_j = \rho(jS_j + \widetilde{S}_j - S)$ on tire à la limite $f^*T = \rho T$ car f est dominante et par suite f^* est continu. □

Le point important est que lorsque $S = \alpha$ est une forme lisse positive, il apparait que la suite $\rho^{-j}(f^*)^j\alpha$ converge. On peut alors espérer que ce courant limite représente une forme d'équidistribution "en moyenne" des courants (en particulier des hypersurfaces) cohomologues à S. Nous ne développerons pas en détail ce dernier point, nous renvoyons aux résultats généraux de [RS97] et au théorème 10.1 de [Si99] pour des énoncés précis allant dans cette direction. Le Chapitre 4 est consacré en à l'étude précise des problèmes d'équidistribution dans le cas des applications birationnelles.

Théorème 2.4.3. *Soit $f : X \to X$ une application méromorphe dominante. Soit α une forme lisse positive fermée de bidegré $(1,1)$ t.q. $\{f^*\alpha\} = \rho\{\alpha\}$ pour $\rho > 1$.*

(1) Alors la suite de courants $\rho^{-j}(f^*)^j\alpha$ converge vers un courant $T(f) \in \mathcal{C}_1^+(X)$ vérifiant

$$f^*T(f) = \rho \cdot T(f).$$

(2) Soit $G \in QPSH(X)$ le potentiel t.q. $T(f) = \alpha + dd^cG$ et $\sup_X G = 0$. Si $Y \not\subset I(f^\infty)$ est une sous-variété invariante $\overline{f(Y \setminus I(f))} = Y$, on a

$$G|_Y \not\equiv -\infty.$$

Démonstration. Par hypothèse $\{f^*\alpha\} = \rho\{\alpha\}$, et par la Proposition 2.2.11, on peut trouver une fonction $U \in \mathrm{QPSH}(X)$ t.q. $\sup_X U = 0$ et

$$f^*\alpha = \rho\alpha + dd^cU.$$

Il vient alors par récurrence pour tout $j \in \mathbf{N}$

$$\frac{1}{\rho^j}(f^*)^j\alpha = \alpha + dd^cU_j,$$

avec $U_j := \sum_{k=1}^j \rho^{-k}U \circ f^{k-1} \in \mathrm{QPSH}(X)$.

La suite U_j est une suite décroissante de fonctions quasi-psh. Soit $G := \lim_{j\to\infty} U_j$. Supposons que $G \not\equiv -\infty$. Plaçons nous localement et écrivons $\alpha = dd^c\phi$ pour une fonction lisse ϕ. Comme $U \leq 0$ la suite de fonctions $\phi + U_i$ est psh décroissante vers $\phi + G \not\equiv -\infty$, donc $\phi + G$ est psh et $U_i \to G$ dans L^1. Il s'ensuit

$$\frac{1}{\rho^j}(f^j)^*\alpha = \alpha + dd^cU_j \longrightarrow \alpha + dd^cG := T(f).$$

De $U_j \circ f + U = \rho U_{j+1}$ on tire l'équation fonctionnelle $U + G \circ f = \rho G$ et par suite $f^*T(f) = \rho T(f)$.

Pour conclure, il suffit de prouver la seconde assertion. Soit $Y \not\subset I(f^\infty)$ une sous-variété invariante $\overline{f(Y \setminus I(f))} = Y$ (en particulier on peut prendre $Y = X$ pour conclure la preuve précédente). Supposons que Y soit lisse. Le morphisme f induit un morphisme méromorphe $f : Y \to Y$ qui est dominant. Considérons la suite de courants $S_k \in \mathcal{C}_1^+(Y)$

$$S_k := \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}(f^*)^j\alpha|_Y = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}(\alpha|_Y + dd^cU_j|_Y).$$

Ces courants sont bien définis car $Y \not\subset I(f^\infty)$ et donc $U \circ f^j|_Y \not\equiv -\infty$. Ils sont de plus cohomologues à $\alpha|_Y$ donc de même masse, on peut en extraire une sous-suite convergeante $S_k \to S \in \mathcal{C}_1^+(Y)$. Le morphisme f est dominant, donc $f^* : \mathcal{C}_1^+(Y) \to \mathcal{C}_1^+(Y)$ est continue, et à la limite on obtient $f^*S = \rho S$.

Lorsque Y est singulière, on se ramène au cas précédent en considérant une modification propre $\pi : \widetilde{X} \to X$ composée d'éclatements de centres lisses t.q. la transformée propre de Y par π soit lisse.

Soit $V \in \mathrm{QPSH}(Y)$ un potentiel de S t.q. $S = \alpha + dd^cV$. De $f^*S = \rho S$ on tire $dd^c(V \circ f - \rho V) + f^*\alpha|_Y - \alpha|_Y = 0$ i.e. $dd^c(V \circ f - \rho V + U) = 0$. Quitte à ajouter une constante à V on peut supposer que $V \leq 0$ et que

$$V \circ f - \rho V + U = 0.$$

Par sommation, on obtient $U_j \geq \rho^{-j} V \circ f^j + U_j = V$. D'où en passant à la limite $G|_Y \geq V \not\equiv -\infty$, ce qui conclut la preuve. $\square$

Proposition 2.4.4. *Sous les hypothèses du Théorème 2.4.3, on note $\mathcal{G}_\rho \subset \mathcal{C}_1^+(X)$ le convexe compact des courants positifs fermés de bidegré $(1,1)$ de masse 1 et t.q. $f^*T = \rho T$.*

Si la classe de cohomologie $\{T(f)\}$ est extrémale dans le sous-espace propre $\ker(f^* - \rho \mathrm{Id}) \subset H^{1,1}(X)$*, le courant $T(f)$ est extrémal dans $\mathcal{G}_\rho$.*

Démonstration. Supposons que $T(f) = 2^{-1}(T_1 + T_2)$ avec $T_i \in \mathcal{G}_\rho$. Par hypothèse, $\{T(f)\}$ est extrémale donc $\{T_i\} = \{T\}$. Soit $U \in \mathrm{QPSH}(X)$ t.q. $\sup_X U = 0$, $f^*\alpha = \alpha + dd^cU$, et $G := \sum_{k \geq 1} \rho^{-k} U \circ f^{k-1} \in \mathrm{QPSH}(X)$ le potentiel de $T(f)$. Il vérifie $G \circ f - \rho G + U = 0$. Soit $G_i \in \mathrm{QPSH}(X)$ des potentiels $T_i = \alpha + dd^c G_i$ t.q. $G_i \circ f - \rho G_i + U = 0$. On obtient par sommation $G_1, G_2 \leq G$. Or $H := 2^{-1}(G_1 + G_2) \leq G$ est un potentiel pour $T(f)$ donc $G - H$ est constant. L'équation fonctionnelle implique $G \equiv H$ d'où $G = G_1 = G_2$. $\square$

Le théorème suivant indique que le courant $T(f)$ construit ci-dessus possède des propriétés dynamiques intéressantes.

Théorème 2.4.5. *On se place sous les hypothèses du Théorème 2.4.3. On note $f^*\alpha = \alpha + dd^cU$ avec $\sup_X U = 0$ et $U_j := \sum_{k=1}^{j} \rho^{-k} U \circ f^{k-1}$. On a $U_j \to G$.*

1. *Le courant $T(f)$ est à support dans $J(f)$.*
2. *Pour tout compact $K \subset\subset \mathcal{N}(f)$ de l'ensemble de normalité de f, on a pour tout $j, k \geq 1$*
$$|U_{j+k} - U_j| \leq \frac{C_K}{\rho^j}.$$
En particulier, la fonction de Green G de $T(f)$ est continue dans $\mathcal{N}(f)$.

Démonstration.

(1) Soit $U \subset F(f)$ un ouvert de l'ensemble de Fatou de f. Quitte à restreindre U, on peut supposer qu'il existe une sous-suite $\{f^{k_i}\}$ convergeant dans U vers une application holomorphe h à valeurs dans un ouvert fixe V. Comme α est lisse , on a convergence $(f^*)^{k_i}\alpha|_U = \left((f^{k_i})^*\alpha\right)|_U \to (h^*\alpha)|_U$. En passant à la limite, on obtient

$$T(f)|_U = \lim_{i \to \infty} \frac{1}{\rho^{k_i}} (f^*)^{k_i} \alpha|_U = \lim_{i \to \infty} \frac{1}{\rho^{k_i}} (h^*)\alpha|_U = 0.$$

(2) Fixons V un voisinage ouvert de $I(f)$ t.q. l'orbite $\mathcal{O}(K) \cap V = \emptyset$. Le courant $f^*\alpha$ est lisse dans $X \backslash V$ donc son potentiel U est borné $\sup_{X\backslash V} |U| \leq C < +\infty$. On vérifie alors immédiatement

$$\sup_K |U_{j+k} - U_j| \leq \sum_{j+1}^{j+k-1} \rho^{-l} |U \circ f^{l-1}| \leq C(\rho - 1)^{-1} \rho^{-j},$$

ce qui conclut la preuve. □

2.4.2 Nombre de Lelong du courant de Green

Cette partie est consacrée à l'étude des singularités des courants de Green construits précédemment. On cherche à caractériser les points très "singuliers" de $T(f)$ i.e. où le nombre de Lelong de $T(f)$ est strictement positif.

Soit $u \in \mathrm{PSH}(\mathbf{C}^n, 0)$. La fonction $r \to \sup_{|z|=r} u(z)$ est une fonction convexe croissante de $\log r$. On peut donc définir le nombre de Lelong de u au point 0 en posant

$$\nu(u, 0) := \max\{c \geq 0, \text{ t.q. } u(z) \leq c \log |z| + O(1)\}.$$

C'est un nombre réel positif. Pour un courant positif fermé de bidegré $(1,1)$ $T \in \mathcal{C}_1^+(X)$ et $p \in X$, le nombre de Lelong de T au point p est par définition $\nu(T, p) := \nu(u, p)$ pour un potentiel psh local quelconque $T = dd^c u$.

On a alors:

Théorème 2.4.6. *On se place sous les hypothèses du Théorème 2.4.3.*

L'ensemble des points $p \in X$ t.q. $\nu(p, T(f)) > 0$ est inclus dans $I(f^\infty)$.

En particulier, lorsque f est algébriquement stable, le courant $T(f)$ ne charge pas les hypersurfaces.

Remarque: En général, $I(f^\infty) \not\subset \{p \in X,\ \nu(p, T(f)) > 0\}$ comme le montre l'Exemple 3.2.6 à la Section 3.2. ♦

La démonstration du théorème est assez technique. Nous la détaillerons à la Section 2.6. Les deux ingrédients principaux sont une estimation précise du nombre de Lelong de l'image réciproque d'un courant (voir Appendice B), ainsi qu'un théorème de récurrence "analytique" (voir Section 2.5.). Donnons une esquisse de preuve.

Esquisse de preuve. Soit $p \in X \setminus I(f^\infty)$ t.q. $\nu(p, T(f)) > 0$. Pour simplifier on supposera que $\mathcal{O}(p) \cap \mathfrak{C}(f) = \emptyset$. La première étape consiste à appliquer des estimées générales pour controler $\nu(p, f^*T(f))$ en fonction de $\nu(f(z), T(f))$ (voir Appendice B). Si $e(p, f)$ est le degré de ramification local de f en p, on a

$$\nu(p, f^*T(f)) \leq e(p, f) \times \nu(f(p), T(f)).$$

On peut itérer cette inégalité, et on obtient en notant $C := \sup_{q\in X} \nu(q, T(f))$ et en utilisant l'invariance de $T(f)$:

$$0 < \nu(p, T(f)) \leq C \times \rho^{-j} \prod_{k=0}^{j-1} e(f^k(p), f).$$

Ceci force le point p à passer de manière récurrente dans l'ensemble critique $\mathcal{C}(f) = \{e(., f) \geq 2\}$. Le deuxième ingrédient consiste alors à prouver que dans ce cas, p possède des propriétés de récurrence forte (voir Théorème 2.5.14): un des itérés de p appartient à une sous-variété propre de X invariante par f. Supposons pour simplifier que p soit lui-même périodique. On applique alors le point (2) du Théorème 2.4.3 pour conclure que le potentiel de $T(f)$ vérifie $G(p) > -\infty$. Ceci contredit alors l'hypothèse $\nu(p, T(f)) > 0$. □

2.5 Multiplicités asymptotiques

Dans cette section, nous démontrons un théorème général de récurrence forte pour des applications analytiques. Celui-ci est un des ingrédients principaux dans la preuve du Théorème 2.4.6. Nous nous plaçons tout d'abord dans le cadre abstrait des espaces topologiques noethériens (voir [Ha77] p.5) avant de particulariser notre résultat au cas précis qui nous intéresse.

Définition 2.5.1. *Un espace topologique X est dit noethérien si toute suite décroissante de fermés $F_{n+1} \subset F_n$ est stationnaire à partir d'un certain rang i.e. il existe un entier $N \in \mathbf{N}$ t.q. $\forall n \geq N$, $F_n = F_N$.*

Si $V \subset X$ est fermé dans X, la topologie induite sur V est encore noethérienne. Un fermé V de X est dit irréductible si toute égalité $V = F_1 \cup F_2$ avec F_1, F_2 fermés implique $V = F_1$ ou $V = F_2$. Tout fermé V d'un espace noethérien se décompose de manière unique en un nombre fini de composantes irréductibles $V = V_1 \cup \cdots \cup V_k$ (voir [Ha77] p.5).

Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.5.2. *Soit $f : X \to X$ une application continue d'un espace topologique noethérien dans lui-même. Si $V \subset X$ est un fermé irréductible, $f(V)$ est irréductible.*

Démonstration. Soit F_1, F_2 deux fermés t.q. $f(V) = F_1 \cup F_2$. On peut donc écrire V comme union de deux fermés $V = \big(V \cap f^{-1}(F_1)\big) \cup \big(V \cap f^{-1}(F_2)\big)$. Comme V est irréductible, on peut supposer que $V = V \cap f^{-1}(F_1) \subset f^{-1}(F_1)$. D'où $f(V) \subset F_1 \subset f(V)$. Par suite $f(V) = F_1$ et $f(V)$ est irréductible. □

Définition 2.5.3. *Soit X un espace topologique noethérien. On note $\widehat{X}$ l'ensemble des fermés non-vides de X.*

Pour $V \subset X$, notons $F_V := \{W$ fermés t.q. $W \subset V\}$. La collection $\{F_V\}_{V \subset X}$ de parties de $\widehat{X}$ définit une topologie noethérienne sur $\widehat{X}$.

En effet, on vérifie immédiatemment $F_\emptyset = \emptyset$, $F_X = \widehat{X}$, $\cup F_{V_i} = F_{\cup V_i}$, et $\cap F_{V_i} = F_{\cap V_i}$.

Définition 2.5.4. *Une fonction $\tau : X \to \mathbf{R}_+^*$ est semi-continue supérieure (s.c.s.) ssi pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $\{\tau \geq \varepsilon\}$ est fermé.*

Lemme 2.5.5. *Toute fonction s.c.s. sur un espace noethérien est bornée supérieurement.*

Démonstration. La suite $F_k := \{\tau \geq k\}$ définit une suite décroissante de fermés de X t.q. $\cap_{k \in \mathbf{N}} F_k = \emptyset$. Comme X est noethérien, on en déduit qu'il existe $N \in \mathbf{N}$ t.q. $F_N = \{\tau \geq N\} = \emptyset$. □

Si $\tau : X \to \mathbf{R}_+^*$ est s.c.s., on définit son extension à $\widehat{X}$ (que l'on note encore abusivement τ) par

$$\tau(V) := \inf_{x \in V} \tau(x).$$

Par convention, on pose $\tau(\emptyset) := \max_{x \in X} \tau(x)$. En général, on ne peut remplacer l'infimum par un minimum.

Exemple 2.5.6. *Soit $X = \mathbf{N}$ muni de la topologie définie par les sous-parties finies de $\mathbf{N}$. Soit $\tau(k) := 1/k$. Alors $\tau(X) = 0$.*

Proposition 2.5.7. *Si $\tau : X \to \mathbf{R}_+^*$ est s.c.s. son extension $\tau : \widehat{X} \to \mathbf{R}_+^*$ est encore s.c.s.*

Démonstration. On vérifie immédiatement $\{\tau \geq \varepsilon\} = F_{\{\tau \geq \varepsilon\}}$. □

Le théorème principal peut s'énoncer de la manière suivante.

Théorème 2.5.8. *Soit X un espace topologique noethérien, $f : \widehat{X} \to \widehat{X}$ une application continue et $\tau : X \to \mathbf{R}_+^*$ une fonction s.c.s.*

Fixons $V \in \widehat{X}$ un fermé irréductible de X.

1. *On a convergence de la suite*

$$\left(\prod_{j=0}^{k-1} \tau\left(f^j(V)\right) \right)^{1/k} \longrightarrow \tau_\infty(V), \tag{2.5}$$

   et $\tau_\infty(f(V)) = \tau_\infty(V)$.

2. *Notons $L(V) := \cap_{k \geq 0} \overline{\{f^j(V); j \geq k\}}$ l'ensemble limite de V. Alors*
   - *$f(L(V)) = L(V)$.*
   - *Il existe un entier $N \in \mathbf{N}$ t.q. $f^N(V) \subset L(V)$, et l'ensemble $\{f^{N+k}(V), k \geq 0\}$ est dense dans $L(V)$.*
   - *On peut décomposer $L(V)$ en p composantes irréducibles distinctes, $L(V) = L_1 \cup \cdots \cup L_p$ t.q. $f(L_i) = L_{i+1}$ modulo (p).*
   - *On a $\tau_\infty(V) = \tau_\infty(L_i) = (\prod_1^p \tau(L_i))^{1/p}$ pour tout $i = 1, \cdots, p$.*

L'idée principale du théorème est que lorsque $\tau_\infty(V) > \inf_{x \in X} \tau(x)$, le fermé V possède des propriétés de récurrence: il appartient à un sous-ensemble fermé strict $L(V)$ fixé par f.

Remarque: Le théorème précédent se généralise aux cocycles sous-multiplicatifs. On peut remplacer $\prod_{j=0}^{k-1} \tau(f^j(x))$ par une suite de fonctions s.c.s $\tau_k(x)$ vérifiant pour tout $k, l \in \mathbf{N}$ l'inégalité

$$\tau_{k+l}(x) \leq \tau_k(x) \times \tau_l(f^k(x)).$$

Les conclusions restent alors les mêmes. ♦

Avant de donner la preuve du théorème, précisons le cadre dans lequel il sera appliqué.

Une variété analytique X compacte munie de la topologie de Zariski définit un espace topologique noethérien.

Lemme 2.5.9. *Soit X une variété analytique compacte et $f : X \to X$ une application méromorphe. Pour toute sous-variété $V \subset X$, notons $f(V) := \overline{f|_{D(f)}(V)}$ (voir Définition 2.1.1).*

Alors $f : \widehat{X} \to \widehat{X}$ est continue.

Démonstration. Soit V une sous-variété de X, et Y une sous-variété irréductible. On a la série d'équivalences:

$$\begin{aligned} Y \in f^{-1}(F_V) &\iff f(Y) \subset V \\ &\iff \pi_2\pi_1^{\bullet}(Y) \subset V \\ &\iff \pi_1^{\bullet}(Y) \subset \pi_2^{-1}(V), \end{aligned}$$

où $\pi_1^{\bullet}(Y) := \overline{\pi_1^{-1}(Y \setminus I(f))}$ est la transformée stricte de Y par la modification propre π_1. Comme Y est irréductible, $Y = \overline{Y \setminus I(f)} \cup (I(f) \cap Y)$ implique soit $Y = Y \cap I(f) \subset I(f)$, soit $Y = \overline{Y \setminus I(f)}$.

Dans le premier cas, $\pi_1^{\bullet}(Y) = \emptyset$. Dans le second cas,

$$\begin{aligned} \pi_1^{\bullet}(Y) \subset \pi_2^{-1}(V) \Longrightarrow Y = \overline{Y \setminus I(f)} &= \overline{\pi_1\left(\pi_1^{\bullet}(Y) \setminus \pi_1^{-1}(I(f))\right)} \\ &\subset \overline{\pi_1\left(\pi_2^{-1}(V) \setminus \pi_1^{-1}(I(f))\right)} \subset \pi_1\pi_2^{-1}(V), \end{aligned}$$

et dans l'autre sens π_1 est injective hors de $\pi_1^{-1}(I(f))$ et

$$\begin{aligned} Y \subset \pi_1\pi_2^{-1}(V) \Longrightarrow \pi_1^{\bullet}(Y) &= \overline{\pi_1^{-1}(Y) \setminus \pi_1^{-1}(I(f))} \\ &\subset \overline{\pi_2^{-1}(V) \setminus \pi_1^{-1}(I(f))} \subset \pi_2^{-1}(V). \end{aligned}$$

On a donc prouvé $f^{-1}(F_V) = F_{f^{-1}(V) \cup I(f)}$ et f est bien continue. □

L'exemple de fonction s.c.s. que nous utiliserons est le suivant.

Définition 2.5.10. *Soit X une variété analytique compacte et $f : X \to X$ une application holomorphe finie i.e. $f^{-1}\{z\}$ est fini pour tout $z \in X$.*

On définit $e(z, f)$ le degré de ramification de f au point z c'est-à-dire le nombre de préimages dans une petite boule centrée en z d'un point générique proche de $f(z)$.

L'entier $e(z, f)$ est le degré topologique local de f en z. En particulier, $\{e(., f) \geq 2\} = \mathcal{C}(f)$ l'ensemble critique de f. De plus, on a la formule de composition:

$$e(z, f \circ g) = e(z, g) \times e(g(z), f), \tag{2.6}$$

pour deux germes finis f, g.

La remarque fondamentale est la suivante.

Lemme 2.5.11. *Soit X une variété analytique compacte, et $f : X \to X$ une application holomorphe finie. La fonction $z \to e(z, f)$ est s.c.s. pour la topologie de Zariski de X.*

Démonstration. Le problème est local, on peut donc supposer que f est définie dans la boule unité $B \subset \mathbf{C}^n$ et à valeurs dans B. Soit $V \subset B \times B$ le sous-espace analytique défini par l'équation $f(x) = f(y)$. Notons $e(V, p)$ la multiplicité au point p de la variété V i.e. le degré topologique de la restriction à V d'une projection linéaire générique sur un sous-espace linéaire de dimension $\dim(V) = n$. Admettons pour l'instant l'égalité

$$e(V, (x, x)) = e(x, f). \tag{2.7}$$

Pour tout entier $k \in \mathbf{N}$, l'ensemble $\{p \in V, e(V, p) \geq k\}$ est alors un sous-ensemble analytique par Theorem 3.8E de [Wh72] ou Proposition 4.1. de [Li82]. On en déduit que l'ensemble

$$\{x \in B, e(x, f) \geq k\} = \imath^{-1}(\{p \in V, e(V, p) \geq k\}),$$

est aussi analytique, où $\imath(x) := (x, x)$ est l'injection de B dans la diagonale de $B \times B$.

Il reste donc à prouver (2.7). On peut supposer que $x = 0$ et on fixe une petite boule $D = B(0, \rho)$ de diamètre $\rho \ll 1$ et on note $\rho' := \mathrm{dist}(0, f(\partial D))$.

Pour un choix générique (dense) de réel $\varepsilon \ll 1$ et de point $\alpha \in D$, on a

$$\begin{aligned} e(V, 0) &= \text{Card } \{(x, y), f(x) = f(y) \text{ et } x - \varepsilon y = \alpha\} \\ &= \text{Card } \{y, f(\alpha + \varepsilon y) = f(y)\}, \\ e(0, f) &= \text{Card } \{y, f(\alpha) = f(y)\}. \end{aligned}$$

Quitte à choisir α assez proche de 0, on peut toujours supposer que l'on a $\mathrm{dist}(f(\alpha), f(\partial D)) \geq \rho'/2$. Posons $F(y) := f(\alpha + \varepsilon y) - f(y)$, et $G(y) := f(\alpha) - f(y)$. Les équations précédentes donnent $e(V, 0) =$ Card $F^{-1}\{0\}$ et Card $G^{-1}\{0\} = e(0, f)$. Pour tout point $y \in \partial D$, on a

$$\begin{aligned} |F(y) - G(y)| &= |f(\alpha + \varepsilon y) - f(\alpha)| \leq C(f)\varepsilon|y| \leq C(f)\varepsilon\rho; \\ |G(y)| &= |f(\alpha) - f(y)| \geq \rho'/2, \end{aligned}$$

où $C(f) = \sup_{B(0,1)} \|Df\|$. Si on choisit $\varepsilon < (2\rho C(f))^{-1}\rho'$, on a $|F - G| < |G|$ sur ∂D. On peut donc appliquer le théorème de Rouché pour conclure

$$e(V, 0) = \text{ Card } F^{-1}\{0\} = \text{ Card } G^{-1}\{0\} = e(0, f).$$

Ceci conclut la preuve. $\square$

Dans notre cas, nous avons à considérer des applications méromorphes. En général, f n'est pas localement fini en tout point car $I(f) \cup \mathfrak{C}(f) \neq \emptyset$. On adopte donc la convention suivante.

Rappelons que $\deg(f)$ est le maximum du nombre de préimages d'un point $z \in X$ dont la fibre $f^{-1}\{z\}$ est finie.

Définition 2.5.12. *Soit X une variété complexe compacte, $f : X \to X$ une application méromorphe dominante et $C > \deg(f)$ un réel arbitraire.*

- *Si $z \notin \mathfrak{C}(f) \cup I(f)$, on pose $e^C(z, f) := e(z, f)$.*
- *Lorsque $z \in \mathfrak{C}(f) \cup I(f)$, on pose par convention $e^C(z, f) := C$.*

Proposition 2.5.13. *Soit X une variété complexe compacte, $f : X \to X$ une application méromorphe dominante et $C > \deg(f)$. Alors l'application $z \to e^C(z, f)$ est s.c.s. par rapport à la topologie de Zariski.*

Démonstration.

Considérons tout d'abord le cas d'une fonction holomorphe $f : \Gamma \to X$ d'une variété complexe compacte (non nécessairement lisse) dans une autre. Comme f est propre, on peut trouver une factorisation de Stein de f. Il existe une variété complexe compacte Y, une application holomorphe à fibres connexes $g : \Gamma \to Y$ et une application holomorphe à fibres finies $h : Y \to X$ t.q. $f = h \circ g$.

Soit $y \in \Gamma$ un point arbitraire. Si le sous-ensemble analytique $f^{-1}\{f(y)\}$ est discret au point y (i.e. $y \notin \mathfrak{C}(f)$), l'application g définit un biholomorphisme local au voisinage de y et on a

$$e^C(y, f) = e(y, f) = e(y, g) \times e(g(y), h) = e(g(y), h).$$

Sinon $y \in \mathfrak{C}(f)$ et par convention on a

$$e^C(y, f) = C.$$

On vérifie donc pour tout entier $k \leq C$ que

$$\begin{aligned} \{y \in \Gamma, e(y, f) \geq k\} &= \{y \in \Gamma, e(g(y), h) \geq k\} \cup \mathfrak{C}(f) \\ &= g^{-1}\{y \in \Gamma, e(y, h) \geq k\} \cup \mathfrak{C}(f), \end{aligned}$$

et par suite que la fonction $y \mapsto e^C(y, f)$ est bien s.c.s.

Si maintenant $f : X \to X$ possède des points d'indétermination, on note Γ son graphe et π_1, π_2 les deux projections (propres) de Γ sur X. Notons que $\deg(f) = \deg(\pi_2)$. On vérifie immédiatemment que l'on a pour tout entier $k \leq C$ l'égalité

$$\{x \in X, e^C(f, x) \geq k\} = \pi_1\{y \in \Gamma, e^C(y, \pi_2) \geq k\} \cup I(f).$$

Ceci conclut la preuve. $\square$

On peut donc réécrire le Théorème 2.5.8 dans le cadre analytique sous la forme:

Théorème 2.5.14. *Soit X une variété complexe compacte, $f : X \to X$ une application méromorphe dominante, et $C > \deg(f)$.*

Fixons $V \subset X$ une sous-variété irréductible.

1. *On a convergence de la suite*

$$\left(\prod_{j=0}^{k-1} e^C(f^j(V), f)\right)^{1/k} \longrightarrow e_\infty^C(V, f), \tag{2.8}$$

et $e_\infty^C(f(V), f) = e_\infty^C(V, f)$.

2. *Notons $L(V) := \cap_{k\geq 0}\overline{\{f^j(V); j \geq k\}}$ l'ensemble limite de V. Alors*

   - *$f(L(V)) = L(V)$.*
   - *Il existe un entier $N \in \mathbf{N}$ t.q. $f^N(V) \subset L(V)$, et l'ensemble $\{f^{N+k}(V), k \geq 0\}$ est dense dans $L(V)$.*
   - *On peut décomposer $L(V)$ en p composantes irréducibles distinctes, $L(V) = L_1 \cup \cdots \cup L_p$, t.q. $f(L_i) = L_{i+1}$ modulo (p).*
   - *On a $e_\infty^C(V, f) = (\prod_1^p e^C(L_i, f))^{1/p} = e_\infty^C(L_i, f)$ pour tout $i = 1, \cdots, p$.*

Remarque: Lorsque $z \notin \mathfrak{C}(f^\infty) \cup I(f^\infty)$, l'équation (2.8) donne

$$\lim_{k\to\infty} e(z, f^k)^{1/k} = e_\infty(z, f).$$

On appelle $e_\infty(z, f)$ la multiplicité asymptotique de f en z.

Remarquons que pour tout point hors d'une union dénombrable de sous-variété, on a $e_\infty(z, f) = 1$. ♦

Le reste de cette section est consacrée à la preuve du Théorème 2.5.8.

Démonstration. Théorème 2.5.8.

On notera dans toute la preuve $[t]$ la partie entière de $t \in \mathbf{R}$, $|E|$ le cardinal de l'ensemble fini E, et $[\![1, k]\!] := \{1, \cdots, k\}$ pour $k \in \mathbf{N}$.

La preuve est basée sur le principe d'induction noethérienne que nous rappellons (voir [Ha77] p.93).

Soit $\mathcal{P}$ une propriété des fermés de X. Supposons que pour tout fermé $Y \subset X$, on ait l'implication: $\mathcal{P}$ est vraie pour tous les fermés strictement inclus dans Y implique $\mathcal{P}$ est vraie pour Y. Alors X satisfait $\mathcal{P}$.

Démontrons les deux premières assertions en utilisant ce principe. La propriété, notée $\mathcal{P}$, que nous considérons est la suivante:

$\mathcal{P}$ *Pour toute fonction s.c.s.* $\tau : Y \to \mathbf{R}_+^*$, *toute application continue* $f : \widehat{Y} \to \widehat{Y}$ *et tout fermé* $V \subset Y$ *satisfaisant*

$$\overline{\tau}_\infty(V) := \overline{\lim_{k\to\infty}} \left(\prod_{j=0}^{k-1} \tau(f^j(V)) \right)^{1/k} > \tau(Y) = \inf_Y \tau,$$

les deux assertions suivantes sont vérifiées:

- *la limite* $\tau_\infty(V)$ *existe,*
- *l'assertion 2. du théorème est valable pour* V.

Prouvons tout d'abord que la propriété $\mathcal{P}$ implique les assertions 1. et 2. du théorème. L'invariance de τ_∞ par f est immédiate (voir Lemme 2.5.16 ci-dessous). Si $\overline{\tau}_\infty(V) > \tau(X)$, alors 1. et 2. sont vérifiées par $\mathcal{P}$. Sinon $\overline{\tau}_\infty(V) = \tau(X)$ et $\tau_\infty(V) = \tau(X)$. Prouvons dans ce cas l'assertion 2. Tout ensemble limite est invariant $f(L(V)) = L(V)$. D'autre part, $L(V)$ est défini comme intersection d'une suite décroissante de fermés donc il existe $N \in \mathbf{N}$ t.q. $\overline{\{f^k(V), k \geq N\}} = L(V)$, et $f^N(V) \in \overline{\{f^k(V), k \geq N\}} \subset L(V)$. Décomposons $L(V) = L_1 \cup \cdots \cup L_p$ en composantes irréductibles. L'application f induit une permutation sur l'ensemble fini $\{L_i\}$ qui est transitive donc cyclique. Quitte à renuméroter les L_i, on a $f(L_i) = L_{i+1}$ modulo p. Enfin de $f^N(V) \subset L_i$, on déduit pour tout $k \geq 0$, $\tau(f^{N+k}(V)) \geq \tau(f^k(L_i))$. Il s'ensuit

$$\tau(X) \leq \overline{\tau}_\infty(L_i) \leq \overline{\tau}_\infty(f^N(V)) = \tau_\infty(V) = \tau(X),$$

ce qui conclut la preuve de $\mathcal{P} \Rightarrow$ 1. et 2.

Démontrons maintenant $\mathcal{P}$ par récurrence noethérienne. Soit $Y \subset X$ un fermé de X, et supposons que pour tout fermé strict de V, la propriété $\mathcal{P}$ est vérifiée. Il faut prouver que Y vérifie $\mathcal{P}$.

Soit donc $V \subset Y$ t.q. $\overline{\tau}_\infty(V) > \tau(Y)$. Le point crucial est contenu dans le lemme suivant. Celui-ci peut être vu comme un analogue (très simple) du théorème de Szemeredi. Si $E \subset \mathbf{N}$ est un sous-ensemble d'entiers, on note $\overline{d}(E) := \overline{\lim}_{n\to\infty} n^{-1}|E \cap [\![1, n]\!]|$ la densité supérieure de E.

Lemme 2.5.15. *Soit* $E \subset \mathbf{N}$ *un sous-ensemble d'entiers de densité supérieure positive* $\overline{d}(E) \geq \theta > 0$. *Alors il existe* $l \in \mathbf{N}$ *et* $\theta' > 0$ *ne dépendant que de* θ *t.q. l'inégalité*

$$\overline{d}(E \cap E + l) \geq \theta' > 0$$

soit satisfaite.

Fixons $\varepsilon > 0$ t.q. $\overline{\tau}_\infty(V) \geq \tau(Y) + 2\varepsilon$, et notons

$$\mathcal{C} := \{\tau \geq \tau(Y) + \varepsilon\} \subset \widehat{Y}.$$

Comme l'extension de τ à $\widehat{Y}$ est s.c.s., le sous-ensemble $\mathcal{C}$ est un fermé strictement inclus dans $\widehat{Y}$. On pose $C := 1 + \max_Y \tau$, et on introduit l'ensemble des entiers

$$E_0 := \{j \in \mathbf{N},\ \text{t.q. } f^j(V) \in \mathcal{C}\}.$$

On a pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$\left(\prod_{j=0}^{k-1} \tau(f^j(V))\right)^{1/k} \leq (\tau(Y) + \varepsilon) C^{k^{-1}|E_0 \cap [\![1,k]\!]|},$$

d'où en passant à la limite supérieure,

$$\overline{d}(E_0) \geq \theta_0 > 0,$$

avec $\theta_0 := (\log C)^{-1}(\log(\tau(Y)+2\varepsilon) - \log(\tau(Y)+\varepsilon))$. On peut donc appliquer le Lemme 2.5.15 à l'ensemble E_0. Il existe $l_1 \in \mathbf{N}$, $\theta_1 > 0$, t.q. $E_1 := E_0 \cap E_0 + l_1$ satisfait $\overline{d}(E_1) \geq \theta_1 > 0$. Soit $\mathcal{C}_1 := \mathcal{C} \cap f^{-l_1}(\mathcal{C})$. Comme f est continue, $\mathcal{C}_1$ est fermé, et on pose $E_1 = \{j \in \mathbf{N} \text{ t.q. } f^j(V) \in \mathcal{C}_1\}$.

Par une application répétée du Lemme 2.5.15, on peut construire par récurrence quatre suites $l_n \in \mathbf{N}$, $\theta_n > 0$, $E_n \subset \mathbf{N}$ et $\mathcal{C}_n \in \widehat{Y}$ t.q.

$$\begin{aligned} E_{n+1} &:= E_n \cap E_n + l_{n+1}, && (2.9)\\ \overline{d}(E_n) &\geq \theta_n > 0, && (2.10)\\ \mathcal{C}_{n+1} &:= \mathcal{C}_n \cap f^{-l_{n+1}}(\mathcal{C}_n), && (2.11)\\ E_n &= \{j \in \mathbf{N} \text{ t.q. } f^j(V) \in \mathcal{C}_n\}. && (2.12) \end{aligned}$$

Comme $\widehat{Y}$ est noethérien, la suite décroissante de fermés $\mathcal{C}_n$ est stationnaire à partir d'un certain rang N. D'où $\mathcal{C}_N = \mathcal{C}_N \cap f^{-l_N}(\mathcal{C}_N)$ et $f^{l_N}(\mathcal{C}_N) \subset \mathcal{C}_N$.

Soit $Z := \bigcup \mathcal{C}_N = \bigcup_{F \in \mathcal{C}_N} F \subset Y$. L'ensemble $\mathcal{C}_N$ est fermé donc Z est fermé. On a

$$\begin{aligned} Z := \bigcup \mathcal{C}_N \subset \bigcup \mathcal{C} &= \bigcup F \text{ pour } F \in \widehat{Y} \text{ et } \inf_F \tau \geq \tau(Y) + \varepsilon,\\ &\subset \{\tau \geq \tau(Y) + \varepsilon\} \subsetneq Y, \end{aligned}$$

donc Z est un fermé strict de Y. Par ailleurs $f^{l_N}(\mathcal{C}_N) \subset \mathcal{C}_N$ implique $f^{l_N}(Z) \subset Z$, et la fonction $\tau_{l_N} := \prod_{j=0}^{l_N-1} \tau \circ f^j$ est s.c.s. sur Z.

Par construction des E_n, l'orbite de V intersecte $\mathcal{C}_n$ pour tout n. On peut donc trouver un entier $L \in \mathbf{N}$ t.q. $f^L(V) \in Z$.

Appliquons l'hypothèse de récurrence au triplet (Z, f^{l_N}, τ_{l_N}) et au fermé $f^L(V) \subset Z$. La suite $(\prod_{j=0}^{k-1} \tau_{l_N}(f^{l_N j}(V)))^{1/k}$ converge, et 2. est vérifiée pour f^{l_N} et τ_{l_N}.

Pour conclure, il faut comparer les assertions 1. et 2. du Théorème 2.5.8 pour f et pour un itéré. Les deux lemmes suivants suffisent à conclure que $\tau_\infty(V)$ existe et que 2. est satisfaite, et par suite que $\mathcal{P}$ est vraie pour X. □

Lemme 2.5.16. *Si $f^L(V)$ satisfait 1. et 2. du Théorème 2.5.8 alors V satisfait aussi 1. et 2.*

Lemme 2.5.17. *Si V satisfait les assertions 1. et 2. du Théorème 2.5.8 pour l'application f^l et la fonction τ_l pour un certain entier l, alors V satisfait 1. et 2. pour f et τ.*

Démonstration. Lemme 2.5.16.

On a $L(f^L(V)) = L(V)$ donc il suffit de vérifier que $\tau_\infty(V)$ existe, et que $\tau_\infty(V) = \tau_\infty(f^L(V))$. Or

$$\tau_\infty(V) = \lim_{k\to\infty} \left(\prod_{j=0}^{k-1} \tau\left(f^j(V)\right) \right)^{1/k} =$$

$$\lim_{k\to\infty} \left(\prod_{j=0}^{L-1} \tau\left(f^j(V)\right) \right)^{1/k} \times \left(\prod_{j=0}^{k-L-1} \tau\left(f^j(f^L(V))\right) \right)^{1/k} = \tau_\infty(f^L(V)),$$

ce qui conclut la preuve. □

Démonstration. Lemme 2.5.17.

Notons $L_{f^j}(V)$ l'ensemble limite de V par f^j. Le lemme précédent implique pour $r = 0, \cdots, l-1$, $\tau_{l,\infty}(f^r(V))$ existe et $\tau_{l,\infty}(f^r(V)) = \tau_{l,\infty}(V)$. Pour tout entier $k \in \mathbf{N}$, on écrit $k - 1 = pl + r$ avec $r < l$, et on a

$$\left(\prod_{j=0}^{k-1} \tau\left(f^j(V)\right) \right)^{1/k} = \left(\prod_{j=0}^{r-1} \tau\left(f^j(V)\right) \right)^{1/k} \times \left(\prod_{j=0}^{p} \tau_l\left(f^{lj}(f^r(V))\right) \right)^{1/k}. \tag{2.13}$$

Le premier terme tend vers 1 tandis que le second converge vers $\tau_{l,\infty}^{1/l}(V)$, ce qui donne l'assertion 1.

Pour 2., on vérifie que

$$\bigcup_{j=0}^{l-1} f^j(L_{f^l}(V)) = L_f(V). \tag{2.14}$$

On en déduit les assertions suivantes.

- On a
$$f(L_f(V)) = f^l(L_{f^l}(V)) \bigcup_{j=1}^{l-1} f^j(L_{f^l}(V)) = L_f(V).$$

- Par hypothèse, on peut trouver $N \geq 1$ t.q.
$$f^{Nl}(V) \subset L_{f^l}(V) \subset L_f(V).$$
D'autre part, $\{f^{(N+k)l}(V), k \geq 0\}$ est dense dans $L_{f^l}(V)$, donc l'équation (2.14) montre que $\{f^{Nl+k}(V), k \geq 0\}$ est dense dans $L_f(V)$.

- Décomposons en composantes irréductibles $L_{f^l}(V) = L'_1 \cup \cdots \cup L'_M$ où f^l permute cycliquement les L'_j. Notons $L_{ij} := f^j(L'_i)$. Ce sont des fermés irréductibles, et f agit transitivement sur $\{L_{ij}\}$ car l'ensemble $\{f^{Nl+k}(V), k \geq 0\}$ est dense dans $L_f(V)$. On peut donc les renuméroter de telle sorte que f les permute cycliquement.

- On a
$$\tau_\infty(V) = \tau_{l,\infty}^{1/l}(V) = \tau_{l,\infty}^{1/l}(L'_i) = \tau_\infty(L'_i),$$
où la première et la dernière égalités résultent de 2.13.

Ceci conclut la preuve du Lemme 2.5.17. □

Enfin terminons cette section par la preuve du Lemme 2.5.15. Celui-ci est une conséquence du lemme suivant en prenant $E_i := E \cap [\![1, i]\!]$.

Lemme 2.5.18. *Soit $\theta > 0$ et $\{E_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ une suite de sous-ensembles d'entiers $E_i \subset [\![0, n_i - 1]\!]$ t.q. $|E_i| \geq \theta n_i$.*

Alors il existe un entier $l \leq L := 1 + [\theta^{-1}]$ et un réel positif $0 < \theta' < L^{-1}(\theta - L^{-1})(L-1)^{-1}$ t.q. pour une infinité de choix de i, on a
$$|E_i \cap E_i + l| \geq \theta' n_i. \tag{2.15}$$

Démonstration. Lemme 2.5.18

La preuve du lemme est simplement combinatoire. Définissons les ensembles $F_i := \{1 \leq k \leq [n_i L^{-1}]; |[\![(k-1)L, kL-1]\!] \cap E_i| \geq 2\}$. Alors, on a
$$|E_i| \leq [n_i L^{-1}] + (L-1)|F_i| + (n_i - [n_i L^{-1}]L),$$
et on en déduit que
$$\theta n_i - [n_i L^{-1}] \leq (L-1)|F_i| + L.$$
Il s'ensuit pour i assez grand, et $\theta' < (\theta - L^{-1})(L-1)^{-1}$:
$$|F_i| \geq \theta' n_i.$$

Pour tout ces choix de i, nous avons donc

$$|\{k_1 < k_2 \in E_i, k_1 - k_2 \leq L\}| \geq \theta' n_i.$$

Celà donne l'existence d'entiers $0 < k(i) \leq L$ t.q. $|E_i \cap E_i + k(i)| \geq \theta' L^{-1} n_i$. On conclut alors en extrayant une sous-suite convenable parmi les E_i. $\square$

2.6 Preuve du Théorème 2.4.6

Nous donnons dans cette section la preuve du Théorème 2.4.6. Rappelons que $f : X \to X$ est une application méromorphe dominante d'une variété complexe lisse connexe compacte dans elle-même et que $T := T(f) = \lim_{j\to\infty} \rho^{-j}(f^*)^j\alpha$ est un courant de Green associé à une forme $(1,1)$ lisse fermée α satisfaisant $f^*\{\alpha\} = \rho\{\alpha\}$. On a la propriété d'invariance $f^*T = \rho T$.

Soit $z \in X$ t.q. $\nu(z,T) > 0$ et supposons que $z \notin I(f^\infty)$. On cherche une contradiction.

Notons $L(z)$ l'ensemble limite de z et appliquons le point 2. du Théorème 2.5.14. L'ensemble analytique $L(z)$ est invariant $f(L(z)) = L(z)$, et quitte à remplacer z par un de ses itérés, et f par un de ses itérés on peut supposer que $L(z)$ est irréductible, que $z \in L(z)$ et que $\overline{\mathcal{O}(z)} = L(z)$ pour la topologie de Zariski. Notons que par invariance de T et par le Corollaire B.1.4, la propriété $\nu(z,T) > 0$ est preservée pour tous les itérés de z.

L'ensemble analytique $L(z) \subset X$ peut être singulier. Nous considérerons donc les notions de fonctions psh, de courants positifs fermés de bidegré $(1,1)$ et leur nombre de Lelong associé sur des espaces singuliers (voir [De85]). Nous détaillerons quelques points à la fin de cette section pour la convenance du lecteur. En particulier, nous démontrerons le lemme suivant (voir Corollaire B.1.4):

Lemme 2.6.1. *Soit $g : Y \to Y$ une application méromorphe dominante d'un espace analytique singulier irréductible compact dans lui-même et $S \in \mathcal{C}_1^+(Y)$ admettant localement en tout point un potentiel psh. Alors il existe une constante $C > 0$ t.q. pour tout $z \notin I(g)$ on a l'inégalité*

$$\nu(z, g^*S) \leq C \times \nu(g(z), S)$$

entre nombres de Lelong.

Notons $g := f|_{L(z)}$, c'est une application méromorphe dominante de $L(z)$ dans lui-même. On a $z \notin I(g^\infty) \subset I(f^\infty)$ donc $L(z) \not\subset I(f^\infty)$. Par 2.4.3 la fonction de Green de T n'est pas identiquement $-\infty$ sur $L(z)$. On peut donc définir $S := T|_{L(z)} \in \mathcal{C}_1^+(L(z))$. Ce courant vérifie l'équation d'invariance $g^*S = \rho S$ et admet localement un potentiel psh en tout point par construction.

Notons $F := \{j \in \mathbf{N}, f^j(z) \in \operatorname{Sing}(L(z)) \cup \mathfrak{C}(g)\}$. De la Proposition B.1.5 et du Lemme 2.6.1, on tire l'estimation pour tout $j \in \mathbf{N}$:

$$\nu(g^j(z), g^*S) \leq \begin{cases} e(g^j(z), g) \times \nu(g^{j+1}(z), S) & \text{si } j, j+1 \notin F, \\ C \times \nu(g^{j+1}(z), S) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Posons $e^C(x,g) = e(x,g)$ si $x, g(x) \notin F$ et $e^C(x,g) = C$ sinon. En utilisant l'invariance de S, on en déduit que

$$0 < \nu(z, S) = \rho^{-k}\nu(z, (g^*)^k S) \leq \rho^{-k}\left(\prod_{j=0}^{k-1} e^C(g^j(z), g)\right) \times D$$

avec $D := \sup_{x \in L(z)} \nu(x, S) < +\infty$. Comme g est dominante, on a $e^C(x, g) = 1$ pour tout point hors de l'ensemble critique de g, qui est une sous-variété stricte de $L(z)$. Mais alors $e^C_\infty(z, g) \geq \rho > 1 = e^C_\infty(L(z), g)$, ce qui contredit la seconde assertion du Théorème 2.5.14 car $L(z)$ est irréductible. Q.E.D.

Fonctions psh sur un espace analytique singulier.

Nous ne ferons ici que les définitions ad-hoc qui nous sont utiles dans la preuve précédente sans chercher à donner un traitement systématique de la question. Notre référence est [De85].

Soit Y un espace analytique complexe (réduit) de dimension pure n. On notera $\mathrm{Sing}(Y)$ l'ensemble de ses points singuliers et $Y_{reg} := Y \setminus \mathrm{Sing}(Y)$.

Les notions que nous considérons sont locales, on peut donc supposer que Y s'identifie à un sous-ensemble analytique fermé d'un ouvert $\Omega \subset \mathbf{C}^N$ au moyen d'un plongement.

On veut tout d'abord définir la notion de courant sur Y.

Une (p, q)-forme $\alpha \in \mathcal{C}^\infty_{p,q}(Y_{reg})$ est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Y si elle est restriction d'une forme lisse sur Ω. On définit $\mathcal{C}^\infty_{p,q}(Y)$ l'espace des (p, q)-formes de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Y que l'on munit de la topologie induite par celle de $\mathcal{C}^\infty_{p,q}(\Omega)$. On vérifie que ces définitions ne dépendent pas du choix du plongement.

Définition 2.6.2. *On désigne par $\mathcal{D}_{p,q}$ l'espace des (p, q)-formes à support compact muni de la topologie limite inductive. Un courant $T \in \mathcal{D}'_{p,q}$ est par définition un élément du dual de $\mathcal{D}_{p,q}$.*

On définit les opérateurs $d, d^c, \partial, \overline{\partial}$ de manière analogue au cas lisse ainsi que la multiplication par une forme lisse.

Définition 2.6.3. *Un courant T de bidegré (p, q) est dit positif si le courant de bidegré (n, n),*

$$T \wedge i\alpha_1 \wedge \overline{\alpha}_1 \wedge \cdots \wedge i\alpha_n \wedge \overline{\alpha}_n$$

est une mesure positive pour tout choix de $(1, 0)$ formes $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Y.

On s'intéresse à l'espace $\mathcal{C}^+_1(Y)$ des courants positifs fermés de bidegré $(1, 1)$ sur Y. On introduit la notion suivante de fonction psh.

Définition 2.6.4. *Soit $v : Y \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ une fonction qui n'est pas identiquement $-\infty$ sur aucun ouvert de Y. On dit que v est psh si elle est restriction d'une fonction psh sur Ω pour un plongement $Y \hookrightarrow \Omega$.*

On vérifie que cette définition ne dépend pas du choix du plongement.

Toute fonction psh sur Y est localement intégrable par rapport à la mesure d'aire sur Y (Proposition 1.8. de [De85]). Elle définit donc un courant de bidegré $(0,0)$. On vérifie alors que $T := dd^c u$ est un courant positif fermé de bidegré $(1,1)$.

Si $f : Y \to Y$ est une application méromorphe dont l'ensemble critique ne contient aucune composante irréductible de Y, et si $T \in \mathcal{C}_1^+(Y)$ admet localement en tout point un potentiel psh $T = dd^c u$, on peut définir le pull-back f^*T comme dans le cas lisse. En tout point où f est holomorphe, on a localement $f^*T = dd^c(u \circ f)$. On vérifie que la définition ne dépend pas du potentiel local choisi.

Remarque: Réciproquement pour $S \in \mathcal{C}_1^+(Y)$ donné, il n'existe pas en général de fonction psh u sur Y t.q. $S = dd^c u$ (voir Définition 1.9. de [De85] et les remarques suivantes).

Il est important de noter cependant que dans la preuve du Théorème 2.4.6, le courant S est défini comme restriction d'un courant T positif fermé défini globalement sur X. Si $T = dd^c u$, on a $S = dd^c(u|_Y)$. ♦

On adopte pour nos besoins la définition suivante du nombre de Lelong d'une fonction psh.

Définition 2.6.5. *Soit $u \in PSH(Y)$ et $p \in Y$. Fixons $\pi : \widehat{Y} \to Y$ une désingularisation de Y. On définit*

$$\nu(u,p) := \inf_{q \in \pi^{-1}(p)} \nu(u \circ \pi, q)$$

le nombre de Lelong de u en p.

Vérifions que la définition ne dépend pas du choix de la désingularisation.

Démonstration. Il suffit de prouver que pour toute modification propre $\pi : Y_1 \to Y_2$ avec Y_1, Y_2 lisses, pour toute fonction $u \in \mathrm{PSH}(Y_2)$ et tout point $p \in Y_2$, on a l'égalité

$$\nu(u,p) = \inf_{q \in \pi^{-1}(p)} \nu(u \circ \pi, q).$$

Le problème est local, on peut donc supposer que $Y_1 = Y_2 = B$ la boule unité de $\mathbf{C}^n$. Le nombre de Lelong augmente par pull-back (voir Corollaire B.1.4) donc $\nu(u,p) \leq \inf_{q \in \pi^{-1}(p)} \nu(u \circ \pi, q)$.

Choisissons L un sous-espace linéaire de dimension 1 passant par p t.q. $\nu(u,p) = \nu(u|_L, p)$ (voir [De93]). Comme π est une modification propre, la restriction de π à la transformée stricte $\pi^\bullet(L)$ de L induit une application holomorphe bijective. Comme L est lisse, il s'ensuit que $\pi : \pi^\bullet(L) \to L$ est un biholomorphisme et que $\pi^\bullet(L)$ est lisse. Posons $q := \pi^\bullet(L) \cap \pi^{-1}(p)$. On a l'égalité

$$\nu(u \circ \pi|_{\pi^\bullet(L)}, q) = \nu(u|_L, p) = \nu(u,p),$$

donc

$$\nu(u,p) \leq \nu(u\circ\pi, q) \leq \nu(u\circ\pi|_{\pi^\bullet(L)}, q) = \nu(u,p).$$

Il s'ensuit $\inf_{q\in\pi^{-1}(p)} \nu(u\circ\pi, q) = \nu(u,p)$. $\square$

On est maintenant en mesure de démontrer le Lemme 2.6.1.

Lemme 2.6.6. *Soit $g : Y \to Y$ une application méromorphe dominante d'un espace analytique singulier irréductible compact dans lui-même, et $S \in \mathcal{C}_1^+(Y)$ admettant localement en tout point un potentiel psh. Alors il existe une constante $C > 0$ t.q. pour tout $z \notin I(g)$ on a l'inégalité*

$$\nu(z, g^*S) \leq C \times \nu(g(z), S).$$

entre nombres de Lelong.

Démonstration. Lemme 2.6.1.

Fixons $\pi : \widehat{Y} \to Y$ une désingularisation de Y, et notons $\widehat{g}$ l'extension à $\widehat{Y}$ de g. C'est une application méromorphe dominante. Soit $\widehat{\Gamma}$ une désingularisation du graphe de $\widehat{g}$, muni des deux projections naturelles π_1, π_2 sur chacun des facteur de $\widehat{Y}\times\widehat{Y}$. On a le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\Gamma} \arrow[d, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
\widehat{Y} \arrow[r, "\widehat{g}"] \arrow[d, "\pi"'] & \widehat{Y} \arrow[d, "\pi"] \\
Y \arrow[r, "g"] & Y
\end{tikzcd}$$

où π, π_1 sont des modifications propres, et π_2 est une application holomorphe propre. Ce diagramme est commutatif au sens suivant. Si $q \in \widehat{\Gamma}$, on a $g\circ\pi\circ\pi_1(q) = \pi\circ\pi_2(q)$ dès que $\pi\circ\pi_1(q) \notin I(g)$.

Pour tout $z \in Y$, on a par définition du nombre de Lelong donnée ci-dessus

$$\nu(z, g^*S) = \inf_{\pi\circ\pi_1(q)=z} \nu(q, \pi_1^*\pi^*(g^*S)).$$

Par le Corollaire B.1.4 appliquée à π_2, on peut trouver une constante $C > 0$ t.q.

$$\begin{aligned}
\nu(g(z), S) &= \inf_{\pi(q)=g(z)} \nu(q, \pi^*S) \\
&\leq C \times \inf_{\pi\circ\pi_2(q)=g(z)} \nu(q, \pi_2^*\pi^*S).
\end{aligned}$$

Si $z \notin I(g)$, la propriété de commutativité du diagramme implique

$$\pi_2^*\pi^*S = \pi_1^*\pi^*g^*S$$

dans un voisinage de $(\pi \circ \pi_1)^{-1}\{z\} \subset \widehat{\Gamma}$ et par suite

$$\begin{aligned} \nu(z, g^*S) &= \inf_{\pi\circ\pi_1(q)=z} \nu(q, \pi_1^*\pi^*(g^*S)) \\ &\geq \inf_{\pi\circ\pi_2(q)=g(z)} \nu(q, \pi_2^*\pi^*S) \geq \frac{1}{C} \times \nu(g(z), S), \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. □

Chapitre 3

Cas de $\mathbf{P}^2$ et $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$.

Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions le cas particulier des surfaces rationnelles $\mathbf{P}^2$ et $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$.

A la Section 1, nous décrivons brièvement la structure des morphismes holomorphes et rationnels de ces surfaces. Dans $\mathbf{P}^2$, une application rationnelle est génériquement holomorphe. Dans $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ la situation est différente, les applications holomorphes sont toujours produits de fractions rationnelles à une variable, et sont donc extrémement rares. A la Section 2, nous reprenons essentiellement les résultats généraux du Chapitre 2 en les précisant dans ce cadre. A la Section 3, nous discutons le théorème d'équidistribution de Russakovskii-Shiffman (voir [RS97]). Celui-ci montre l'existence d'une mesure μ_f décrivant la distribution des préimages d'un point générique dès que f satisfait à la condition $\deg(f) > \lambda_1(f)$. Lorsque f est holomorphe, la mesure μ_f peut être définie comme produit extérieur de courants de Green, et on vérifie qu'elle est toujours mélangeante et d'entropie maximale (voir par exemple [Si99]).

Le résultat de Russakovski-Shiffman est pour l'instant le seul résultat d'existence d'une mesure "intéressante" valable pour une large classe d'applications rationnelles non holomorphes. Ce résultat est cependant très partiel dans la mesure où on ne sait en général rien sur μ_f: il est conjecturé que celle-ci ne charge pas $I(f)$ et est donc invariante. Le point important (Lemme 3.3.2) est que si l'on peut assurer la condition

$$\mu_f(\mathcal{C}(f)) = \mu_f(I(f)) = 0, \tag{3.1}$$

alors la mesure μ_f est mélangeante et d'entropie maximale (voir le Corollaire 2.3.11). Nous utiliserons ce fait dans notre étude des produits croisés polynomiaux de $\mathbf{C}^2$ au Chapitre 5. Nous construirons μ_f d'une manière alternative et nous montrerons (3.1).

La Section 4 de ce chapitre est consacrée à l'étude de la compactification à $\mathbf{P}^2$ ou $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ des applications polynomiales de $\mathbf{C}^2$ envoyant l'hyperplan à l'infini sur un point superattractif. Nous décrivons le comportement du potentiel du courant de Green à l'infini. Ce contrôle sera utilisé de manière cruciale au Chapitre 5 dans la preuve du Théorème 5.2.7. On montre qu'aux points de $I(f^\infty)$ le courant $T(f)$ admet un potentiel G à décroissance exactement logarithmique. Enfin nous donnons à la Section 5 deux exemples d'applications rationnelles pathologiques. Ces exemples permettent de mieux cerner la difficulté des Théorèmes 2.4.5 et 2.4.6.

3.1 Morphismes rationnels des surfaces multiprojectives

Dans cette section, nous décrivons succintement la structure des morphismes rationnels de $\mathbf{P}^2$ et $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ et fixons les notations que nous utiliserons dans la suite.

Dans $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ un point p est défini par ses coordonnées homogènes

$$p = ([z], [w]) = ([z_0 : z_1], [w_0 : w_1]).$$

Une application méromorphe $f : \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ est nécessairement rationnelle puisque $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ est projective et s'écrit alors

$$f = ([P_0 : P_1], [Q_0 : Q_1])$$

où les P_i sont des polynômes bihomogènes de bidegré (α, β) en (z, w) sans facteur commun, et les Q_j sont des polynômes bihomogènes de bidegré (γ, δ) sans facteur commun également. On notera

$$A_f = A := \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}$$

la matrice des degrés de f. On associe à f une application $F = (P, Q)$ de $\mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^2$ dans $\mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^2$. Si

$$\pi : (\mathbf{C}^2 \setminus \{0\}) \times (\mathbf{C}^2 \setminus \{0\}) \to \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$$

est la projection canonique, on a la propriété de commutation $\pi \circ F = f \circ \pi$. La matrice A étant fixée, l'espace des applications polynomiales $F = (P, Q) = (P_0, P_1, Q_0, Q_1)$ où les P_i (resp. Q_j) sont des polynômes bihomogènes de bidegré (α, β) (resp. (γ, δ)) en (z, w) s'identifie à $\mathbf{C}^{N_A+1} \times \mathbf{C}^{M_A+1}$ avec $N_A = 2(\alpha + 1)(\beta + 1) - 1$, et $M_A = 2(\gamma + 1)(\delta + 1) - 1$. La condition sur les P_i (resp. sur les Q_j) de ne pas avoir de facteurs communs s'exprime comme la non annulation de leur résultant. L'espace Rat_A des applications rationnelles de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ dans lui-même de degré exactement A s'identifie donc à un ouvert de Zariski dense de $\mathbf{P}^{N_A} \times \mathbf{P}^{M_A}$.

De même, un point $p \in \mathbf{P}^2$ s'écrit en coordonnées homogènes

$$p = [z] = [z_0 : z_1 : z_2],$$

et une application rationnelle $f = [P_0 : P_1 : P_2]$ où les P_i sont des polynômes homogènes de degré d sans facteur commun. On associera à f l'application polynomiale $F : \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$ définie par $F = (P_0, P_1, P_2)$. On a $\pi \circ F = f \circ \pi$ où $\pi : \mathbf{C}^3 \setminus \{0\} \to \mathbf{P}^2$ est la projection canonique. On notera Rat_d l'espace des applications rationnelles de $\mathbf{P}^2$ dans lui-même de degré d. Celui-ci s'identifie à un ouvert de Zariski dense de $\mathbf{P}^{3(d+1)(d+2)/2}$.

Dans toute la suite par souci de concision, A désignera soit un entier positif soit une matrice 2×2 à coefficients entiers, et π indifféremment la projection de $(\mathbf{C}^2 \setminus \{0\})^2$ sur $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ ou de $\mathbf{C}^3 \setminus \{0\}$ sur $\mathbf{P}^2$.

Définition 3.1.1. *Soit $A \in M(2,\mathbf{N})$ ou $\mathbf{N}^*$. On notera $\mathcal{M}_A$ le sous ensemble de Rat_A constitué des applications rationnelles de X dans lui même de degré A qui sont dominantes.*

Proposition 3.1.2.
L'ensemble $\mathcal{M}_A$ est vide uniquement lorsque $X = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ et $\alpha = \gamma = 0$ ou $\beta = \delta = 0$.

S'il est non vide, l'ensemble $\mathcal{M}_A$ est un ouvert de Zariski dense de Rat_A. En particulier $\mathcal{M}_A$ est connexe.

Démonstration. La première assertion est élémentaire, il suffit d'exhiber un exemple d'applications rationnelle dominante de degré A (voir Exemple 3.1.7). Lorsque $X = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ et $\alpha = \gamma = 0$ ou $\beta = \delta = 0$, l'image $f(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)$ est contenue dans une courbe de la forme $\{p\} \times \mathbf{P}^1$ ou $\mathbf{P}^1 \times \{c\}$.

La seconde assertion résulte alors de la Proposition 2.1.2. $\square$

Proposition 3.1.3.
Soit $f \in \mathcal{M}_A : X \to X$ une application rationnelle dominante. L'ensemble critique $\mathcal{C}(f)$ est une hypersurface de X de degré

$$\begin{cases} 3A - A & \textit{pour } X = \mathbf{P}^2, \\ (2(\alpha-1) + 2\gamma, 2\beta + 2(\delta - 1)) & \textit{pour } X = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1. \end{cases}$$

Démonstration. Par la Proposition 3.1.2, l'ouvert de Zariski $\mathcal{M}_A$ est connexe donc le bidegr de $\mathcal{C}(f)$ est constant dans $\mathcal{M}_A$. Il suffit de le calculer sur des applications monomiales pour obtenir la valeur annonce (voir Exemple 3.1.7). $\square$

Lorsque $X = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, on a

$$H^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1, \mathbf{C}) = H^{1,1}(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1) \cong \mathbf{C} \cdot \omega_1 \oplus \mathbf{C} \cdot \omega_2,$$

où ω_1 (resp. ω_2) désigne le pull-back de la forme de Fubini-Study de $\mathbf{P}^1$ par la projection sur le premier (resp. second) facteur. En particulier, tout courant $T \in \mathcal{C}_1^+(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)$ est cohomologue à $a\omega_1 + b\omega_2$ avec $a = \int_X T \wedge \omega_2$ et $b = \int_X T \wedge \omega_1$. Notons que $\omega_1^2 = \omega_2^2 = 0$ et $\int_X \omega_1 \wedge \omega_2 = 1$.

Si $f \in \mathrm{Rat}_A$, la matrice A est la matrice de $f^* : H^{1,1}(X) \to H^{1,1}(X)$ dans la base $\{\omega_1, \omega_2\}$.

Par ailleurs, on notera ω_{FS} la forme de Fubiny-Study de $\mathbf{P}^2$, et on a

$$H^2(\mathbf{P}^2, \mathbf{C}) = H^{1,1}(\mathbf{P}^2) \cong \mathbf{C} \cdot \omega_{FS}.$$

Pour tout $T \in \mathcal{C}_1^+(\mathbf{P}^2)$, on a $\{T\} = \left(\int_{\mathbf{P}^2} T \wedge \omega_{FS}\right) \times \{\omega_{FS}\}$.

Concluons cette section en décrivant les applications holomorphes de X. Les cas de $\mathbf{P}^2$ et de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ sont essentiellement distincts.

Proposition 3.1.4. *Si* $X = \mathbf{P}^2$, *l'ensemble* $\mathcal{H}_A$ *des applications holomorphes de degré* A *est un ouvert de Zariski dense de* $\mathcal{M}_A$.

Nous renvoyons à [Si99] pour une démonstration de ce fait élémentaire.

Dans le cas de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, il est naturel de considérer les sous-ensembles suivant de $I(f)$.

Définition 3.1.5. *Soit* $A \in M(2, \mathbf{N})$ *et* $f = ([P], [Q]) \in \mathrm{Rat}_A$. *On définit les ensembles*

$$\begin{aligned} I_1(f) &:= \{([z],[w]) \in X \ \textit{t.q.}\ P_0(z,w) = P_1(z,w) = 0\}, \\ I_2(f) &:= \{([z],[w]) \in X \ \textit{t.q.}\ Q_0(z,w) = Q_1(z,w) = 0\}. \end{aligned}$$

On a $I(f) = I_1(f) \cup I_2(f)$.

Proposition 3.1.6.

- *Toute application holomorphe dominante* $f : \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ *est du type* $f = ([P(z)], [Q(w)])$ *ou* $f = ([P(w)], [Q(z)])$ *pour des fractions rationnelles* $P, Q : \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^1$ *arbitraires. En particulier*

$$\begin{cases} \mathcal{H}_A = \mathrm{Rat}_A & \textit{si } \alpha = \delta = 0 \textit{ ou } \beta = \gamma = 0; \\ \mathcal{H}_A = \emptyset & \textit{sinon.} \end{cases}$$

- *Pour* $A \in M(2, \mathbf{N})$, *l'ensemble* $\{f \in \mathrm{Rat}_A \ \textit{t.q.}\ I_1(f) \cap I_2(f) = \emptyset\}$ *est un ouvert de Zariski dense de* Rat_A.

Remarque: En gnral, $I_1(f^2) \cap I_2(f^2) \neq \emptyset$ mme si $I_1(f) \cap I_2(f) = \emptyset$. Cette information est cependant prcieuse, par exemple pour dterminer le degr topologique de f (voir Proposition 3.3.4). ♦

Démonstration.

1. L'ensemble $I_1(f)$ est l'intersection des 2 hypersurfaces $\{P_j = 0\}_{j=0,1}$. Elles sont de bidegr (α, β), donc le courant d'intgration sur $\{P_j = 0\}_{j=0,1}$, que l'on note $[P_j = 0]$ est cohomologue $\alpha\omega_1 + \beta\omega_2$. Si $I_1(f)$ est vide le courant $S := [P_0 = 0] \wedge [P_1 = 0]$ est bien dfini, identiquement nul, et cohomologue $(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2)^2$ donc

$$0 = \int_X S = \int_X (\alpha\omega_1 + \beta\omega_2)^2 = 2\alpha\beta.$$

Si $\beta = 0$, P_j est alors indpendant de w et $[z] \in \mathbf{P}^1 \to [P(z)] \in \mathbf{P}^1$ est holomorphe. De même, si $\alpha = 0$, $[w] \in \mathbf{P}^1 \to [P(w)] \in \mathbf{P}^n$ est holomorphe. On procède de la même façon avec $I_2(f)$ pour conclure.

2. Soit $\Sigma' = \{(f, x) \in (\mathbf{P}^{N_A} \times \mathbf{P}^{M_A}) \times X$ t.q. $P(x) = Q(x) = 0\}$ et $\Sigma = p(\Sigma')$ o $p : (\mathbf{P}^{N_A} \times \mathbf{P}^{M_A}) \times X \to \mathbf{P}^{N_A} \times \mathbf{P}^{M_A}$ dsigne la projection holomorphe propre sur le premier facteur. Le thorme de Remmert

assure que Σ est un sous-ensemble analytique de $\mathbf{P}^{N_A} \times \mathbf{P}^{M_A}$. L'ensemble $\{f \in \mathcal{M}_A \,/\, I_1(f) \cap I_2(f) = \emptyset\} = \mathcal{M}_A \setminus \Sigma$ est donc un ouvert de Zariski de $\mathbf{P}^{N_A} \times \mathbf{P}^{M_A}$ qui n'est pas vide comme le montre l'Exemple 3.1.7. $\square$

Exemple 3.1.7. *Soit* a, a', b, $b' \in \mathbf{C}$ *et considrons l'application rationnelle* $\tilde{f}$, *extension* $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ *de l'application polynomiale:*

$$f(z,w) = \Big((z-a)^{\alpha}(w-b)^{\beta}, (z-a')^{\gamma}(w-b')^{\delta}\Big).$$

La matrice des degrs de $\tilde{f}$ *est donne par*

$$A_{\tilde{f}} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}.$$

On vrifie aisment les proprits suivantes:

1. $\tilde{f}$ *est toujours algbriquement stable;*
2. $I_1(\tilde{f}) \cap I_2(\tilde{f}) = \emptyset$ *ds que* $b \neq b'$ *et* $a \neq a'$*;*
3. $\tilde{f}$ *est dominante dès que* $\alpha\beta \neq \gamma\delta$ *ou* $\alpha\delta a'b \neq \beta\gamma b'a$ *ou* $b'\beta\gamma \neq b\alpha\delta$ *ou* $a'\alpha\delta \neq a\beta\gamma$.

3.2 Courant de Green.

Dans cette section, nous précisons les résultats obtenus au Chapitre 2 concernant l'existence et la structure des courants de Green.

Rappelons tout d'abord que dans $\mathbf{P}^2$ (resp. $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$), tout courant $S \in \mathcal{C}_1^+(X)$ possède un potentiel psh global dans $\mathbf{C}^3$ (resp. $\mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^2$). Cette représentation se révèle commode pour l'étude des courants de bidegré $(1,1)$.

Si $S \in \mathcal{C}_1^+(X)$ est cohomologue à $c\omega_{FS}$ (resp. $a\omega_1 + b\omega_2$), il existe une unique fonction plurisousharmonique $\varphi \in PSH(\mathbf{C}^3)$ (resp. $PSH(\mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^2)$) telle que

$$\varphi(\lambda z) = c \log |\lambda| + \varphi(z), \ \forall \lambda \in \mathbf{C}^* \text{ si } X = \mathbf{P}^2, \tag{3.2}$$

$$\varphi(\lambda z, \mu w) = a \log |\lambda| + b \log |\mu| + \varphi(z, w), \\ \forall (\lambda, \mu) \in (\mathbf{C}^*)^2 \text{ si } X = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1, \tag{3.3}$$

avec $\pi^* S = dd^c \varphi$ et $\sup_{|z|=1} \varphi = 0$ (resp. $\sup_{|z|=|w|=1} \varphi = 0$). Réciproquement la donnée d'une telle fonction φ définit de manière unique un courant $S = \mathcal{L}(\varphi) \in \mathcal{C}_1^+(X)$ (voir [Gu97] pour une démonstration et des propriétés analogues de représentation des courants sur les variétés homogènes du groupe linéaire). Avec nos notations, on a $2\omega_{FS} = \mathcal{L}(\log(|z_0|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2))$, $2\omega_1 = \mathcal{L}(\log(|z_0|^2 + |z_1|^2))$ et $2\omega_2 = \mathcal{L}(\log(|w_0|^2 + |w_1|^2))$. La convergence faible des courants est alors équivalente à la convergence de leurs potentiels dans L^1_{loc}.

Dans $X = \mathbf{P}^2$ ou $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, tout courant positif fermé est cohomologue à une forme lisse positive fermée. Pour appliquer le Théorème 2.4.3, on cherche donc les valeurs propres de l'action $f^* : H^{1,1}(X) \to H^{1,1}(X)$.

Pour $X = \mathbf{P}^2$ et si $f \in \mathcal{M}_\rho$ pour $\rho > 1$, on a toujours $f^*\{\omega_{FS}\} = \rho\{\omega_{FS}\}$.

Soit $f \in \mathcal{M}_A$ une application de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. Notons ρ la plus grande valeur propre de A et ρ_- la plus petite. On a

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\alpha + \delta + \sqrt{(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma}}{2}, \\ \rho_- &= \frac{\alpha + \delta - \sqrt{(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma}}{2}. \end{aligned}$$

Lemme 3.2.1. *Soit $A \in M(2, \mathbf{N})$. Alors*

i) $\rho > 1$ sauf si $\alpha = \delta = 0$ et $\beta = \gamma = 1$; ou $\beta\gamma = 0$ et $\alpha = \delta = 1$.

ii) $\rho > |\rho_-|$ sauf si $\alpha = \delta = 0$; ou $\beta\gamma = 0$ et $\alpha = \delta$.

Si de plus $\beta\gamma \neq 0$, les assertions suivantes sont satisfaites:

iii) il existe un unique vecteur propre (a, b) de A tel que $a > 0, b > 0$ et $2ab = 1$. C'est un vecteur propre associé à ρ et c'est l'unique vecteur propre de A à coordonnées non-négatives -normalisé par $2ab = 1$;

iv) il existe $c > 1$ telle que pour tout $v \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$ les inégalités

$$c^{-1}\rho^j\|v\| \leq \|A^j \cdot v\| \leq c\ \rho^j\|v\|$$

sont satisfaites.

Nous laissons la preuve de ce fait élémentaire au lecteur.

Le cas des produits croisés $\beta\gamma = 0$ est très particulier et sera discuté en détail au Chapitre 5. C'est pourquoi nous supposerons souvent que A satisfait $\beta\gamma \neq 0$. Dans ce cas, le courant de Green associé à f est essentiellement unique.

Définition 3.2.2. *Une matrice $A \in M(2, \mathbf{N})$ est dite primitive ssi $\beta\gamma \neq 0$ et $\alpha + \delta \neq 0$.*

Le Théorème 2.4.3 se réécrit donc:

Théorème 3.2.3. *Soit $f \in \mathcal{M}_A$ une application rationnelle dominante de $X = \mathbf{P}^2$ ou $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ avec A* primitive*. Notons ω l'unique vecteur propre positif de A normalisé par $\|\omega\| = 1$ et $\rho > 1$ la valeur propre associée.*

La suite des courants $\rho^{-j}(f^*)^j(\omega)$ converge vers un courant positif fermé $T(f)$ de bidegré $(1,1)$ cohomologue à ω qui vérifie

$$f^*(T(f)) = \rho \cdot T(f).$$

Plus précisément si $H := \mathcal{L}^{-1}(\omega)$, on a

$$T(f) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{L}(H_k)$$

où la suite $H_k := \rho^{-k} H \circ f^k$ est une suite décroissante de fonctions psh vers $\mathcal{L}^{-1}(T(f))$. Enfin on a l'équation d'invariance $H \circ F = \rho H$.

Les résultats de la Section 2.4. sur la structure de $T(f)$ se précisent comme suit.

Théorème 3.2.4. *Sous les hypothèses précédentes,*

1. *Le courant $T(f)$ est extrémal dans le convexe compact $\mathcal{G}_\rho$ des courants $S \in \mathcal{C}_1^+(X)$ t.q. $f^*(S) = \rho \cdot S$ et $\|S\| = 1$.*

2. *On a $\operatorname{Supp} T(f) \subset J(f)$ et $\mathcal{N}(f) \cap (X \setminus \operatorname{Supp} T(f)) \subset F(f)$.*

   En particulier, si f est normale $J(f) = \operatorname{Supp} T(f)$ est connexe et $F(f)$ est une variété de Stein.

3. *Soit G le potentiel de Green de $T(f)$ i.e. $T(f) = \omega + dd^cG$. Alors pour tout point $p \in X$,*

$$G(p) = -\infty \ \ ssi \ \sum_{j\geq 0} \frac{1}{\rho^j} \log \operatorname{dist}(f^j(p), I(f)) = -\infty.$$

Démonstration.

(1) Cette assertion résulte immédiatement de la Proposition 2.4.4: le vecteur ω est extrémal dans $\ker(f^* - \rho \mathrm{Id})$ car A est primitive.

(2) Pour une preuve nous renvoyons au Théorème I.6.5 de [Si99].

Lorsque f est normale, on en déduit que $J(f) = \mathrm{Supp}\, T(f)$. Il s'ensuit que $F(f)$ est le complémentaire d'un courant $(1,1)$ positif fermé cohomologue à $a\omega_1 + b\omega_2$ avec $a, b > 0$ si $X = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. L'ouvert $F(f)$ est donc de Stein.

(3) Nous ne considérerons que le cas de $\mathbf{P}^2$. Le cas de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ est analogue modulo le fait que les coefficients a, b sont non nuls. On note F un relevé de f à $\mathbf{C}^3$. Posons $U(p) := U([z]) = |F(Z)|/|Z|^d$ de sorte que $f^*\omega_{FS} = \rho\omega_{FS} + dd^c \log U$. Cette fonction définie sur $\mathbf{P}^2$ est réelle analytique et s'annule précisément sur $I(f)$. Par Lojasiewicz, il existe des constantes $C, N > 0$ t.q.

$$C \mathrm{dist}(p, I(f))^N \geq U(p) \geq C^{-1} \mathrm{dist}(p, I(f))^{1/N}.$$

Or on a $G(p) := \sum_{j \geq 0} \rho^{-j} \log U(f^j(p))$ (voir Théorème 2.4.5). On en déduit l'encadrement

$$C' + N \sum_{j\geq 0} \frac{1}{\rho^j} \log \mathrm{dist}(f^j(p), I(f)) \geq G(p) \geq$$

$$\geq -C' - N \sum_{j \geq 0} \frac{1}{\rho^j} \log \mathrm{dist}(f^j(p), I(f)),$$

pour une constante $C' > 0$ ce qui conclut la preuve. □

Au Théorème 2.4.3 du Chapitre 2, nous n'avons pas supposé f algébriquement stable. Cependant, cette hypothèse se révèle cruciale dans les cas considérés ici: $X = \mathbf{P}^2$ ou $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ et $f \in \mathcal{M}_A$ avec A primitive. En effet, lorsque f n'est pas algébriquement stable, le courant $T(f)$ est dégénéré et ne reflète que la distribution des hypersurfaces de X dont les itérés tombent éventuellement dans l'ensemble d'indétermination $I(f)$.

Théorème 3.2.5. *Soit $f \in \mathcal{M}_A$ une application rationnelle dominante de $X = \mathbf{P}^2$ ou $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ avec A primitive. On a*

$$\nu(p, T(f)) > 0 \text{ ssi } p \in I(f^\infty).$$

- *Si f est algébriquement stable, le courant $T(f)$ ne charge pas les hypersurfaces.*
- *Si f n'est pas algébriquement stable, les deux assertions suivantes sont satisfaites.*
  1. *Le courant $T(f)$ est porté par une réunion dénombrable d'hypersurfaces et* $\mathrm{Supp}\, T(f) \subset I(f^\infty)$.

2. *Pour tout* $S \in \mathcal{C}_1^+(X)$*, il existe une constante* $c = c\{S\} > 0$ *t.q. la convergence*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{\rho^j}(f^*)^j S \longrightarrow c \cdot T(f)$$

a lieu.

Remarque:

- L'assertion 3 du Théorème 3.2.4 indique que l'ensemble $\{G = -\infty\}$ consiste en ceux des points de X dont l'orbite passe suffisament près de $I(f)$. Cependant seuls les points de $p \in I(f^\infty)$ sont des singularités "fortes" au sens où $\nu(p, T(f)) > 0$. Nous verrons qu'en général l'ensemble $\{G = -\infty\}$ est beaucoup plus gros que $I(f^\infty)$ (voir l'exemple de la Proposition 3.5.1).

- Notons que dans le cas de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, l'hypothèse A est primitive est cruciale (voir l'exemple ci-dessous).

- Enfin il est possible d'évaluer précisément $\nu(p, \rho^{-k}(f^*)^k\omega)$ en fonction de certaines multiplicités associées aux points d'indétermination.

♦

Exemple 3.2.6. *Soit* $f : \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ *défini dans* $\mathbf{C}^2$ *par* $f(z,w) = (z^3, (z-1)w^2)$*. En coordonnés homogènes,*

$$f([z_0 : z_1], [w_0 : w_1]) = ([z_0^3 : z_1^3], [z_0 w_0^2 : (z_1 - z_0)w_1^2]).$$

On vérifie que $I(f) = \{([1 : 1], [0 : 1]), ([0 : 1], [1 : 0])\}$ *et que* $T(f) := \lim_{k\to\infty} 3^{-k}(f^*)^k\omega_1$ *a un potentiel continu (le courant* $T(f)$ *est produit de la mesure de Lebesgue sur le cercle unité* $|z| = 1$ *par l'intégration sur les fibres* $\{z\} \times \mathbf{P}^1$*).*

Remarquons aussi que $\{\omega_1\}$ *est la seule classe de cohomologie propre pour* f^* *et représentée par une forme lisse positive.*

Démonstration. L'implication $\nu(p, T(f)) > 0 \Rightarrow p \in I(f^\infty)$ résulte du Théorème 2.4.6. Soit donc $p \in I(f^\infty)$, quitte à prendre un itéré de f on peut supposer que $p \in I(f)$.

Fixons $q \in \pi^{-1}(p)$. On va prouver que

$$\nu(q, \mathcal{L}^{-1}(\rho^{-1} f^*\omega)) = \nu(q, \rho^{-1} H \circ F) > 0. \tag{3.4}$$

Comme la suite $H_k := \rho^{-k} H \circ F^k$ est décroissante vers $\mathcal{L}^{-1}(T(f))$ (Théorème 3.2.3), on en déduit que

$$\nu(q, \mathcal{L}^{-1}(T(f))) \geq \nu(q, H_1) > 0,$$

et on conclut en remarquant que $\nu(p, T(f)) = \nu(q, \mathcal{L}^{-1}(T(f))) > 0$.

Prouvons (3.4). On travaille dans $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, le cas de $\mathbf{P}^2$ se traitant de manière analogue. On peut supposer que $q \in I_1(f)$ et on a donc $P_0(q) = P_1(q) = 0$. Par Lojasiewicz, on peut trouver un entier $N \geq 1$ t.q. on ait pour tout point x au voisinage de q l'inégalité

$$|P_0(x)|^2 + |P_1(x)|^2 \leq C \mathrm{dist}(x, q)^{2N},$$

pour une constante $C > 0$. On a donc

$$\begin{aligned} \nu(q, H_1) &= \rho^{-1}\, \nu(q, a \log |P| + b \log |Q|) \\ &\geq a\rho^{-1} \nu(q, \log |P|) \geq a\rho^{-1} N > 0, \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve.

Si f est algébriquement stable, le courant $T(f)$ ne charge pas les hypersurfaces (voir Théorème 2.4.6).

Lorsque f n'est pas algébriquement stable, nous reprenons la preuve de [Si99] que nous détaillons dans le cas $X = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. On note $F^k = (P^k, Q^k) = (R_k^1 \cdot P_k, R_k^2 \cdot Q_k)$ où R_k^1 (resp. R_k^2) est un polynome de bidegré $\overline{\alpha}_k, \overline{\beta}_k$ (resp. $\overline{\gamma}_k, \overline{\delta}_k$) et $(P_k, Q_k) = (P_{0k}, P_{1k}, Q_{0k}, Q_{1k})$ est un relevé propre (sans facteur commun) de f^k. On note A_k la matrice des degrés de (P_k, Q_k) (i.e. de f^k) et $B_k := A^k - A_k$ la matrice des degrés du couple (R_k^1, R_k^2). L'hypersurface $\{R_k^1 = 0\}$ (resp. $\{R_k^2 = 0\}$) représente les courbes de X à support contenu dans $f^{-k} I_1(f)$ (resp. $f^{-k} I_2(f)$).

On a pour tout $k, l \geq 0$, $A^k = B_k + A_k$ et $A_{k+l} \leq A_k A_l$. Comme f n'est pas algébriquement stable, il existe un entier $N \geq 1$ t.q. $\deg R_N^1 + \deg R_N^2 \geq 1$. De plus, A est primitive donc les coefficients de A^2 sont tous non nuls, et de $B_{k+N} \geq A^k B_N$ on déduit l'existence d'un entier $k \geq 0$ t.q. tous les coefficients de A^k majorent strictement ceux de A_k. On a donc $\lim_{k\to\infty} \|A_k\|^{1/k} < \rho$, et

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\rho^k} (a \log |P_k| + b \log |Q_k|) = 0.$$

Il s'ensuit que

$$H(z, w) := \lim_{k\to\infty} \rho^{-k} (a \log |R_k^1| + b \log |R_k^2|). \tag{3.5}$$

Par ailleurs la suite $\{R_k^i = 0\}$ est croissante, donc $T(f) = \mathcal{L}(H)$ est à support inclus dans une réunion dénombrable d'hypersurfaces

$$\mathrm{Supp}\, T(f) \subset \bigcup_{k\geq 0,\ i=1,2} \{R_k^i = 0\} \subset I(f^\infty)\ .$$

Si $S \in \mathcal{C}_1^+(X)$ est cohomologue à $a_0\omega_1 + b_0\omega_2$, on peut écrire $\rho^{-k}(f^*)^k S = S_k + T_k$ avec $T_k := \rho^{-k}(a_0[R_k^1 = 0] + b_0[R_k^2 = 0])$ et $S_k = \rho^{-k}(f^k)^* S$. De (3.5), on conclut que $T_k \to c \cdot T(f)$ pour une constante $c > 0$ et que $S_k \to 0$. $\square$

3.3 Mesure limite.

Dans cette section, nous décrivons les résultats de Russakovski-Shiffman: l'existence d'une mesure μ_f décrivant l'équidistribution des préimages d'un point générique sous la condition sur les degrés dynamiques $\lambda_1(f) < \deg(f)$. Nous discutons cette condition en donnant un moyen de calcul du degré topologique pour les applications rationnelles dominantes de $\mathbf{P}^2$ ou $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. Cette méthode permet par ailleurs de prouver que le courant $T(f) \wedge T(f)$ est à support dans $I(f^\infty)$ dès que f n'est pas holomorphe.

3.3.1 Théorème de Russakovski-Shiffman

Soit f une application rationnelle dominante de $X = \mathbf{P}^2$ ou $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. On a défini à la Section 2.2.5 les degrés dynamiques $\lambda_i(f) := \lim_{k\to\infty} \rho_i(f^k)^{1/k}$ où $\rho_i(f)$ est le rayon spectral de $f^* : H^{i,i}(X) \to H^{i,i}(X)$. Rappelons que $\lambda_1(f) = \rho_1(f)$ ssi f est algébriquement stable et que $\lambda_2(f) \le \lambda_1(f)^2$.

Russakovski et Shiffman ont montré un résultat d'équidistribution pour toute application méromorphe d'une variété rationnelle.

Rappelons que pour une mesure positive μ, on définit $f^\bullet\mu$ comme étant l'extension triviale de $(f|_{X\setminus\mathcal{C}(f)})^*\mu$ à travers $\mathcal{C}(f)$.

Théorème 3.3.1. *Theorem 1.1 [RS97]*

Soit f une application rationnelle dominante de $X = \mathbf{P}^2$ ou $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$.

Si la condition $\lambda_1(f) < \deg(f)$ est satisfaite, il existe une mesure de probabilité μ_f sur X et un ensemble pluripolaire $\mathcal{E}_f \subset X$ tels que

$$\frac{1}{\deg(f)^j}(f^j)^\bullet(\nu) \longrightarrow \mu_f, \tag{3.6}$$

pour toute mesure de probabilité ν sur X telle que $\nu(\mathcal{E}_f) = 0$.

On a malheureusement très peu d'informations sur la mesure limite μ_f. En particulier on ne sait pas si elle est invariante au sens $f^\bullet\mu_f = \deg(f)\cdot\mu_f$ (cf question 2 p.908 [RS97]). L'exemple 4 p.907 de [RS97] suggère en effet que le support de μ_f peut contenir des points d'indétermination. Nous exhiberons de tels exemples lorsque nous analyserons le cas des produits croisés au Chapitre 5.

Notre stratégie consiste à donner une construction alternative de μ_f pour assurer qu'elle ne charge pas les ensembles pluripolaires. On en déduit alors grâce à la propriété d'équidistribution du Théorème 3.3.1, que μ_f est mélangeante. Pour celà, on utilise le lemme suivant:

Lemme 3.3.2. *Soit $f : X \to X$ une application méromorphe dominante, et soit μ une mesure de probabilité qui ne charge pas les ensembles pluripolaires vérifiant $f^\bullet\mu = \deg(f)\cdot\mu$ (la mesure μ est donc invariante).*

Si μ satisfait (3.6) alors elle est mélangeante.

Démonstration. Etant données deux fonctions test χ et θ dans X, il s'agit de démontrer que

$$< \theta \cdot \chi \circ f^j, \mu >:= \int \theta \cdot \chi \circ f^j d\mu \longrightarrow \int \chi d\mu \cdot \int \theta \; d\mu.$$

Or $< \theta \cdot \chi \circ f^j, \mu >=< \theta, \deg(f)^{-j}(f^j)^\bullet(\chi\mu) >$, et la mesure $\chi\mu$ ne charge pas $\mathcal{E}_f$ et est de masse $\int \chi \cdot \mu$. Le Théorème 3.3.1 implique $\deg(f)^{-j}(f^j)^\bullet(\chi\mu) \to (\int \chi \cdot \mu) \cdot \mu_f$, ce qui donne la convergence souhaite. □

3.3.2 Calcul du degré topologique

Discutons la condition $\deg(f) > \lambda_1(f)$. Nous donnons la définition suivante de multiplicité en un point d'indétermination en terme analytique à l'aide des nombres de Lelong.

Définition 3.3.3.

• *Soit* $f : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$ *une application rationnelle dominante, fixons un relevé propre* $F = (P_0, P_1, P_2)$ *de* f *à* $\mathbf{C}^3$ *et* $p \in I(f)$. *Soit* σ *une section locale de* π *définie au voisinage de* p.

On définit la multiplicité de $I(f)$ *en* p *par*

$$\mu(p, f) = \nu \left(p, (dd^c)^2 \log \|F \circ \sigma\|\right).$$

Celle-ci ne dépend pas de la section σ *choisie.*

• *Soit* $f : \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ *une application rationnelle dominante,* $F = (P_0, P_1, Q_0, Q_1)$ *un relevé propre de* f *à* $\mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^2$ *et* $p \in I(f)$. *Soit* σ *une section locale de* π *définie au voisinage de* p.

Pour tout couple $(u, v) \in \{0, 1\}^2$ *avec* $u + v = 2$ *on définit la multiplicité mixte de* $I(f)$ *en* p *par*

$$\mu^{[u,v]}(p, f) := \nu \left(p, (dd^c)^u \log \|P \circ \sigma\| \wedge (dd^c)^v \log \|Q \circ \sigma\|\right).$$

Pour tout couple $a, b \in \mathbf{R}_+$ *on notera*

$$\begin{aligned} \mu^{\{a,b\}}(p, f) &:= \nu \left(p, (dd^c)^2 (a \log \|P \circ \sigma\| + b \log \|Q \circ \sigma\|)\right) \\ &= a^2 \mu^{[1,0]}(p, f) + 2ab\mu^{[1,1]}(p, f) + b^2 \mu^{[0,1]}(p, f). \end{aligned}$$

Remarque: Les multiplicités définies ci-dessus peuvent s'interpréter comme des multiplicités (mixtes) associées à certains idéaux de germes analytiques (voir [T73]). Dans la pratique, les méthodes algébriques de calcul de multiplicités sont plus maniables.

D'autre part dans $X = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, on remarque que l'implication

$$\mu^{[1,1]}(p, f) > 0 \Rightarrow p \in I_1(f) \cap I_2(f)$$

est toujours satisfaite. ♦

Le degré topologique se calcule comme suit.

Proposition 3.3.4.

- *Si $f \in Rat_\rho(\mathbf{P}^2)$ est une application rationnelle dominante de degré ρ on a*
$$\deg(f) = \rho^2 - \sum_{z \in I(f)} \mu(z, f). \tag{3.7}$$

- *Si $f \in Rat_A(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)$ est une application rationnelle dominante,*
$$\deg(f) = \alpha\delta + \beta\gamma - \sum_{z \in I_1(f) \cap I_2(f)} \mu^{[1,1]}(z, f). \tag{3.8}$$

Notons le corollaire immédiat suivant.

Proposition 3.3.5. *Soit $A \in M(2, \mathbf{N})$ ou $\mathbf{N}^*$ et $f \in \mathcal{M}_A$. On a toujours $\lambda_2(f) = \deg(f) \leq \rho^2 = \lambda_1(f)^2$. Les cas d'égalité sont donnés dans la liste suivante:*

- *$f : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$ est holomorphe;*
- *$f : \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ est un produit croisé $\beta\gamma = 0$ avec $\alpha = \delta$;*
- *$f : \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ est holomorphe $\alpha = \delta = 0$.*

Dans le cas $X = \mathbf{P}^2$, une application rationnelle “générique” est holomorphe et vérifie donc $\deg(f) = \rho^2 > \rho$ dès qu'elle n'est pas un automorphisme. Dans $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ la situation est un peu plus compliquée.

Proposition 3.3.6. *Soit $A \in M(2, \mathbf{N})$ ou $\mathbf{N}^*$. L'ensemble des $f \in \mathcal{M}_A$ telles que la condition de Russakovski-Shiffman $\deg(f) > \lambda_1(f)$ n'est pas satisfaite est inclus dans une réunion dénombrable d'hypersurfaces de $\mathcal{M}_A$ sauf dans l'un des quatre cas suivants:*

1. *$f : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$ est un automorphisme linéaire;*
2. *$f : \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ est un produit croisé $\beta\gamma = 0$ et $\min(\alpha, \delta) = 1$;*
3. *$f : \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ et $\alpha\delta = 0$ et $\beta\gamma \leq \max(\alpha, \delta) + 1$;*
4. *$f : \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ et $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$.*

Démonstration. La preuve est une combinaison immédiate des Propositions 3.1.6 et 3.3.4. $\square$

Concluons cette section par le théorème suivant qui indique que l'on ne peut construire μ_f comme auto-intersection du courant de Green comme pour les applications holomorphes de $\mathbf{P}^2$.

Théorème 3.3.7. *Soit $f \in \mathcal{M}_A$ une application rationnelle dominante de $X = \mathbf{P}^2$ ou $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ avec A primitive. On suppose f algébriquement stable. Alors pour tout $p \in X$, on peut définir*

$$\mu_\infty(p, f) := \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\rho^k} \times \begin{cases} \mu(p, f^k) & \text{pour } X = \mathbf{P}^2, \\ \mu^{\{a,b\}}(p, f^k) & \text{pour } X = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1. \end{cases}$$

On a alors

- *$\mu_\infty(p, f) > 0$ ssi $p \in I(f^\infty)$;*
- *on a convergence faible*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\rho^k}(f^*)^k\omega \wedge \frac{1}{\rho^k}(f^*)^k\omega = \sum_{p\in I(f^\infty)} \mu_\infty(p, f)\delta_p.$$

3.3.3 Preuves

Démonstration. Proposition 3.3.4

Soit $P_1 := \{H_1 = 0\}$ et $P_2 := \{H_2 = 0\}$, deux hyperplans génériques avec $\{H_i\} = \{\omega_i\}$ si $X = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. Notons $p_0 := P_1 \cap P_2$. Le courant $f^*H_1 \wedge f^*H_2$ est bien défini et cohomologue à $\rho^2\omega_{FS}^2$ si $X = \mathbf{P}^2$ et $(\alpha\delta + \beta\gamma)\omega_1 \wedge \omega_2$ si $X = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. Son support est exactement $f^{-1}\{p_0\} \cup I(f)$. On a donc

$$\begin{aligned} \int_X f^*H_1 \wedge f^*H_2 &= \rho^2 \text{ ou } \alpha\delta + \beta\gamma \\ &= \deg(f) + \sum_{p\in I(f)} \nu(p, f^*H_1 \wedge f^*H_2). \end{aligned}$$

Etudions plus précisément les nombres de Lelong intervenant dans la somme ci-dessus. On se place au voisinage d'un point $p \in I(f)$ et on fixe une section locale σ de π.

Plaçons nous tout d'abord dans $X = \mathbf{P}^2$. Comme H_1 et H_2 ont été choisis de manière générique, on peut trouver une constante $C > 0$ t.q.

$$C \geq \frac{|H_1 \circ F \circ \sigma|^2 + |H_2 \circ F \circ \sigma|^2}{\|F \circ \sigma\|^2} \geq C^{-1}.$$

Le théorème de comparaison entre nombre de Lelong (voir Theorem 6.1 [De93]) implique alors

$$\nu\left(p, (dd^c)^2 \frac{1}{2} \log(|H_1 \circ F \circ \sigma|^2 + |H_2 \circ F \circ \sigma|^2)\right) = \mu(p, f).$$

Introduisons dans des coordonnées locales (z, w) en $p = (0, 0)$ le germe holomorphe

$$h(z, w) := (H_1 \circ F \circ \sigma, H_2 \circ F \circ \sigma).$$

On a $h^{-1}\{0\} = \{0\}$ donc h est un morphisme fini. On a au sens des mesures

$$\begin{aligned}(dd^c)^2 \frac{1}{2} \log(|H_1 \circ F \circ \sigma|^2 + |H_2 \circ F \circ \sigma|^2) &= h^*(dd^c)^2 \frac{1}{2} \log(|z|^2 + |w|^2),\\ dd^c \log |H_1 \circ F \circ \sigma| \wedge dd^c \log |H_2 \circ F \circ \sigma| &= h^*(dd^c \log |z| \wedge dd^c \log |w|).\end{aligned}$$

On déduit alors

$$\begin{aligned}\nu(p, f^*H_1 \wedge f^*H_2) &= \nu(p, h^*(dd^c \log |z| \wedge dd^c \log |w|))\\ &= \deg(h)\\ &= \nu(p, h^*((dd^c)^2 2^{-1} \log(|z|^2 + |w|^2)))\\ &= \mu(p, f).\end{aligned}$$

ce qui prouve la formule annoncée.

Dans $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, en un point de $I(f) \setminus I_1(f) \cap I_2(f)$ les égalités

$$\mu^{[1,1]}(p, f) = 0 = \nu(p, f^*H_1 \wedge f^*H_2)$$

sont satisfaites. On peut donc supposer que $p \in I_1(f) \cap I_2(f)$, et on a de même que précedemment

$$C \geq \frac{|H_1 \circ F \circ \sigma|^2 + |H_2 \circ F \circ \sigma|^2}{\|P \circ \sigma\|^2 + \|Q \circ \sigma\|^2} \geq C^{-1}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\mu^{[1,1]}(p, f) &= \nu(p, dd^c \log \|P \circ \sigma\| \wedge dd^c \log \|Q \circ \sigma\|)\\ &= \nu(p, (dd^c)^2 2^{-1} \log(\|P \circ \sigma\|^2 + \|Q \circ \sigma\|^2))\\ &= \nu(p, (dd^c)^2 2^{-1} (\log |H_1 \circ F \circ \sigma|^2 + \log |H_2 \circ F \circ \sigma|^2))\\ &= \nu(p, h^*(dd^c)^2 2^{-1} \log(|z|^2 + |w|^2))\\ &= \nu(p, h^* dd^c \log |z| \wedge dd^c \log |w|)\\ &= \nu(p, f^*H_1 \wedge f^*H_2),\end{aligned}$$

ce qui prouve la formule annoncée. □

Démonstration. Théorème 3.3.7

Soit $k \geq 0$ un entier arbitraire et considérons les deux mesures positives

$$\begin{aligned}\mu_{1,k} &:= (f^*)^k(\omega \wedge \omega),\\ \mu_{2,k} &:= (f^*)^k\omega \wedge (f^*)^k\omega.\end{aligned}$$

Hors de $I(f^k)$ les deux mesures coïncident. Soit $p \in I(f^k)$. Comme $\mu_{1,k}$ est représentée par une fonction L^1 (voir Proposition 2.2.2) on a

$$\nu(p, \mu_{1,k}) = \mu_{1,k}\{p\} = 0.$$

D'autre part pour une section σ fixée, on a dans $X = \mathbf{P}^2$

$$\nu(p, \mu_{2,k}) = \nu(p, (dd^c)^2 \log \|F^k \circ \sigma\|) = \mu(p, f^k),$$

et dans $X = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$

$$\nu(p, \mu_{2,k}) = \nu(p, (dd^c)^2 (a \log \|P^k \circ \sigma\| + b \log \|Q^k \circ \sigma\|)) = \mu^{\{a,b\}}(p, f^k).$$

On a donc

$$\mu_{2,k} = \mu_{1,k} + \sum_{p \in I(f^k)} \delta_p \times \begin{cases} \mu(p, f^k) \text{ si } X = \mathbf{P}^2, \\ \mu^{\{a,b\}}(p, f^k) \text{ si } X = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1. \end{cases}$$

Comme F est donnée par des polynômes homogènes de degré ρ, on a dans $X = \mathbf{P}^2$

$$\begin{aligned} \mu_{2,k+1}(p) &= \nu(p, (dd^c)^2 \log \|F \circ F^k \circ \sigma\|) \\ &\geq \rho^2 \nu(p, (dd^c)^2 \log \|F \circ F^k \circ \sigma\|) \geq \rho^2 \mu_{2,k}(p), \end{aligned}$$

ce qui prouve que la suite $\rho^{-2k}\mu_{2,k}(p)$ est croissante. Dans $X = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, le résultat est analogue. La suite $\rho^{-2k}\mu_{2,k}(p)$ converge donc et on note $\mu_\infty(p, f)$ sa limite.

On remarque alors que $\mu_{1,k}(X) = \deg(f)^k$ et $\mu_{2,k}(X) = \rho_1(f^k)^2 = \rho_1(f)^{2k}$. Or on a toujours $\deg(f) < \rho_1(f)^2$ sauf si $X = \mathbf{P}^2$ et f est holomorphe ou $X = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ avec $\alpha = \delta = 0$ (f est holomorphe) ou $\alpha = \delta \geq 1$ et $\beta\gamma = 0$ (f est un produit croisé). On a par hypothèse exclu tous ces cas. On en déduit donc

$$\begin{aligned} \lim_{k \to \infty} \frac{1}{\rho^{2k}} (f^*)^k \omega \wedge (f^*)^k \omega &= \lim_{k \to \infty} \frac{1}{\rho^{2k}} \mu_{2,k} \\ &= \lim_{k \to \infty} \sum_{p \in I(f^k)} \rho^{-2k} \delta_p \times \begin{cases} \mu(p, f^k) \\ \mu^{\{a,b\}}(p, f^k) \end{cases} \\ &= \sum_{p \in I(f^\infty)} \mu_\infty(p, f) \delta_p, \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. $\square$

3.4 Compactification des applications polynômiales de $\mathbf{C}^2$.

Nous prouvons dans cette section que pour les applications polynomiales de $\mathbf{C}^2$ possédant un point superattractif à l'infini, le courant de Green admet un potentiel continu dans $\mathbf{C}^2$ (Théorème 3.4.3) dont les singularités sont controlées, logarithmiques à l'infini (Proposition 3.4.4). On en déduit un théorème de continuité pour la dépendance du courant de Green par rapport à un paramètre holomorphe.

Soit $f : (z,w) \in \mathbf{C}^2 \to (P(z,w), Q(z,w)) \in \mathbf{C}^2$ une application polynomiale dominante de $\mathbf{C}^2$. Pour étudier la dynamique de cette application, on tire partie de son algébricité en considérant son extension à une compactification de $\mathbf{C}^2$ soit $X = \mathbf{P}^2$ soit $X = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. Cette extension doit être algébriquement stable pour pouvoir construire un courant de Green intéressant (voir Théorème 3.2.5). On notera $L_\infty := X \setminus \mathbf{C}^2$ le diviseur à l'infini.

Définition 3.4.1. *Soit $A \in \mathbf{N}^*$ ou $A \in M(2,\mathbf{N})$ primitive. On note $\mathcal{P}_A$ l'ensemble des applications polynomiales dominantes $f : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ qui s'étendent de manière algébriquement stable dans $X = \mathbf{P}^2$ ou $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ en une application rationnelle de degré A.*

On notera abusivement f l'extension de f à X.

Proposition 3.4.2. *Soit $f = (P,Q)$ une application polynomiale dominante de $\mathbf{C}^2$. On notera P_d, Q_d les parties homogènes de degré maximal $d = \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$.*

1. *L'application f se compactifie de manière algébriquement stable dans $\mathbf{P}^2$ ssi pour tout couple $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0)$, la relation $\lambda_2 P_d = \lambda_1 Q_d$ implique ou $P_d(\lambda_1,\lambda_2) \neq 0$ ou $Q_d(\lambda_1,\lambda_2) \neq 0$.*

Lorsque $\lambda_2 P_d = \lambda_1 Q_d$, le point $q := [\lambda_1 : \lambda_2 : 0]$ est fixe superattractif et $f(L_\infty) = q$.

2. *L'application f se compactifie de manière algébriquement stable dans $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ ssi les deux conditions suivantes sont vérifiées*

$$\begin{aligned}\deg_z(P) + \deg_w(P) &= \deg(P),\\ \deg_z(Q) + \deg_w(Q) &= \deg(Q).\end{aligned}$$

Lorsque c'est le cas, $q = ([0:1],[0:1])$ est un point fixe superattractif et $f^2(L_\infty) = q$ sauf si

1. *$\alpha = \delta = 0$ et $\beta = \gamma = 1$ (f est un automorphisme linéaire) ;*
2. *$\beta = 0$ et $\alpha = 1$, ou $\gamma = 0$ et $\delta = 1$ (f est un produit croisé semi-linéaire).*

La preuve est immédiate. Remarquons que la dynamique des produits croisés semi-linéaires se ramène essentiellement à de la dynamique en une variable. Notons également que tout un voisinage de $\{z_0 w_0 = 0\} \setminus I(f^2)$ est envoyé sur q par f^2 lorsque f n'est pas un produit croisé, ce qui implique $E(f) = I(f^2)$. Nous verrons que l'ensemble $E(f)$ peut être beaucoup plus gros dans le cas des produits croisés (cf Section 5.1.3).

On supposera dans la suite que A est primitive, on notera $\rho > 1$ la plus grande valeur propre de A, et (a, b) un vecteur propre associé à coefficients positifs, normalisé par $2ab = 1$ quand $X = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ et $\omega = a\omega_1 + b\omega_2$. On notera aussi pour $j \in \mathbf{N}$, $f^j = (P^j, Q^j)$. Enfin, on notera dans toute cette partie $\|(z, w)\| := |z| + |w|$ si $(z, w) \in \mathbf{C}^2$. De même, pour $\zeta \in \mathbf{C}$, $\|\zeta\| := \|(1, \zeta)\| = 1 + |\zeta|$.

Théorème 3.4.3. *Soit $A \in \mathbf{N}^*$ ou $M(2, \mathbf{N})$ primitive. Soit $f = (P, Q) \in \mathcal{P}_A$ une application polynomiale dominante de $\mathbf{C}^2$ qui s'étend en une application méromorphe algébriquement stable f de $X = \mathbf{P}^2$ ou $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. On suppose que $f^2(L_\infty) = q$ est fixe superattractif. Soit*

$$\Omega(q) := \{(z, w) \in \mathbf{C}^2 \,/\, f^j(z, w) \to q\}$$

son bassin d'attraction dans $\mathbf{C}^2$. Alors la fonction

$$g(z, w) := \lim_{j \to \infty} \begin{cases} \rho^{-j} \log^+ \|(P^j, Q^j)\| \geq 0 & \text{pour } X = \mathbf{P}^2, \\ \rho^{-j} \left(a \log \|P^j\| + b \log \|Q^j\|\right) \geq 0 & \text{pour } X = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \end{cases},$$

est un potentiel psh global de $T(f)$ dans $\mathbf{C}^2$ i.e. $dd^c g = T(f)$. De plus,

$$\Omega(q) = \left\{(z, w) \in \mathbf{C}^2 \,/\, g(z, w) > 0\right\} ,$$

en particulier la fonction de Green g est continue dans $\mathbf{C}^2$.

L'estimation suivante de la fonction de Green sera utile ultérieurement (voir Théorème 5.2.7).

Proposition 3.4.4. *On se place sous les hypothèses du Théorème 3.4.3.*

Au voisinage de tout point $p_0 \in I(f^\infty) = I(f^2)$, le courant invariant $T(f)$ associé à f admet un potentiel G psh t.q.

$$G(p) \geq c \log \operatorname{dist}(p, p_0) + O(1)$$

pour une constante $c > 0$.

Démonstration. Théorème 3.4.3

La démonstration est tout à fait analogue pour $X = \mathbf{P}^2$ ou $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. Nous ne considérons ici que le second cas.

Sous les hypothèses du théorème, on peut écrire $f = (P, Q)$ avec

$$\begin{aligned} P(z, w) &= B_1 z^\alpha w^\beta + O(\|(z, w)\|^{\alpha+\beta-1}), \\ Q(z, w) &= B_2 z^\gamma w^\delta + O(\|(z, w)\|^{\gamma+\delta-1}), \end{aligned}$$

et $B_1 B_2 \neq 0$. On peut donc trouver $R > 0$ assez grand, et $C > 0$ tels que pour tout $(z,w) \in U_R := \{(z,w) \in \mathbf{C}^2,\ \min\{|z|,|w|\} > R\}$,

$$C^{-1}\|z\|^{\alpha}\|w\|^{\beta} \leq \quad \|P(z,w)\| \quad \leq C\|z\|^{\alpha}\|w\|^{\beta} \ , \tag{3.9}$$
$$C^{-1}\|z\|^{\gamma}\|w\|^{\delta} \leq \quad \|Q(z,w)\| \quad \leq C\|z\|^{\gamma}\|w\|^{\delta} \ . \tag{3.10}$$

La fonction $a \log \|z\| + b \log \|w\|$ est un potentiel de ω', donc la fonction

$$g^j(z,w) := \frac{1}{\rho^j}\left(a \log \|P^j\| + b \log \|Q^j\|\right) + \sum_{k \geq j+1} \rho^{-j-1} \log C \ ,$$

est un potentiel de $\rho^{-j}(f^*)^j\omega'$ dans $\mathbf{C}^2$. Les inégalités (3.9) et (3.10) impliquent que la suite g^j est décroissante et $|g^{j+1} - g^j| \leq \log C/\rho^{j+1}$. On en déduit que g^j converge uniformément vers g dans U_R ; de plus

$$|g - a \log \|z\| - b \log \|w\|| \leq \log C/(\rho - 1) \text{ dans } U_R,$$

donc $U_R \subset \Omega_q$ et l'invariance de g entraîne $\Omega_q \subset \{g > 0\}$.

On va prouver que $g(z,w) = 0$ si $(z,w) \notin \Omega_q$. Quitte à augmenter $R > 0$, on a pour tout $|z| \leq R$, et $|w| > R$,

$$|P(z,w)| \leq CR^{\alpha}|w|^{\beta} \text{ et } |Q(z,w)| \leq CR^{\gamma}|w|^{\delta} \ . \tag{3.11}$$

De même, pour tout $|z| > R$, $|w| \leq R$,

$$|P(z,w)| \leq CR^{\beta}|z|^{\alpha} \text{ et } |Q(z,w)| \leq CR^{\delta}|w|^{\gamma} \ . \tag{3.12}$$

Nous aurons besoin du lemme suivant, dont nous laissons la preuve au lecteur.

Lemme 3.4.5. *Soit* $k > \max(\alpha, \delta, \sqrt{\beta\gamma})$. *Pour des choix de constantes* C_1, $C_2 > 0$ *assez grandes vérifiant* $C_1/C_2 = \sqrt{\gamma/\beta}$, *les inégalités*

$$\begin{aligned} a_j, b_j &\geq 1 \ , \\ a_{j+1} &\geq \max\{\beta + \alpha a_j, \alpha + \beta b_j\} + 1 \ , \\ b_{j+1} &\geq \max\{\gamma + \delta b_j, \delta + \gamma a_j\} + 1 \ . \end{aligned}$$

sont satisfaites par les suites $a_j = C_1 k^j$ *et* $b_j = C_2 k^j$ *et pour tout* $j \in \mathbf{N}$.

Fixons maintenant $(z,w) \notin \Omega_q$. Soit

$$M_1 := \max\{\sup_{\Delta^2(R)} |P|, \ \sup_{\Delta^2(R)} |Q|\} \ ,$$

et $\tau := \max(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. On pose $M := \max(M_1, R, C, |z|, |w|)$ et on note $(z_j, w_j) = f^j(z,w)$. On a donc $\forall j \geq 1$, $|z_j| \leq R$ ou $|w_j| \leq R$. Vérifions par récurrence que

$$\forall j \geq 1, |z_j| \leq M^{a_j} \text{ et } |w_j| \leq M^{b_j}. \tag{3.13}$$

L'assertion est claire pour $j = 1$ puisque $a_1, b_1 \geq 1$ et $M \geq \max(|z|, |w|)$. Supposons la vérifiée au rang $j \geq 1$.

Supposons $\max\{|z_j|, |w_j|\} \leq R$. Alors $|z_{j+1}| \leq M_1 \leq M \leq M^{a_{j+1}}$ et similairement $|w_j| \leq M^{b_{j+1}}$.

Supposons $|z_j| \leq R$ et $|w_j| > R$. Alors

$$|z_{j+1}| = |P(z_j, w_j)| \leq CR^\alpha |w_j|^\beta \leq CM^{\alpha+\beta b_j - 1} \leq M^{a_{j+1}}$$

et

$$|w_{j+1}| = |Q(z_j, w_j)| \leq CR^\gamma |w_j|^\delta \leq CM^{\gamma+\delta b_j - 1} \leq M^{b_{j+1}}.$$

Enfin le cas $|z_j| > R$ et $|w_j| \leq R$ se traite de manière similaire.

Il suffit à présent de remarquer que

$$\rho = \frac{1}{2}\left(\alpha + \delta + \sqrt{(\alpha-\delta)^2 + 4\beta\gamma}\right) > \max(\alpha, \delta, \sqrt{\beta\gamma}) ,$$

lorsque A est primitive i.e. $\beta\gamma \neq 0$, $\alpha + \delta \neq 0$. En fixant $k < \rho$ dans (3.13), on obtient que $a_j/\rho^j \to 0$ et $b_j/\rho^j \to 0$ et la majoration précédente donne donc $g(z, w) = 0$. $\square$

Exemple 3.4.6. *En général, la majoration de la croissance de la suite* $\{f^j(z, w)\}_{j\geq 0}$ *dans* $\mathbf{C}^2 \backslash \Omega(q)$ *est optimale. Soit par exemple* $\alpha > \max(\delta, \sqrt{\beta\gamma}) > 1$ *et définissons* $f(z, w) = (z^\alpha w^\beta + z^\alpha, z^\gamma w^\delta)$*. Alors* $f(z, 0) = (z^\alpha, 0)$*, un voisinage de* $\{(z, w) \in \mathbf{C}^2 \,/\, |z| > 1$ *et* $w = 0\}$ *est attiré par le point d'indétermination* $([0 : 1], [1 : 0])$ *et la croissance est de l'ordre de* M^{α^j}.

Démonstration. Proposition 3.4.4

On se place dans le cas $X = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. Il est très pratique de travailler en coordonnées homogènes.

Notons $\widetilde{G}$ un potentiel de $T(f)$ dans $\mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^2$ vérifiant les équations d'homogénéité (3.2) et (3.3). L'équation fonctionnelle de $T(f)$ s'écrit $\widetilde{G} \circ F = \rho\, \widetilde{G}$ où F est un relevé polynomial de f à $\mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^2$. Remarquons que le Théorème 3.4.3 donne $\widetilde{G}(1, x, 1, y) = g(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbf{C}^2$.

On peut supposer que $p_0 = ([1 : 0], [0 : 1])$ et, quitte à remplacer f par f^2 que $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 1$ et $p_0 \in I(f)$. Notons $G(x, y) := \widetilde{G}(1, x, y, 1)$ un potentiel de $T(f)$ au voisinage de p_0. On cherche une constante $c > 0$ t.q. pour tout x, y assez petits

$$G(x, y) \geq c \max\{\log|x|, \log|y|\} + O(1).$$

On remarque tout d'abord que par homogénéité de $\widetilde{G}$ on a

$$\begin{aligned} G(x, y) = \widetilde{G}(1, x, y, 1) &= \widetilde{G}(1, x, 1, 1/y) + b \log|y| \\ &= g(x, 1/y) + b \log|y| \geq b \log|y|, \end{aligned}$$

car la fonction g est positive (voir Théorème 3.4.3). Soit $N \in \mathbf{N}^*$ un entier que nous fixerons précisément par la suite. On obtient dans $\{|y| \geq |x|^N\}$ l'estimation

$$G(x,y) \geq b \log |y| \geq bN \max\{\log |x|, \log |y|\}. \tag{3.14}$$

Il reste minorer G dans $\{|y| \leq |x|^N\}$. Comme $q = ([0:1],[0:1])$ est superattractif, la fonction $\widetilde{G}$ est pluriharmonique dans un voisinage de $\pi^{-1}\{q\}$. On peut donc trouver $C_1 > 0$ t.q. pour u, v assez petits

$$\widetilde{G}(u,1,v,1) \geq C_1. \tag{3.15}$$

Or le point p_0 est isolé dans $I(f)$, d'où $P(1,x,0,1) = 0$ ssi $x = 0$. Par Lojasiewicz, on peut trouver des constantes $C_2 > 0$ et $M \in \mathbf{N}$ tels que $|P(1,x,0,1)| \geq C_2|x|^M$. De même, il existe $C_2' > 0$ et $M' \in \mathbf{N}$ tels que $|Q(1,x,0,1)| \geq C_2'|x|^{M'}$. Posons $N > \max(M, M')$ et $\varepsilon \ll 1$. La formule de Taylor donne pour tout point de $\{|y| \leq |x|^N, |x| + |y| \leq \varepsilon\}$

$$|P(1,x,y,1)| \geq C_2|x|^M - C_3|y| \geq C_4|x|^M,$$

pour des constantes $C_3, C_4 > 0$. De même $|Q(1,x,y,1)| \geq C_4|x|^{M'}$. Donc

$$\sup_{|y|\leq|x|^N, |x|+|y|\leq\varepsilon} \left\{ \left|\frac{y^\beta}{P(1,x,y,1)}\right|, \left|\frac{y^\delta}{Q(1,x,y,1)}\right| \right\} \leq C_4^{-1}|x|^{\min(\beta N - M, \delta N - M')} \ll 1. \tag{3.16}$$

On utilise alors l'équation fonctionnelle $\widetilde{G} \circ F = \rho \widetilde{G}$. On déduit de l'équation $F(1,x,y,1) = (y^\alpha, P(1,x,y,1), y^\delta, Q(1,x,y,1))$ que pour tous les points de $\{|y| \leq |x|^N, |x| + |y| \leq \varepsilon\}$,

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \rho^{-1}\widetilde{G}(y^\beta, P, y^\delta, Q) \\ &= \rho^{-1}\widetilde{G}\left(\frac{y^\beta}{P}, 1, \frac{y^\delta}{Q}, 1\right) + \rho^{-1}\left(a \log |P| + b \log |Q|\right) \\ &\geq \rho^{-1}C_1 + \rho^{-1}\left(a \log |P| + b \log |Q|\right) \\ &\geq c \log |x| + C_5 \geq c \max\{\log |x|, \log |y|\} + C_5, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. □

Théorème 3.4.7. *Soit* (f_λ) *une famille d'applications polynomiales dominantes algbriquement stables de* $\mathcal{P}_A$ *dépendant continument d'un paramètre* $\lambda \in \Lambda$ *(*Λ *étant un espace métrique). On suppose que pour tout* λ*, le point* $f_\lambda(L_\infty)$ *est un point fixe superattractif.*

Soit $(T_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *la famille associée des courants de Green. Alors* $\lambda \to T_\lambda$ *est continue.*

Démonstration. La continuité de la famille des courants de Green est équivalente à celle des potentiels (g_λ) dans $\mathbf{C}^2$ pour la topologie L^1_{loc}. Comme précédemment, on se place dans le cas $X = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$.

Puisque les degrés A sont fixés indépendemment de λ, il découle de la construction des potentiels que $\forall \lambda \in \Lambda$, on a $g_\lambda(z,w) \leq a \log \|z\| + b \log \|w\|$, donc la famille g_λ est localement uniformément majorée.

Soit $\lambda_0 \in \Lambda$ et v une valeur d'adhérence de la famille $\{g_\lambda\}$ au point λ_0. Montrons tout d'abord que $v \leq g_{\lambda_0}$. Rappelons que g_λ est la limite décroissante des fonctions $g^j(\cdot,\lambda)$ et $\forall j \in \mathbf{N}$, $\lambda \to g^j(\cdot,\lambda)$ est continue. Or un infimum de fonctions s.c.s. est s.c.s., donc $\lambda \to g(.,\lambda)$ est s.c.s. et ainsi $v \leq g_{\lambda_0}$. Notons que cette inégalité n'a lieu a priori que pour presque tout $(z,w) \in \mathbf{C}^2$, mais v et g_{λ_0} sont psh donc $v(z,w) \leq g_{\lambda_0}(z,w)$, $\forall (z,w) \in \mathbf{C}^2$.

L'inégalité inverse requière véritablement le fait que les f_λ sont polynomiales dans $\mathbf{C}^2$. Les coefficients des polynômes définissant f_λ varient continument avec λ. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on peut trouver $R > 0$ et une constante $C > 0$ tels que $\forall \lambda \in B(\lambda_0, \varepsilon)$, $\forall (z,w) \in U_R$,

$$\begin{array}{rcl} C^{-1}\|z\|^\alpha \|w\|^\beta & \leq |P_\lambda(z,w)| \leq & C\|z\|^\alpha \|w\|^\beta \ , \\ C^{-1}\|z\|^\gamma \|w\|^\delta & \leq |Q_\lambda(z,w)| \leq & C\|z\|^\gamma \|w\|^\delta \ . \end{array}$$

On en déduit que la suite $g^j(z,\lambda)$ converge uniformément par rapport à (z,λ) dans $U_R \times B(\lambda_0,\varepsilon)$. Donc $v \equiv g_{\lambda_0}$ dans U_R. Mais v et g_{λ_0} satisfont la même équation fonctionnelle $v \circ f_{\lambda_0} = \rho_+ \cdot v$, et $g_{\lambda_0} \circ f_{\lambda_0} = \rho_+ \cdot g_{\lambda_0}$. On en déduit, puisque le bassin d'attraction $\Omega_q(f_{\lambda_0})$ de q relatif à f_{λ_0} est égal à $\Omega_q(f_{\lambda_0}) = \bigcup_{j \geq 1} f_{\lambda_0}^{-j}(U_R)$, que $v \equiv g_{\lambda_0}$ dans ce bassin. Enfin on a $0 \leq v \leq g_{\lambda_0}$ et $g_{\lambda_0} \equiv 0$ à l'extérieur de $\Omega_q(f_{\lambda_0})$, donc $v \equiv g_{\lambda_0}$ dans tout $\mathbf{C}^2$. $\square$

3.5 Quelques exemples

Dans cette section, nous donnons deux exemples d'applications rationnelles présentant des caractéristiques intéressantes.

Le premier précise la difficulté du Théorème 2.4.6: on construit une application birationnelle (i.e. $\deg(f) = 1$) de $\mathbf{P}^2$ t.q. l'ensemble des points où le potentiel du courant de Green vérifie $\{G = -\infty\}$ contient une réunion dénombrable de courbes.

Proposition 3.5.1. *Il existe deux constantes b et c non nulles, telles que l'application birationnelle $f : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$ définie par*

$$f[z : w : t] = [wt + cz(w + t) : w(t + bz) : t(w + bz)]$$

vérifie les propriétés:

1. $I(f) = \{[0 : 0 : 1],\ [0 : 1 : 0],\ [1 : 0 : 0]\}$*;*
2. *l'ensemble critique de f est réduit aux trois hyperplans $zwt = 0$;*
3. $f(z = 0) = [1 : 1 : 1]$*,* $f(w = 0) = [c : 0 : b] \circlearrowleft$*,* $f(t = 0) = [c : b : 0] \circlearrowleft$*;*
4. *l'hyperplan $\Delta = \{w = t\}$ est f-invariant, et $f|_\Delta$ est conjuguée à une rotation irrationnelle;*
5. $[1 : 1 : 1] \notin I(f^\infty)$*;*
6. $[1 : 0 : 0] \in \overline{\cup_{n\geq 0} f^n[1 : 1 : 1]}$*;*

Si G est la fonction de Green associée à f,

7. $G(1, 1, 1) = -\infty$*.*

Les assertions 1. 2. 3. et 5. impliquent que f est algébriquement stable, tandis que 7. implique que l'ensemble des pôles de G contient le point $[1 : 1 : 1]$, donc $\{z = 0\}$ et toutes ses préimages. En particulier, l'ensemble $\{G = -\infty\}$ des pôles de G n'admet aucun voisinage Stein .

Démonstration. Les assertions 1. 2. et 3. sont immédiates. Sur Δ, on a

$$f[z : w : w] = [w(w + 2cz) : w(w + bz) : w(w + bz)] \ .$$

En particulier Δ est bien invariante. Remarquons tout d'abord que $I(f^\infty) \cap \Delta = \cup_{n\geq 0} f^{-n}([1 : 0 : 0])$. Il suffit donc pour prouver 5. de vérifier que $[1 : 0 : 0] \notin \cup_{n\geq 0} f^n[1 : 1 : 1]$.

En coordonnées $[z : 1 : 1]$ sur Δ, f se réécrit

$$f(z) = \frac{2cz + 1}{bz + 1} \ .$$

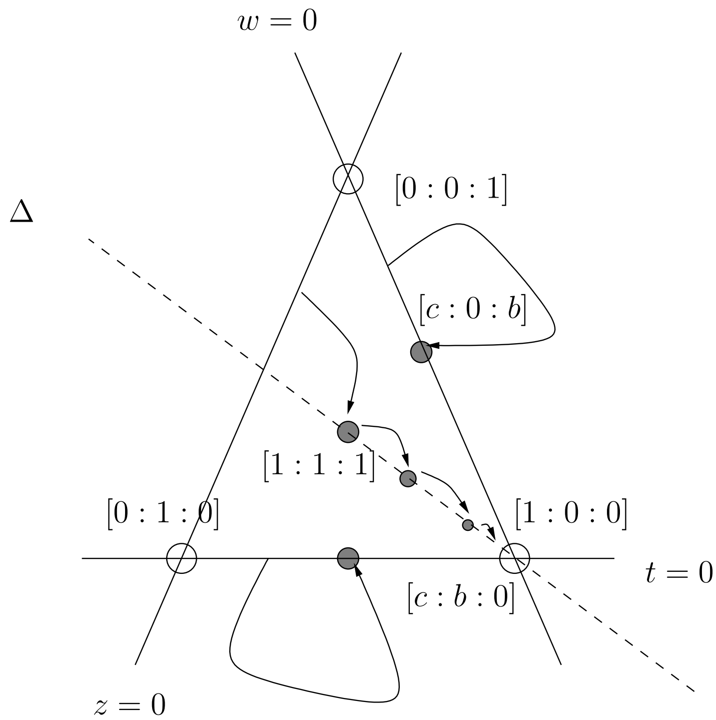

Figure 3.1: Exemple d'application birationnelle.

Posons $\nabla = \sqrt{4b + (2c-1)^2}$ en choisissant la solution de partie réelle positive. Si $\nabla \neq 0$, les deux points $z_\pm = (2c - 1 \pm \nabla)/2b$ sont les deux points fixes de f. Le changement de coordonnées $\tau = z - z_-/z - z_+$ conjugue f à

$$f(\tau) = -\frac{(2c-1)^2 + 4b + \nabla(2c+1)}{(2c-1)^2 + 4b - \nabla(2c+1)}\tau := \theta\tau \ .$$

Dans ces coordonnées, le point $[1 : 0 : 0]$ est le point $\tau_0 = 1$, et le point $[1 : 1 : 1]$ correspond à $\tau_1 = z_- - 1/z_+ - 1$. Soient ϕ et $\psi \in [0, 1]$ deux réels fixés, avec ψ non entier. Il est alors possible de choisir b et c, tels que

- $\tau_1(b, c) = e^{2i\pi\psi} \neq 1$,
- $\theta(b, c) = e^{2i\pi\phi}$.

Pour prouver cela, il suffit de prouver que le système algébrique suivant admet des solutions dans $\mathbf{C}^3$:

$$\begin{aligned}
(2c-1)^2 + 4b + \nabla(2c+1) &= -e^{2i\pi\phi}\big((2c-1)^2 + 4b - \nabla(2c+1)\big) \\
2c - 2b - 1 - \nabla &= e^{2i\pi\psi}(2c - 2b - 1 + \nabla) \\
\nabla^2 &= (2c-1)^2 + 4b
\end{aligned}$$

Le système à l'infini se réécrit

$$\begin{aligned} 4c^2 + 2\nabla c &= -4e^{2i\pi\phi}c^2 + 2e^{2i\pi\phi}\nabla c \\ 2c - 2b - \nabla &= e^{2i\pi\psi}(2c - 2b + \nabla) \\ \nabla^2 &= 4c^2 \end{aligned}$$

qui ne possède pas de solutions non-nulles. On en déduit que le nombre de solutions dans $\mathbf{P}^3$ du système initial est fini, égal à 4, et toutes les racines sont localisées dans $\mathbf{C}^3$.

Le point (3) du Théorème 3.2.4 implique que $G(1,1,1) = -\infty$ est équivalent à la divergence de la série

$$S := \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} \log \operatorname{dist}(f^n[1:1:1], I(f)) \ ,$$

qui dans notre cas se majore par

$$\begin{aligned} S \leq \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} \log |f^n(\tau_1) - 1| &= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} \log |e^{2i\pi(\psi+n\phi)} - 1| \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} \log |\sin(\pi(\psi + n\phi))| + \sum_{n\geq 0} \frac{\log 2}{2^n} \\ &\leq \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} \log |\{\psi + n\phi\}| + \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} \log 2\pi \ , \end{aligned}$$

où $\{x\}$ dénote la partie fractionnaire de x. On choisit maintenant $\psi = -1/2$, et $\phi = \sum_{n\geq 0} 1/2^{a_n}$, avec a_n défini par récurrence, a_0=1, et $a_{n+1} = 2^{2^{a_n-1}} + a_n$. On a alors l'estimée

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{2^{a_n-1}}} \log\{\psi + 2^{a_n-1}\phi\} &\leq \frac{1}{2^{2^{a_n-1}}} \log 2^{a_n - a_{n+1}} \\ &\leq \frac{a_n - a_{n+1}}{2^{2^{a_n-1}}} \log 2 \\ &\leq -\log 2 \ . \end{aligned}$$

Donc $S = -\infty$ et $G(1,1,1) = -\infty$. On conclut la démonstration en remarquant que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\{\psi + n\phi\} \neq 0$, car ϕ est transcendant, donc 5. est vérifié. □

Nous exhibons dans le second exemple une famille d'applications polynomiales pour lesquelles le support du courant de Green est strictement inclus dans l'ensemble de Julia, ces applications ne sont donc pas normales (cf Théorème 3.2.4). Plus précisément, il y a un disque holomorphe isolé dans l'ensemble de Julia que le courant de Green ne peut pas charger (cf Théorème 3.2.5). Ce phénomène est plutôt surprenant pour des applications qui ne sont pas des produits croisés.

Proposition 3.5.2. *Considérons*

$$f : (z, w) \in \mathbf{C}^2 \mapsto \big(z(w^2 - \lambda^2), w^2(zw^p + Q(w))\big) \in \mathbf{C}^2,$$

où Q est un polynôme de degré $m \leq p$ et $|\lambda| > 1$. On note encore f l'extension méromorphe à $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ qui est algbriquement stable. Notons $q_0 = ([0 : 1], [1 : 0]) \in I(f)$. On note Ω_{q_0} l'ensemble des points attirés par q_0 sous l'itération de f.

Alors il existe $r_0 > 0$ tel que

$$\left\{(z, w) \in \mathbf{C}^2 \,/\, 0 < |z| < r_0^{-1} \text{ et } |w| < r_0^2\right\} \subset \Omega_A.$$

Le disque $\{0\} \times \Delta(r_0^2)$ est isolé dans l'ensemble de Julia $J(f)$. En particulier $\mathrm{Supp}\, T$ est strictement contenu dans $J(f)$.

La proposition est une conséquence immédiate du lemme suivant:

Lemme 3.5.3. *Considérons pour ε, $r > 0$,*

$$W_\varepsilon(r) := \left\{(z, w) \in \mathbf{C}^2 \,/\, \varepsilon < |z| < r^{-1} \text{ et } |w| < r^2\right\}.$$

Fixons $t, t' \in \mathbf{R}$ tels que $1 < t < |\lambda|^2 < t'$. Alors il existe $r_0 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, $0 < r < r_0$,

$$f(W_\varepsilon(r)) \subset W_{t\varepsilon}(r/t') \ .$$

Démonstration.

On fixe $r_0 > 0$ assez petit pour que $|\lambda|^2 - r_0^2 \geq t$, $|\lambda|^2 + r_0^2 \leq t'$ et $(1 + M)r_0(t')^2 < 1$, où $M = \sup_{|w|\leq 1} |Q(w)|$. On a alors, pour $0 < r < r_0$, $(z, w) \in W_\varepsilon(r)$ et $(z_1, w_1) = f(z, w)$, les inégalités

$$\begin{aligned}
&|z_1| \geq (|\lambda^2| - r^2)|z| > t\varepsilon;\\
&|z_1| \leq (|\lambda|^2 + r^2)|z| < \frac{|\lambda|^2 + r^2}{r} < \frac{t'}{r};\\
&|w_1| \leq |w|^2(|z||w|^p + |Q(w)|) \leq r^4\frac{1 + M}{r} < \left(\frac{r}{t'}\right)^2
\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. □

L'application f a pour la matrice des degrés

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 + p \end{bmatrix} .$$

Son premier degré dynamique et son degré topologique sont

$$\begin{gathered}
\lambda_1(f) = 1/2(3 + p + \sqrt{(p + 1)^2 + 8}) \ ,\\
\deg(f) = \max(p + 2, 4 + m) \text{ si } Q \not\equiv 0 \ .
\end{gathered}$$

On a donc $\deg(f) > \lambda_1(f)$ ssi $m = p$ ou $m = p - 1 \geq 0$ et cette condition assure l'existence d'une mesure limite μ_f (cf Théorème 3.3.1).

Lorsque $m \leq p - 1$, on obtient

$$I_1(f) = \{([1:0],[0:1]);([0:1],[1:\pm\lambda])\} \ ,$$
$$I_2(f) = \{([1:0],[0:1]);([0:1],[1:0])\} \ .$$

Lorsque $m = p$, on obtient $I_1(f) \cap I_2(f) = \emptyset$ et $\deg(f) = p + 4$ est donné par la Proposition 3.3.4. Notons que le point $A = ([0:1],[1:0])$ est un point d'indétermination, l'application f n'est donc pas normale.

Chapitre 4

Théorèmes de convergence.

Introduction

Au Chapitre 2, nous avons associé à une application méromorphe dominante $f : X \to X$ un courant $T(f)$ positif fermé de bidegré $(1,1)$ défini comme limite $T(f) := \lim_{j\to\infty} \rho^{-j}(f^*)^j\omega$ où ω est une forme $(1,1)$ positive fermé sur X t.q. $f^*\{\omega\} = \rho\{\omega\}$. Ce courant satisfait à l'équation d'invariance $f^*T(f) = \rho T(f)$. Nous avons décrit quelques propriétés de ce courant et prouvé qu'il contenait des informations de nature dynamique sur f (voir par exemple Théorème 2.4.5). Dans ce chapitre, nous étudions les problèmes de convergence vers $T(f)$. Nous posons les deux questions suivantes.

Problème A: Caractériser tous les courants $S \in \mathcal{C}_1^+(X)$ pour lesquels on a convergence

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{\rho^j}(f^*)^j S = T(f). \tag{4.1}$$

au sens des courants. ♠

Pour un courant $S \neq T(f)$ vérifiant l'équation d'invariance $f^*S = \rho S$, on ne peut avoir convergence (4.1).

Problème B: Caractériser le convexe $\mathcal{G}_\rho$ des courants $S \in \mathcal{C}_1^+(X)$ satisfaisant à l'équation d'invariance $f^*S = \rho S$. ♠

Notre but est de donner une réponse précise à ces deux problèmes pour une classe particulière d'applications méromorphes. Nous ferons dans tout ce chapitre les hypothèses suivantes.

(R1) X est une *surface* lisse, kählérienne, compacte, connexe.

(R2) $f : X \to X$ est une application *birationnelle* dominante algébriquement stable t.q. $\rho := \lambda_1(f) > 1$.

(R3) Le sous-espace $\ker(f^* - \rho\mathrm{Id}) \subset H_+^{1,1}(X)$ est de dimension 1, engendré par la classe d'une forme lisse positive fermée $\{\omega\}$. De manière équivalente, pour toute classe $\xi \in H_+^{1,1}(X)$, on a $\rho^{-j}(f^*)^j\xi \to c(\xi)\{\omega\}$ pour un réel $c(\xi)$.

Définition 4.0.4. *On dira que $f : X \to X$ appartient à la classe $(\mathcal{B})$ lorsque les conditions (R1), (R2) et (R3) décrites ci-dessus sont satisfaites.*

Notons que toute application birationnelle algébriquement stable de $X = \mathbf{P}^2$ ou $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ avec $\lambda_1(f) > 1$ appartient à la classe $(\mathcal{B})$. En effet dans $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ si (R3) est violée, f est soit holomorphe, soit un produit croisé (voir Lemme 3.2.1). Comme f est birationnelle, ceci implique $\lambda_1(f) = 1$ et contredit l'hypothèse (R2).

Pour les applications de la classe $(\mathcal{B})$ le problème A possède la solution suivante.

Théorème A. *Soit $f : X \to X$ une application birationnelle de la classe $(\mathcal{B})$ et $T(f) := \lim_{j\to\infty} \rho^{-j}(f^j)^*\omega$ le courant de Green de f.*

Alors il existe un ensemble fini $\mathcal{E} \subset X$ (l'ensemble des points exceptionnels de f) tel que pour tout $S \in \mathcal{C}_1^+(X)$, les conditions suivantes sont équivalentes.

1. *Pour tout $p \in \mathcal{E}$, on a $\nu(p, S) = 0$.*
2. *Il existe une constante $c := c(\{S\}) > 0$ t.q.*

$$\frac{1}{\rho^j}(f^j)^*S \longrightarrow c \cdot T(f). \tag{4.2}$$

De plus si V est un voisinage fixé de $\mathcal{E}$, la convergence dans (4.2) est uniforme dans le compact des courants de masse 1 et dont le support évite V.

Remarque: Le Théorème A implique un résultat d'équidistribution des préimages d'une hypersurface générique. C'est donc un analogue de l'assertion suivante. Pour toute fraction rationnelle à une variable $R \in \mathbf{C}(z)$, on a équidistribution des préimages d'un point $z \in \mathbf{P}^1$ vers la mesure d'équilibre de R ssi z n'est pas exceptionnel (voir [Ly83]). ♦

Notons le corollaire suivant. On notera $\mathcal{V}_d = \mathbf{P}^{d(d+3)/2}$ l'ensemble des hypersurfaces de $\mathbf{P}^2$ de degré d.

Corollaire 4.0.5. *Soit $f : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$ une application birationnelle algébriquement stable et t.q. $\rho := \lambda_1(f) > 1$. Pour tout entier $d \geq 1$, l'ensemble des hypersurfaces $H \in \mathcal{V}_d$ t.q. $\rho^{-j}(f^j)^*[H] \to d \cdot T(f)$ est un ouvert de Zariski dense dans $\mathcal{V}_d = \mathbf{P}^{d(d+3)/2}$.*

On peut répondre au problème B.

Théorème B. *On se place sous les hypothèses du Théorème A.*

1. *Pour tout point $p \in \mathcal{E}$, il existe un cycle analytique de codimension 1 à coefficients réels positifs T_p dont le support contient p et t.q.*

$$f^*T_p = \rho \cdot T_p. \tag{4.3}$$

   Ce cycle est unique sous la normalisation $\|T_p\| = 1$ et si il vérifie la condition suivante. Pour tout cycle analytique S contenant p satifaisant à (4.3), il existe une constante $c > 0$ t.q. $S \geq c \cdot T_p$.

2. *On a*

$$\mathcal{G}_\rho = \mathbf{R}_+ \cdot T(f) + \sum_{p\in\mathcal{E}} \mathbf{R}_+ \cdot T_p.$$

   En d'autres termes, tout courant $S \in \mathcal{C}_1^+(X)$ vérifiant l'équation fonctionnelle $f^*S = \rho S$ est combinaison linéaire des courants $T(f)$ et $\{T_p\}_{p\in\mathcal{E}}$.

On vérifiera aussi que les deux théorèmes ci-dessus sont valables pour les applications monomiales de $\mathbf{C}^2$ définies par $f(z,w) = (z^\alpha w^\beta, z^\gamma w^\delta)$ et dont la matrice des degrés est primitive.

La démonstration des Théorèmes A et B s'appuie sur des estimations volumiques i.e. sur une minoration fine de la suite $\mathrm{Vol}(f^j(E))$ pour un borélien E fixé. Elle se situe dans l'esprit de celle initiée par Bedford-Smillie ([BS91]), Fornaess-Sibony ([FS92]) dans le cas des applications de Hénon, et de Diller ([Di96]) dans celui des applications birationnelles de $\mathbf{P}^2$. Notre méthode permet de donner des théorèmes optimaux de convergence qui étendent même dans le cas des applications de Hénon les résultats déjà obtenus.

Nous donnons tout d'abord une caractérisation de l'ensemble exceptionnel $\mathcal{E}$ et définissons les courants T_p associés aux points $p \in \mathcal{E}$. Celui-ci est un sous-ensemble de l'ensemble des points périodiques superattractifs. A tout point p superattractif, nous associons un réel $\rho(p) > 1$ qui contrôle la décroissance des volumes près de p. Le point p sera exceptionnel lorsque $\rho(p)$ est maximal égal à ρ.

Nous prouvons ensuite les différentes estimées volumiques qui seront nécessaires pour la démonstration du Théorème A. Celles-ci sont essentiellement basées sur les estimées volumiques d'ensemble de sous-niveau de fonctions psh dûes à Kiselman. Ces dernières simplifient les arguments basées sur les estimations d'aire classiques de théorie du potentiel utilisées dans [BS91] et [FS92].

On se ramène alors à des estimations de certaines multiplicités asymptotiques du type considéré au Chapitre 2. Il est important de noter que ces multiplicités doivent être calculées en tout point et en particulier aux points $x \in I(f)$. L'hypothèse f birationnelle permet de contrôler simplement le comportement de ces multiplicités sur $I(f)$ pour conclure.

Nous prouvons alors les deux Théorèmes A et B. Nous concluons enfin en décrivant précisément le cas des applications monomiales de $\mathbf{C}^2$ et des applications birationnelles de $\mathbf{P}^2$. Nous étudions dans ces deux cas la structure de $\mathcal{E}$.

4.1 Généralités sur les applications birationnelles de surfaces

Soit X une surface complexe lisse compacte connexe et $f : X \to X$ une application rationnelle dominante. Rappelons que f est dite birationnelle si il existe des fermés analytiques stricts $V, W \subsetneq X$ t.q. $f : X \setminus V \to X \setminus W$ soit un biholomorphisme. Si $f = f_+$ est birationnelle, on notera f_- son inverse.

On vérifie les propositions générales suivantes.

Proposition 4.1.1. *Soit $f_+ : X \to X$ une application birationnelle.*

- *f_+ ralise un biholomorphisme de $X \setminus \mathcal{C}(f_+)$ sur $X \setminus \mathcal{C}(f_-)$;*
- *$f_+(\mathcal{C}(f_+)) = I(f_-)$.*
- *Le graphe $\Gamma(f_+) \subset X \times X$ de f_+ est lisse hors de $I(f_+) \times I(f_-)$.*

Démonstration. Pour le dernier point, il suffit de remarquer que si $(p, q) \in \Gamma(f_+)$ et que $p \notin I(f_+)$ la première projection induit un biholomorphisme local de $\Gamma(f_+)$ sur X qui est lisse. De même lorsque $q \notin I(f_-)$, la projection de $\Gamma(f_+)$ sur le second facteur est un biholomorphisme. □

Proposition 4.1.2. *Soit $f_+ : X \to X$ une application birationnelle. Notons f_+^*, f_-^* les actions respectives de f_+, f_- sur $H^{1,1}(X)$. Alors pour toutes formes ω_1, ω_2 lisses fermées de bidegré $(1,1)$ on a*

$$< f_+^*\omega_1, \omega_2 >=< \omega_1, f_-^*\omega_2 > .$$

En particulier, on a $\rho_1(f_+) = \rho_1(f_-)$ et $\lambda_1(f_+) = \lambda_1(f_-)$.

Démonstration. Les courants $f_+^*\omega_1 \wedge \omega_2$ et $\omega_1 \wedge f_-^*\omega_2$ ne chargent pas les hypersurfaces, on a donc

$$\int_X f_+^*\omega_1 \wedge \omega_2 = \int_{X\setminus\mathcal{C}(f_+)} f_+^*\omega_1 \wedge \omega_2 =$$
$$= \int_{X\setminus\mathcal{C}(f_-)} \omega_1 \wedge f_-^*\omega_2 = \int_X \omega_1 \wedge f_-^*\omega_2,$$

ce qui conclut la preuve. □

Proposition 4.1.3. *Soit $f_+ : X \to X$ une application birationnelle. Les conditions suivantes sont quivalentes*

i) f_+ est algbriquement stable ;

ii) $I(f_+^\infty) \cap I(f_-^\infty) = \emptyset$;

iii) f_- est algbriquement stable.

Démonstration. La condition ii) étant symétrique par rapport à f_+ et f_-, il suffit de prouver l'équivalence entre i) et ii).

i) $\Rightarrow$ ii) : Soit $p \in I(f_+^\infty) \cap I(f_-^\infty)$. On peut trouver deux entiers $j, k \in \mathbf{N}$ et $q \in I(f_-)$ t.q. $f_+^j(q) = q$ et $f_+^k(p) \in I(f_+)$. Il s'ensuit que la courbe $V := f_+^{-1}(q)$ est envoyée par f_+^{j+k+1} dans $I(f_+)$. Ainsi f_+^{j+k+1} n'est pas algébriquement stable et donc f_+ non plus (voir Proposition 2.2.20).

ii) $\Rightarrow$ i) : Si f_+ n'est pas algébriquement stable, il existe une courbe V et $j \geq$ t.q. $f_+^j(V) = p \in I(f_+)$. Quitte changer f_+ en f_+^j on peut supposer que $j = 1$. La courbe V est ncessairement une composante de $\mathcal{C}(f_+)$, donc $p \in I(f_+) \cap I(f_-)$ (voir Proposition 4.1.1). □

Deux propriétés importantes des applications birationnelles seront utilisées de manière systématique dans ce chapitre. La première propriété est une conséquence simple de la définition. La seconde est plus profonde et résulte de la Proposition 4.1.4.

(R4) On a $\mathfrak{C}(f^\infty) = \mathcal{C}(f^\infty)$ c'est à dire que pour toute composante irréductible $V \subset \mathcal{C}(f^\infty)$, il existe un entier $k \geq 0$ t.q. $f^k(V)$ est réduit à un point.

(R5) Pour tout point périodique p de période k, le germe (f^k, p) est rigide au sens suivant. L'ensemble $\mathcal{C}(f^\infty) := \cup_{j\geq 0}\mathcal{C}(f^j)$ définit une hypersurface à croisements normaux au point p. De manière équivalente, l'ensemble critique $\mathcal{C}(f^{2k})$ est totalement invariant par f^k et à croisements normaux.

Proposition 4.1.4. *Toute application birationnelle $f_+ : X \to X$ d'une surface complexe compacte dans elle-même satisfait à la condition (R5).*

Plus précisément, l'ensemble critique $\mathcal{C}(f_+)$ est une union de courbes rationnelles. Les singularités de $\mathcal{C}(f_+)$ non incluses dans $I(f_+)$ sont à croisements normaux.

Remarque: Nous avons donné au Chapitre 1 une classification des germes attractifs satisfaisant à (R5) localement. Nous n'utiliserons pas cette classification et nous nous contenterons de formes normales "grossières". ♦

Démonstration. Soit $\Gamma \subset X \times X$ le graphe de f_+. L'ensemble Γ est un espace analytique complexe dont les singularités sont parmi les points $p \in I(f_+) \times I(f_-)$. Soit π_1 (resp. π_2) les deux projections de Γ sur le premier (resp. second) facteur. Comme f_+ est birationelle, le morphisme π_1 (resp. π_2) est propre et induit un biholomorphisme de $\Gamma \setminus \pi_1^{-1}I(f_-)$ sur son image (resp. $\Gamma \setminus \pi_1^{-1}I(f_+)$). Soit $\pi : \widehat{\Gamma} \to \Gamma$ une résolution minimale des singularités de Γ (voir [La71] Theorem 5.9) et définissons $\widehat{\pi}_i := \pi_i \circ \pi$. Par [La71] Theorem 5.7, les morphismes $\widehat{\pi}_1$ et $\widehat{\pi}_2$ sont des compositions finies d'éclatement de point au-dessus de leurs valeurs critiques respectives. En particulier $\widehat{\pi}_2^{-1}I(f_-)$ est une union de courbes rationnelles lisses ne possédant que des singularités à croisements normaux. Comme $\mathcal{C}(f_+) = \widehat{\pi}_1(\widehat{\pi}_2^{-1}I(f_-))$, et que $\widehat{\pi}_1$ est injective hors de $\widehat{\pi}_1^{-1}I(f_+)$, on en déduit que $\mathcal{C}(f_+)$ est une union de courbes rationnelles. Les singularités de $\mathcal{C}(f_+)$ sont soit à croisements normaux soit inclus dans $\widehat{\pi}_1(\mathcal{C}(\widehat{\pi}_1)) = I(f_+)$. Ceci conclut la preuve de la seconde assertion.

Si $p \notin I(f_+^\infty)$ est un point fixe pour f_+^k, par ce qui précède $\mathcal{C}(f_+^k)$ est à croisements normaux en p ainsi que $\mathcal{C}(f_+^{jk})$ pour tout entier $j \geq 0$. L'application f_+ vérifie donc bien la condition (R5). $\square$

4.2 Points exceptionnels

Dans cette section, nous supposons que $f : X \to X$ est une application rationnelle dominante (non nécessairement birationnelle) satisfaisant aux conditions (R1), (R3), (R4) et (R5). On supposera que f est algébriquement stable.

Nous noterons $\mathcal{P}\mathrm{er}(f)$ l'ensemble des points périodiques de f et $\mathcal{A}(f) \subset \mathcal{P}\mathrm{er}(f)$ (resp. $\mathcal{SA}(f) \subset \mathcal{P}\mathrm{er}(f)$) l'ensemble des points périodiques attractifs (resp. superattractifs) i.e. dont toutes les valeurs propres sont de module strictement inférieur à 1 (resp. nulles). Lorsque $p \in \mathcal{A}(f)$ est de période k, on définit le bassin d'attraction de son orbite $\Omega(p) := \{q \in X, \exists i \leq k,\ f^{kj}(q) \to_{j\to\infty} f^i(p)\}$.

Soit $p \in \mathcal{P}\mathrm{er}(f)$ un point périodique de f de période k. On se place localement sur un voisinage $U \ni p$. Comme f satisfait à (R5), l'ensemble $\mathcal{C}(f^\infty) \cap U = \mathcal{C}(f^{2k}) \cap U$ est totalement invariant et à croisements normaux. On a donc dans un système de coordonnées locales (z, w) et de manière ensembliste

$$\mathcal{C}(f^\infty) \cap U = \mathcal{C}(f^{2k}) \cap U = \begin{cases} \text{soit } \{z = 0\}, \\ \text{soit } \{zw = 0\}. \end{cases}$$

On peut donc écrire localement

$$\begin{cases} f^k(z,w) = (cz^{r_p}(1+\star), \star) \text{ si } \mathcal{C}(f^{2k}) \cap U \text{ est irréductible}, \\ f^k(z,w) = (c_1 z^\alpha w^\beta (1+\star), c_2 z^\gamma w^\delta (1+\star)) \text{ si } \mathcal{C}(f^{2k}) \cap U \text{ est réductible}, \end{cases}$$

pour des constantes $c, c_1, c_2 \in \mathbf{C}^*$, $r_p, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{N}$, et où $\star$ désigne un germe holomorphe s'annulant à l'origine. Dans le second cas, on notera

$$A_p := \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix},$$

et $\rho(A_p)$ son rayon spectral.

Définition 4.2.1. *Soit $p \in \mathcal{A}(f)$ un point périodique de période k. Dans les notations précédentes, on pose*

$$\rho(p)^k := \begin{cases} r_p & \text{si } \mathcal{C}(f^{2k}) \cap U \text{ est irréductible}, \\ \rho(A_p) & \text{si } \mathcal{C}(f^{2k}) \cap U \text{ est réductible}, \end{cases}$$

Nous verrons que le réel $\rho(p)$ controle précisément la décroissance des volumes des itérés dans $\Omega(p)$ (voir Théorème 4.3.2).

Lemme 4.2.2. *Soit $p \in \mathcal{P}er(f)$. On a alors l'équivalence*

$$\rho(p) > 1 \text{ ssi } p \in \mathcal{SA}(f).$$

Démonstration. Soit $p \in \mathcal{P}\mathrm{er}(f)$ un point périodique de période k. Si $p \in \mathcal{SA}(f)$, on vérifie localement que $\rho(p)^k > 1$ donc $\rho(p) > 1$.

Réciproquement, si $\rho(p) > 1$, on a $\rho(p)^k > 1$. Comme f satisfait la propriété (R4), on a $f^{2k}(\mathcal{C}(f^{2k}) \cap U) = p$. Si $\mathcal{C}(f^{2k}) \cap U$ est irréductible, cela implique que l'on peut écrire f^k sous la forme $f^k(z,w) = (cz^{r_p}(1 + \star), zf_2(z,w))$ avec $r_p \geq 2$ donc p est bien super-attractif.

Sinon l'ensemble critique possède deux tangentes transverses donc le noyau de Df_0^k est de dimension 2 et p est bien super-attractif. □

Proposition 4.2.3. *Soit $p \in \mathcal{SA}(f)$ de période k. Il existe un $\mathbf{R}_+$-cycle analytique $\widetilde{T}_p$ défini sur X, inclus dans $\mathcal{C}(f^k)$ et dont le support contient p t.q. localement au point p on a*

$$\left((f^k)^*\widetilde{T}_p,\ p\right) = \rho^k(p)\left(\widetilde{T}_p,\ p\right).$$

Celui-ci est de plus unique à une constante multiplicative près.

Démonstration. On peut supposer que p est fixe ($k = 1$). On se place localement.

Lorsque $\mathcal{C}(f^2) \cap U = \{z = 0\}$ est irréductible, on définit $\widetilde{T_p}$ comme la composante irréductible de $\mathcal{C}(f^2)$ contenant p. On vérifie dans une carte locale $(f^*\widetilde{T}_p, p) = \rho(p)(\widetilde{T}_p, p)$. Lorsque $\mathcal{C}(f^2) \cap U = \{zw = 0\}$ est réductible, on choisit un vecteur propre (a_p, b_p) à coefficients positifs associé à la valeur propre $\rho(A_p)$. On pose alors $\widetilde{T}_p := a_p[V_1] + b_p[V_2]$ où V_1 (resp. V_2) est la composante irréductible de $\mathcal{C}(f^2)$ contenant $\{z = 0\}$ (resp. $\{w = 0\}$). Si $V_1 \neq V_2$, on a immédiatement l'équation d'invariance $(f^*\widetilde{T}_p, p) = \rho(p)(\widetilde{T}_p, p)$. Sinon $V_1 = V_2$ et on a globalement $f^*[V_1] = c[V_1]$ pour une constante $c > 0$, ce qui implique $a_p = b_p$ et l'équation d'invariance est encore satisfaite.

On remarque de plus que A_p est nécessairement primitive (voir Définition 3.2.2) car f vérifie (R4). Il s'ensuit que le vecteur (a_p, b_p) est unique et $\widetilde{T}_p$ est unique. □

Proposition 4.2.4. *Pour tout $p \in \mathcal{SA}(f)$, on a*

$$\rho(p) \leq \rho = \lambda_1(f). \tag{4.4}$$

De plus, on a égalité ssi il existe un $\mathbf{R}_+$-cycle T_p dont le support contient p et vérifie globalement l'équation fonctionnelle $f^*T_p = \rho T_p$.

Démonstration. Soit $\widetilde{T}_p$ le cycle construit précédemment. L'application f satisfait (R3): il existe $C > 0$ t.q. pour tout entier $j \geq 0$, on a

$$\|(f^j)^*\widetilde{T}_p\| \leq C\rho^j\|\widetilde{T}_p\|.$$

Or $(f^k)^*T_p \geq \rho(p)^k T_p$ localement au point p donc l'inégalité reste valable globalement, par suite $\|(f^{kj})^*\widetilde{T}_p\| \geq \rho(p)^{kj}\|\widetilde{T}_p\|$ et $\rho(p) \leq \rho$.

En cas d'égalité $\rho(p) = \rho$, le cycle

$$T_p := \sum_{j=0}^{k-1} \rho^{k-j}(f^j)^*\widetilde{T}_p$$

vérifie $f^*T_p \geq \rho T_p$. Comme le rayon spectral de f^* est égal à ρ, on en déduit que $f^*T_p = \rho T_p$. $\square$

Nous concluons cette section par la définition des points exceptionnels.

Définition 4.2.5. *Points exceptionnels*

Un point $p \in \mathcal{SA}(f)$ est dit exceptionnel ssi $\rho(p) = \rho$. On notera $\mathcal{E}$ l'ensemble des points exceptionnels de f.

Proposition 4.2.6.

- *On a les inclusions $\mathcal{E} \subset \{\rho(p) > 1\} \subset \mathcal{SA}(f)$.*
- *L'ensemble $\mathcal{E}$ est fini.*
- *Lorsque $p \in \mathcal{E}$, le cycle T_p construit ci-dessus est unique sous la normalisation $\|T_p\| = 1$ et vérifiant la condition suivante. Pour tout cycle S contenant p t.q. $f^*S = \rho S$, il existe une constante $c > 0$ t.q. $S \geq cT_p$.*

Démonstration. La première assertion résulte du Lemme 4.2.2. La seconde découle de (R4), en effet Card $(\mathcal{SA}(f))$ est borné par le nombre de composantes irréductibles de $\mathcal{C}(f)$. La dernière assertion résulte de l'unicité locale de $\widetilde{T}_p$. $\square$

4.3 Estimées volumiques

Cette section constitue le point clé dans la preuve du Théorème A. L'hypothèse f birationnelle est alors cruciale pour la démonstration du Théorème 4.3.3 (voir Lemme 4.3.8).

Le résultat fondamental que nous utiliserons pour obtenir les estimées volumiques est dû à Kiselman [Ki99].

Théorème 4.3.1. *Théorème 3.1. [Ki99]*

Soit U un ouvert de $\mathbf{C}^n$, K un compact de U, et u une fonction psh sur U. Pour tout réel $\alpha < 2(\sup_K \nu(z,u))^{-1}$, il existe une constante $C_\alpha > 0$ t.q. pour tout $t \geq 0$, l'estimation

$$Vol(K \cap \{u \leq -t\}) \leq C_\alpha \exp(-\alpha t) \tag{4.5}$$

est satisfaite.

On appliquera ce résultat à la fonction $u = \log|Jf|$. Le nombre de Lelong de u au point p est donné par l'ordre d'annulation du déterminant jacobien. Il nous faudra ensuite contrôler la vitesse de croissance de ces multiplicités par itération de f.

La fonction $x \mapsto -x\log(x/e)$ définit un homéomorphisme du segment $[0,1]$ sur lui-même. On notera Υ sa fonction réciproque. Celle-ci est convexe et vérifie $\Upsilon(x) \leq x$. Pour $C, \alpha > 0$ fixés, une primitive de $\Upsilon^{-1}(Cx^\alpha)$ sur $\mathbf{R}_+$ est donnée par

$$\begin{aligned}\int \Upsilon^{-1}(Cx^\alpha)dx = \frac{1}{\alpha+1}x\Upsilon^{-1}(Cx^\alpha) + \frac{\alpha C}{(\alpha+1)^2}x^{\alpha+1} \\ \leq x\Upsilon^{-1}(Cx^\alpha).\end{aligned} \tag{4.6}$$

Nos deux résultats sont les suivants. Le premier est un résultat local au voisinage des point superattractifs.

Théorème 4.3.2. *Estimations volumiques: dans les bassins d'attraction.*

Soit $f: X \to X$ une application rationnelle satisfaisant aux conditions (R4) et (R5).

Soit $p \in \mathcal{A}(f)$ un point périodique de période k et $U \subset \Omega(p)$ un petit voisinage de l'orbite $\{p, \cdots, f^{k-1}(p)\}$.

Alors il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ t.q. pour tout borélien $E \subset U$ et pour tout $j \geq 0$, l'estimation

$$Vol(f^j(E)) \geq \Upsilon(C_1\, Vol(E))^{C_2\rho(p)^j} \tag{4.7}$$

est satisfaite.

Le second permet de controler la décroissance des volumes des itérés en dehors des bassins de points superattractifs.

Théorème 4.3.3. *Estimations volumiques: hors des bassins.*
Soit $f_+ : X \to X$ une application birationnelle de la classe $(\mathcal{B})$. Fixons $U \subset \Omega(\mathcal{E})$ un ouvert contenant $\mathcal{E}$ et notons $\rho_0 := \sup_{X \setminus U} \rho(p) < \rho$.
Pour tout $\lambda > \rho_0$, il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ t.q. pour tout $j \geq 0$ et pour tout borélien E avec $E, f_+(E), \cdots, f_+^j(E) \subset X \setminus U$, l'estimation

$$Vol(f_+^j(E)) \geq (C_1 \, Vol(E))^{C_2 \lambda^j} \tag{4.8}$$

est satisfaite.

Remarque: Si U est un voisinage contenant $\mathcal{SA}(f_+)$, alors $\rho_0 = 1$ et on peut prendre pour λ n'importe quelle constante $\lambda > 1$. ♦

Le reste de cette section est consacré à la preuve de ces deux théorèmes.
Dans le cours de la preuve, nous aurons besoin du lemme suivant. Celui-ci est un simple calcul dont nous laissons le soin au lecteur.

Lemme 4.3.4. *Pour tout $r > 0$, l'estimation*

$$Vol\{|z| < 1, |w| < 1, |zw| < r\} = \pi^2 \Upsilon^{-1}(r^2) \tag{4.9}$$

est satisfaite.

Commençons par démontrer le Théorème 4.3.2.

Démonstration. Théorème 4.3.2.
On peut supposer que le point $p \in \mathcal{SA}(f)$ est fixe et que U est le polydisque de rayon 1 centré en $0 = p$. Comme f satisfait les hypothèses (R4) et (R5), on peut trouver un système de coordonnées (z, w) t.q. $\mathcal{C}(f^2) = \{z = 0\}$ ou $\{zw = 0\}$, vérifiant $f^{-1}(\mathcal{C}(f^2)) \subset \mathcal{C}(f^2)$ et $f(\mathcal{C}(f^2)) = 0$. On peut donc écrire f localement de manière compacte sous la forme

$$f(z, w) := \lambda Z^A(1 + \psi) = (\lambda_1 z^\alpha w^\beta(1 + \psi_1), \lambda_2 z^\gamma w^\delta(1 + \psi_2)),$$

avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{N}$, $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ et $\psi_1(0) = \psi_2(0) = 0$.
Comme $\mathcal{C}(f^2) = \{z = 0\}$ ou $\{zw = 0\}$, on a de plus

$$\det(Df_{z,w}) = Jf(z, w) = \lambda_3 z^\mu w^\nu (1 + \varphi),$$

pour des constantes $\lambda_3 \neq 0$, $\mu, \nu \in \mathbf{N}$ et un germe holomorphe φ t.q. $\varphi(0) = 0$. On a donc l'estimation

$$|Jf(z, w)| \geq C_1 |zw|^{D_1}, \tag{4.10}$$

pour des constantes $C_1, D_1 > 0$.

Pour $j \in \mathbf{N}$ fixé, on veut estimer $|Jf^j|$ dans U. On a

$$|f^j(Z)| = \left|\lambda_j Z^{A^j}(1+\psi_j)\right|,$$

avec

$$\begin{aligned}\lambda_j &= \lambda^{(A^j-1)(A-1)^{-1}} \\ (1+\psi_j) &= \prod_{l=0}^{j-1}(1+\psi\circ f^l)^{A^{j-1-l}}\end{aligned}$$

On peut majorer les coefficients de A^j par $D_2\rho(p)^j$. On en déduit alors les estimations

$$\min\{|\lambda_j|, (1+|\psi_j|)\} \geq C_2^{D_2\rho(p)^j},$$

puis

$$|f^j| \geq (C_3|zw|)^{D_3\rho(p)^j}.$$

On en déduit la suite d'inégalités

$$\begin{aligned}|Jf^j| &= \prod_{l=0}^{j-1}|Jf\circ f^l| \geq \prod_{l=0}^{j-1} C_1|zw|^{D_1}\circ f^l \\ &\geq C_1^j\prod_{l=0}^{j-1}(C_3|zw|)^{D_4\rho(p)^l} \geq (C_4|zw|)^{D_4\rho(p)^j},\end{aligned}$$

de sorte que

$$|Jf^j| \geq (C_4|zw|)^{D_4\rho(p)^j}. \tag{4.11}$$

Soit maintenant $E \subset U$ un borélien quelconque. On note $d\lambda$ la mesure de Lebesgue dans U. Dans la suite d'inégalités ci-dessous, on fixe un "temps d'arrêt" $T_0 > 0$ de telle sorte que $\mathrm{Vol}(E) = 2\Upsilon^{-1}(C_4^{-2}T_0^{1/2D_4\rho(p)^j})$. On a alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(f^j(E)) &= \int_{f^j(E)} d\lambda = \deg(f)^{-j}\int_E |Jf^j|^2 d\lambda \\ &= \deg(f)^{-j}\int_0^\infty \mathrm{Vol}\left(E\cap\{|Jf^j|^2 > t\}\right) dt \\ &\geq \deg(f)^{-j}\int_0^{T_0} \mathrm{Vol}(E) - \mathrm{Vol}\left(E\cap\{|Jf^j|^2 \leq t\}\right) dt \\ &\geq \deg(f)^{-j}\int_0^{T_0} \mathrm{Vol}(E) - \mathrm{Vol}\left\{|Jf^j|^2 \leq t\right\} dt\end{aligned}$$

$$\geq \deg(f)^{-j}\left[T_0\mathrm{Vol}(E) - \int_0^{T_0}\mathrm{Vol}\left\{|zw| \leq C_4^{-1}t^{1/2D_4\rho(p)^j}\right\} dt\right] \text{ par 4.11}$$

$$\geq \deg(f)^{-j}\left[T_0\mathrm{Vol}(E) - \pi^2\int_0^{T_0}\Upsilon^{-1}\left(C_4^{-2}t^{1/D_4\rho(p)^j}\right) dt\right] \text{ par 4.9}$$

$$\geq \deg(f)^{-j}\left[T_0\mathrm{Vol}(E) - \pi^2 T_0 \Upsilon^{-1}(C_4^{-2}T_0^{1/2D_4\rho(p)^j})\right] \text{ par 4.6}$$
$$\geq \deg(f)^{-j}T_0\mathrm{Vol}(E) \geq \Upsilon(C_5\mathrm{Vol}(E))^{2D_4\rho(p)^j} \text{ par convexité de } \Upsilon,$$

ce qui conclut la preuve. □

La démonstration du Théorème 4.3.3 est plus technique et repose sur l'estimation de certaines multiplicités.

Définition 4.3.5. *Pour tout germe holomorphe h défini au point p à valeurs dans $\mathbf{C}$, on note $\mu(p,h)$ la multiplicité d'annulation de h en p.*

L'entier $\mu(p,h)$ est le maximum des entiers N t.q. il existe une constante $C>0$ pour laquelle on a $\mathrm{dist}(h(q),h(p)) \leq C\mathrm{dist}(q,p)^N$ dans un voisinage de p.

La proposition suivante ramène la preuve d'estimées volumiques au contrôle de $\mu(p, Jf^N)$ pour un point $p \in X$ et où Jf désigne le déterminant jacobien de f.

Proposition 4.3.6. *Soit $f : X \to Y$ une application méromorphe dominante entre deux variétés lisses kähleriennes compactes. Notons $\Gamma \subset X \times Y$ une désingularisation du graphe de f et π_1, π_2 les projections naturelles sur le premier et second facteur.*

Soit $F \subset X$ un fermé et notons

$$\nu_f(F) := \max\left\{\mu(z, J\pi_2), z \in \overline{\pi_1^{-1}(F \setminus I(f))}\right\}.$$

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$ t.q. pour tout borélien $E \subset F$, l'estimation

$$Vol(f(E)) \geq C_\varepsilon\, Vol(E)^{1+\nu_f(F)+\varepsilon}$$

est satisfaite.

Notons que si $F \cap I(f) = \emptyset$, on a $\nu_f(F) = \max_F \mu(p, Jf)$.

Démonstration.

Soit ω_X (resp. ω_Y, ω_Γ) une forme de Kähler sur X (resp. sur Y et Γ). On peut trouver une constante $C>0$ t.q. $\pi_1^*\omega_X \leq C\omega_\Gamma$. Notons le compact $K := \overline{\pi_1^{-1}(F \setminus I(f))}$, fixons $\varepsilon > 0$ et posons $\nu_\varepsilon := \nu_f(F) + \varepsilon$.

Soit $E \subset F \subset X$ un borélien de X. Comme π_1 est une modification propre, on a

$$\mathrm{Vol}(E) = \int_{E\setminus I(f)} \omega_X^n = \int_{\widetilde{E}} (\pi_1^*\omega_X)^n \leq C^n \int_{\widetilde{E}} \omega_\Gamma \leq C^n \mathrm{Vol}(\widetilde{E}),$$

avec $\widetilde{E} := \pi_1^{-1}(E \setminus I(f)) \subset K$. On est donc ramené à minorer $\mathrm{Vol}(\pi_2(\widetilde{E})) = \mathrm{Vol}(f(E))$ en fonction de $\mathrm{Vol}(E)$.

Appliquons le Théorème 4.3.1 à la fonction $\log|J\pi_2|$ dans chaque carte d'un atlas de Γ fini donné, en notant que $\nu(z, \log|J\pi_2|) = \mu(z, J\pi_2)$. Il existe une constante $C_\varepsilon > 0$ t.q. pour tout $t \geq 0$ on a

$$\mathrm{Vol}\left(K \cap \{|J\pi_2|^2 \leq t\}\right) \leq C_\varepsilon t^{1/\nu_\varepsilon}. \tag{4.12}$$

Cette estimation va nous permettre de reprendre la suite d'inégalités de la preuve précédente pour estimer $\mathrm{Vol}(\pi_2(\widetilde{E}))$ en fonction de $\mathrm{Vol}(E)$.

On choisit ici comme temps d'arrêt $T_0^{1/\nu_\varepsilon} := (2C_\varepsilon)^{-1}(1+\nu_\varepsilon^{-1})\mathrm{Vol}(\widetilde{E})$, et en remarquant que $\deg(\pi_2) = \deg(f)$ on a alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(\pi_2(\widetilde{E})) &= \deg(f)^{-1} \times \int_{\widetilde{E}} |J\pi_2|^2 \\
&\geq \deg(f)^{-1} \int_0^{T_0} \mathrm{Vol}(\widetilde{E}) - \mathrm{Vol}\{|J\pi_2|^2 \leq t\} dt \\
&\geq \deg(f)^{-1} \left(T_0 \mathrm{Vol}(\widetilde{E}) - \int_0^{T_0} C_\varepsilon t^{1/\nu_\varepsilon} dt \right) \\
&\geq C'_\varepsilon \mathrm{Vol}(\widetilde{E})^{1+\nu_\varepsilon} \geq C''_\varepsilon \mathrm{Vol}(E)^{1+\nu_\varepsilon},
\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. □

Notons le corollaire suivant important de la proposition précédente:

Corollaire 4.3.7. *Soit $f : X \to Y$ une application méromorphe dominante entre deux variétés lisses kähleriennes compactes.*

Alors il existe des constantes $C_1, D_1 > 0$ t.q. pour tout borélien $E \subset X$, l'estimation

$$\mathit{Vol}(f(E)) \geq C_1\, \mathit{Vol}(E)^{D_1} \tag{4.13}$$

est satisfaite.

On a donc ramené la preuve du Théorème 4.3.3 à de simples estimations de multiplicité.

Démonstration. Théorème 4.3.3.

Soit f_+ une application de la classe $\mathcal{B}$, et $U \subset \mathcal{E}$ un ouvert quelconque. Posons $\rho_0 := \sup\{\rho(p), p \notin U\}$ et fixons $\lambda > \rho_0$. Notons $F_k := X \setminus f_+^{-k}(U)$ et pour tout $k \geq 0$, $\nu_k(F_k) := \nu_{f^k}(F_k)$ le réel défini à la Proposition 4.3.6. Admettons pour l'instant la proposition suivante.

Proposition 4.3.8. *Il existe un rang $N \in \mathbf{N}^*$ t.q. $\nu_N(F_N) < \lambda^N - 1$.*

On applique alors la Proposition 4.3.6 à $f^N : X \to X$: il existe une constante $C > 0$ t.q. pour tout borélien $E \subset F$ t.q. $f_+(E), \cdots, f_+^k(E) \subset F$ on a

$$\mathrm{Vol}(f_+^N(E)) \geq C\mathrm{Vol}(E)^{\lambda^N}. \tag{4.14}$$

Soit maintenant $j \in \mathbf{N}$ et $E \subset F$ un borélien t.q $E, f_+(E), \cdots, f_+^j(E) \subset F$. Faisons la division euclidienne de j par N et notons $j = qN + r$ avec $0 \leq r < N$. En itérant l'estimation (4.14), et en utilisant le Corollaire 4.3.7, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol} f_+^j(E) &= \mathrm{Vol} f_+^r(f_+^{qN}(E)) \\
&\geq C_1^N \mathrm{Vol}(f_+^{qN}(E))^{D_1 N} \\
&\geq C_1^N \left(\mathrm{Vol}(E)^{\lambda^{qN}} C^{\sum_{l=1}^{q-1} \lambda^{lN}} \right)^{D_1 N} \\
&\geq (C' \mathrm{Vol}(E))^{D' \lambda^j},
\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. □

Il ne nous reste donc plus qu'à démontrer la Proposition 4.3.8.
Démonstration. Proposition 4.3.8.

Fixons tout d'abord quelques notations. Pour $k \geq 0$ donné, on notera $\Gamma_k \subset X \times X$ le graphe de f^k et $\pi_{2,k}$ la projection canonique de Γ_k sur le second facteur. Notons que $\Gamma_1 = \Gamma$ est le graphe de f. On désigne par $\Gamma^k \subset X^{k+1}$ le sous-espace

$$\Gamma^k = \{x = (x_0, \cdots, x_k) \text{ t.q. pour tout } 0 \leq i \leq k-1, \ (x_i, x_{i+1}) \in \Gamma\}.$$

On notera $\varpi_i^k : \Gamma^k \to X$ la projection sur le i-ème facteur, et $\tau^k : \Gamma^k \to \Gamma_k$ la modification propre $\tau^k(x_0, \cdots, x_k) := (x_0, x_k)$.

On va prouver l'existence d'une constante $C > 0$ t.q. pour tout $M \geq 0$, et tout point $x = (x_0, \cdots, x_M) \in F^{M+1}$, on a

$$\mu((x_0, x_M), J\pi_{2,M}) \leq C\rho_0^M. \tag{4.15}$$

Comme $\rho_0 > \lambda$, il s'ensuit $\nu_M(F) < \lambda^M - 1$ pour tout $M \in \mathbf{N}$ assez grand et la proposition est bien démontrée.

On notera dans toute la suite pour tout $j \geq 0$

$$\mu_j := \sup_{z \in \Gamma^j} \mu(z, J\pi_{2j}).$$

Le point crucial est le lemme suivant.

Lemme 4.3.9. *Soit $g : Y \to X$ une fonction holomorphe. Alors il existe un réel $\alpha(g) > 0$ t.q. pour tout entier $k \geq 0$ et tout point $y \notin g^{-1} I(f_+^k)$, l'inégalité*

$$\mu(y, Jf_+^k \circ g) \leq \alpha(g) \times \mu(g(y), Jf_+^k) \tag{4.16}$$

est satisfaite.

Démonstration. Celui-ci résulte immédiatement du Corollaire B.1.4. Plaçons nous localement. On a

$$\begin{aligned} \mu(y, Jf_+^k \circ g) &= \nu(y, dd^c \log|Jf_+^k \circ g|) \\ &\leq C_Y(g) \times \nu(g(y), dd^c \log|Jf_+^k|) = C_Y(g) \times \mu(g(y), Jf_+^k), \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. □

On veut démontrer (4.15). Fixons maintenant un entier $N_0 \geq 1$ assez grand pour que la condition suivante soit vérifiée:

$$\text{Pour tout } x \in I(f_-), \begin{cases} \text{soit } f_+^{N_0}(x) \text{ est périodique,} \\ \text{soit pour tout } j \geq N_0 \text{ on a } f_+^j(x) \notin \mathcal{C}(f_+). \end{cases} \tag{4.17}$$

Soit donc $M \geq N_0$ un entier et $x = (x_0, \cdots, x_M) \in F^{M+1}$ un point quelconque. Pour estimer $\mu((x_0, x_M), J\pi_{2M})$ on procède cas par cas en décomposant $J\pi_{2,M}$ en composée d'applications holomorphes dont on contrôle facilement les multiplicités.

Premier cas: pour tout $0 \leq i \leq M$, on a $x_i \notin I(f_+)$.

On a alors $\mu((x_0, x_M), J\pi_{2M}) = \mu(x_0, Jf^M)$. Soit $i \leq M$ le premier indice pour lequel $x_i \in \mathcal{C}(f_+)$. Par (4.17), soit x_{i+N_0} est périodique, soit $x_{i+N_0+k} \notin \mathcal{C}(f_+)$ pour tout $k \geq 0$.

Plaçons nous dans le premier cas. On a par hypothèse $\rho(x_{i+N_0}) \leq \rho_0$. Notons l la période de x_{i+N_0}. De (4.16), on déduit

$$\begin{aligned} \mu(x_{i+N_0}, Jf_+^{M-N_0-i} \circ f_+^{N_0}) &\leq \alpha(f_+^{N_0}) \times \mu(x_{i+N_0}, Jf_+^{M-N_0-i}) \\ &\leq \alpha(f_+^{N_0})\rho_0^{M-N_0-i}. \end{aligned}$$

On a alors la suite d'inégalités

$$\begin{aligned} \mu(x_0, Jf_+^M) &= \mu(x_i, Jf_+^{N_0}) + \mu(x_{i+N_0}, Jf_+^{M-N_0-i} \circ f_+^{N_0}) \\ &\leq \mu_{N_0} + \alpha(f_+^{N_0})\rho_0^{M-N_0-i} \\ &\leq C_1(N_0) + C_2(N_0)\rho_0^M. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Dans le second cas, l'orbite de x_{i+N_0} n'intersecte pas $\mathcal{C}(f_+)$ et on a alors de même

$$\begin{aligned} \mu(x_0, Jf^M) &= \mu(x_i, Jf_+^{M-i}) \\ &= \mu(x_i, Jf_+^{N_0}) + \mu(x_{i+N_0}, Jf_+^{M-i-N_0} \circ f_+^{N_0}) \\ &= \mu(x_i, Jf_+^{N_0}) \leq \mu_{N_0}. \end{aligned}$$

Second cas: il existe un indice $0 \leq i \leq M$ pour lequel $x_i \in I(f_+)$.
On distingue alors deux sous-cas.

• cas α : pour tout $0 \leq j \leq M$, $x_j \notin I(f_-)$.
Alors $(x_0, x_M) \in I(f_+^M) \backslash I(f_-^M)$ et la Proposition 4.1.1 montre que $\pi_{2,M}$: $\Gamma_M \to X$ est un biholomorphisme au voisinage de (x_0, x_M). Il s'ensuit

$$\mu((x_0, x_M), J\pi_{2M}) = 1.$$

• cas β : il existe $0 \leq j \leq M$, $x_j \in I(f_-)$.
Notons J le premier indice pour lequel $x_J \in I(f_-)$. Comme f_+ est algébriquement stable, pour tout $j \geq J$ on a alors $x_j \notin I(f_+)$. De même notons I le plus grand entier t.q. $x_I \in I(f_+)$. On a $I < J$ et pour tout $i < J$, $x_i \notin I(f_-^\infty)$.

$$\begin{tikzcd}
\Gamma^M \ni (x_0, \cdots, x_M) \arrow[r, "\tau^M"] \arrow[d, "\varpi_M^M"] & \Gamma_M \ni (x_0, x_M) \arrow[dl, "\pi_{2,M}"] \\
X \ni x_M &
\end{tikzcd}$$

On remarque tout d'abord que $\varpi_M^M = \pi_{2,M} \circ \tau^M$ donc

$$\begin{aligned}
\mu(x, J\varpi_M^M) &= \mu(x, J\tau^M) + \mu(x, J\pi_{2,M} \circ \tau^M) \\
&\geq \mu((x_0, x_M), J\pi_{2,M}).
\end{aligned} \tag{4.19}$$

On décompose maintenant $\varpi_M^M = \varpi_{M-I}^{M-I} \circ \Phi_I^M$ où $\Phi_I^M : \Gamma^M \to \Gamma^{M-I}$ est définie par $\Phi_I^M(y_0, \cdots, y_M) := (y_I, \cdots, y_M)$.

$$\begin{tikzcd}
\Gamma^M \ni (x_0, \cdots, x_M) \arrow[r, "\Phi_I^M"] \arrow[d, "\varpi_M^M"] & \Gamma^{M-I} \ni (x_I, \cdots, x_M) \arrow[dl, "\varpi_{M-I}^{M-I}"] \\
X \ni x_M &
\end{tikzcd}$$

Comme $x \notin I(f_-^\infty)$, l'application Φ_I^M est un biholomorphisme local en x. En effet, son inverse est donné par

$$(\Phi_I^M)^{-1}(y_I, \cdots, y_M) := (f_-^I(y_I), \cdots, f_-(y_I), y_I, \cdots, y_M).$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\mu(x, J\varpi_M^M) &= \mu(x, J\Phi_I^M) + \mu(x, J\varpi_{M-I}^{M-I} \circ \Phi_I^M) \\
&= \mu((x_I, \cdots, x_M), J\varpi_{M-I}^{M-I}).
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Enfin on écrit $\varpi_{M-I}^{M-I} = f^{M-I-1} \circ \varpi_2^{M-I}$ et on remarque que l'on a le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd} \Gamma^{M-I} \ni (x_I, \cdots, x_M) \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "\varpi_2^{M-I}"] & \Gamma \ni (x_I, x_{I+1}) \arrow[dl, "\pi_2"] \\ X \ni x_{I+1} & \end{tikzcd}$$

Le morphisme $\Psi : \Gamma^{M-I} \to \Gamma$ défini par $\Psi(y_I, \cdots, y_M) = (y_I, y_{I+1})$ est encore un biholomorphisme local en $(x_I, \cdots, x_M)$ car $x_{I+1} \notin I(f_+^\infty)$. Finalement on a

$$\begin{aligned} &\mu((x_I, \cdots, x_M), J\varpi_{M-I}^{M-I}) \\ &= \mu((x_I, \cdots, x_M), J\varpi_2^{M-I})) + \mu((x_I, \cdots, x_M), Jf^{M-I-1} \circ \varpi_2^{M-I}) \\ &= \mu((x_I, x_{I+1}), J\pi_2) + \mu((x_I, x_{I+1}), Jf^{M-I-1} \circ \pi_2) \\ &\leq \mu_1 + \alpha(\pi_2)\mu((x_I, x_{I+1}), Jf^{M-I-1}) \\ &\leq \mu_1 + \alpha(\pi_2)(C_1(N_0) + C_2(N_0)\rho_0^M) \text{ (par (4.18)).} \end{aligned} \tag{4.21}$$

En mettant (4.19), (4.20) et (4.21) bout à bout on conclut

$$\begin{aligned} \mu((x_0, x_M), J\pi_{2,M}) &\leq \mu_1 + \alpha(\pi_2)(C_1(N_0) + C_2(N_0)\rho_0^M) \\ &\leq C_1'(N_0) + C_2'(N_0)\rho_0^M. \end{aligned}$$

Dans tous les cas considérés, on toujours $\mu((x_0, x_M), J\pi_{2,M}) \leq D_1(N_0) + D_2(N_0)\rho_0^M$ pour des constantes $D_1, D_2 > 0$ ce qui conclut la preuve de la Proposition 4.3.8. $\square$

4.4 Preuve des Théorèmes A et B.

4.4.1 Preuve du Théorème A.

Théorème A. *Soit $f : X \to X$ une application birationnelle de la classe $(\mathcal{B})$ et $T(f) := \lim_{j\to\infty} \rho^{-j}(f^j)^*\omega$ le courant de Green de f.*

Alors il existe un ensemble fini $\mathcal{E} \subset X$ (l'ensemble des points exceptionnels de f), tel que pour tout $S \in \mathcal{C}_1^+(X)$, les conditions suivantes sont équivalentes.

1. *Pour tout $p \in \mathcal{E}$, $\nu(p, S) = 0$.*
2. *Il existe une constante $c := c(\{S\}) > 0$ t.q.*

$$\frac{1}{\rho^j}(f^j)^*S \longrightarrow c \cdot T(f). \tag{4.22}$$

De plus si V est un voisinage fixé de $\mathcal{E}$, la convergence dans (4.22) est uniforme dans le compact des courants de masse 1 et dont le support évite V.

(2) $\Rightarrow$ (1)

Soit $S \in \mathcal{C}_1^+(X)$ et supposons qu'il existe un point $p \in \mathcal{E}$ de période k t.q. $\nu(p, S) > 0$. Quitte à changer f en f^k, on peut supposer que $f(p) = p$ et $f(V_p) = p$, o V_p est le support du $\mathbf{R}_+$-cycle analytique défini à la Proposition 4.2.3. Pour tout $q \in V_p \setminus I(f)$, on a

$$\nu(q, f^*S) \geq \nu(f(q), S) = \nu(p, S) > 0.$$

Ainsi $f^*S \geq c \cdot T_p$ pour une constante $c > 0$. Mais alors pour tout $j \in \mathbf{N}$, on a

$$\frac{1}{\rho^j}(f^j)^*S \geq c\frac{1}{\rho^j}(f^{j-1})^*T_p = \frac{c}{\rho}T_p,$$

donc $\rho^{-j}(f^j)^*S$ ne peut pas converger vers un multiple de $T(f)$ car celui-ci ne charge pas les hypersurfaces.

(1) $\Rightarrow$ (2)

Nous allons tout d'abord examiner le cas non-uniforme i.e. lorsque l'on considère la convergence de $\rho^{-k}(f^*)^kS$ pour un courant S fixé, puis nous traiterons le cas uniforme à la fin de cette section.

<u>Cas non-uniforme:</u>

Supposons que $S \in \mathcal{C}_1^+(X)$ vérifie $\nu(p, S) = 0$ pour tout $p \in \mathcal{E}$. Fixons $\varphi_1, \cdots, \varphi_s$ des formes réelles lisses de bidegré $(1, 1)$ t.q. la famille des classes $\{\{\omega\}, \{\varphi_1\}, \cdots, \{\varphi_s\}\}$ forme une base du sous-espace $H_+^{1,1}(X) \subset H^{1,1}(X)$ engendré par les courants positifs fermés, et vérifiant pour tout $1 \leq i \leq s$,

$$\limsup_{j\to\infty} \|(f^*)^j\varphi_i\|^{1/j} < \rho. \tag{4.23}$$

Ceci est toujours possible car f^* préserve la classe des courants positifs fermés, que ceux-ci sont réels et que f vérifie (R3).

On décompose alors la classe de $\{S\}$ dans cette base et on écrit

$$S = c\,\omega + \sum_{i=1}^{s} u_i^0 \varphi_i + dd^c W, \tag{4.24}$$

avec $c \geq 0$, $u_i^0 \in \mathbf{R}$ et $W \in QPSH(X)$. On notera aussi

$$\begin{aligned} f^*\omega &= \rho\omega + dd^c U, \\ f^*\varphi_i &= \sum_{j=1}^{s} c_{ij}\varphi_j + dd^c H_i, \end{aligned}$$

avec $c_{ij} \in \mathbf{R}$ et $H_i \in L^1(X) \cap \mathcal{C}^\infty(X \setminus I(f))$.

On vérifie alors pour tout $k \geq 0$ que

$$\frac{1}{\rho^k}(f^*)^k S = c\,\omega + \sum_{i=1}^{s} u_i^k \varphi_i + dd^c W_k, \tag{4.25}$$

pour des constantes u_i^k définies par récurrence $u_i^k = \rho^{-1}\sum_j u_j^{k-1} c_{ji}$ et avec

$$\begin{aligned} W_k = \frac{1}{\rho^k} W \circ f^k + c\left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\rho^j} U \circ f^j\right) &+ \\ + \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{k} u_i^{k-j}\frac{1}{\rho^j} H_i \circ f^{j-1}\right) &\in QPSH(X). \end{aligned}$$

Les quatre faits suivants impliquent le résultat de convergence souhaité.

1. $$\omega + dd^c\left(\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{\rho^j} U \circ f^j\right) \to T(f).$$

2. Il existe des constantes $\theta < 1$ et $C_1 > 0$ t.q. pour tout $1 \leq i \leq s$ et tout $k \geq 0$ on a
$$|u_i^k| \leq C_1 \theta^k.$$
On supposera de plus que $\theta > \rho^{-1}$.

3. On a convergence dans $L^1(X)$,
$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\rho^k} W \circ f^k = 0.$$

4. Pour tout $\lambda > 1$, il existe une constante $D_1 > 0$ t.q. pour tout $1 \leq i \leq s$ on a
$$\int_X |H_i \circ f^j| \leq D_1 \lambda^j.$$

En effet, par (1), on a $c \cdot \omega + dd^c \left(c \sum_{j=0}^{k-1} \rho^{-j} U \circ f^j \right) \to c \cdot T(f)$. Par (3), $dd^c(\rho^{-k} W \circ f^k) \to 0$. Par (2), $\sum_{i=1}^s u_i^k \varphi_i \to 0$. Enfin par (2) et (4), on peut fixer $\lambda > 1$ avec $\lambda/\theta\rho < 1$ et il vient

$$\begin{aligned} \|\widetilde{H}_k\|_{L^1(X)} &:= \left\| \sum_{i=1}^s \left(\sum_{j=1}^k u_i^{k-j} \frac{1}{\rho^j} H_i \circ f^j \right) \right\|_{L^1(X)} \\ &\leq s\ C_1 \theta^k \sum_{j=1}^k \theta^{-j} \rho^{-j} (D_1 \lambda^j) \leq D' \theta^k \end{aligned}$$

pour une constante $D' > 0$. Il s'ensuit $\widetilde{H}_k \to 0$ dans $L^1(X)$ donc $dd^c \widetilde{H}_k \to 0$, et on a bien $\rho^{-k}(f^*)^k S \to c\ T(f)$.

Prouvons maintenant les assertions 1, 2 , 3 et 4.

L'assertion (1) est le contenu du Théorème 2.4.3. C'est la définition même du courant de Green.

L'assertion (2) résulte du choix particulier de la famille $\{\varphi_i\}$ (voir Equation (4.23)).

L'assertion (3) résulte des estimées volumiques de la section précédente. Admettons pour l'instant le lemme suivant.

Lemme 4.4.1. *Soit $U \subset X$ un voisinage de $\mathcal{E}$ relativement compact dans $\Omega(\mathcal{E})$ et $u \in L^1(X) \cap L^\infty(U)$. Supposons qu'il existe des constantes $C, B > 0$ t.q. pour tout $t \geq 0$ on a*

$$Vol\{|u| \geq t\} \leq B \exp(-Ct). \tag{4.26}$$

Pour tout $\rho > \lambda > \sup\{\rho(p),\ p \in \mathcal{SA}(f) \setminus \mathcal{E}\}$, il existe une constante $C' > 0$ t.q. pour tout $k \geq 0$ on a

$$\int_X |u \circ f^k| \leq C' \lambda^k + Vol(X) \|u\|_{L^\infty(U)}.$$

De plus, si u est bornée sur un voisinage V de $\mathcal{SA}(f)$, on a

$$\int_X |u \circ f^k| \leq C' \lambda^k + Vol(X) \|u\|_{L^\infty(V)}$$

pour toute constante $\lambda > 1$.

Fixons $U \subset \Omega(\mathcal{E})$ un petit voisinage de $\mathcal{E}$ et $\lambda < \rho$. Comme W est quasi-psh, W est majorée supérieurement et le Théorème 4.3.1 implique que W satisfait à l'hypothèse (4.26) avec $C = \sup_X \nu(z, W)$. Le Lemme 4.4.1 appliqué à $u := 1\!\!1_{X\setminus U} W$ implique alors $|\rho^{-k} W \circ f^k|_{X\setminus U} \leq C(\lambda/\rho)^k$.

On va maintenant prouver que $\rho^{-k} W \circ f^k|_U \to 0$ dans $L^1(U)$. Fixons une constante $\eta > 0$ arbitrairement petite. Comme $\nu(p, S) = 0$ pour tout $p \in \mathcal{E}$, on peut trouver un voisinage U_η de $\mathcal{E}$ t.q. $\sup_{U_\eta} \nu(., S) \leq \eta$ car la fonction $\nu(., S)$ est s.c.s par rapport à la topologie de Zariski. Comme W est quasi-psh, quitte à rajouter une fonction lisse, on peut supposer que W est psh et que $\sup_U W \leq 0$. Notons pour $\varepsilon > 0$ et $j \in \mathbf{N}$,

$$E^j_\varepsilon := \{x \in U,\ \rho^{-j} W \circ f^j(x) < -\varepsilon\}.$$

Le Théorème 4.3.1 donne l'existence d'une constante $C_3 > 0$ t.q. pour tout $t \geq 0$ on a

$$\mathrm{Vol}(E^0_t \cap U_\eta) \leq C_3 \exp(-t/\eta). \tag{4.27}$$

Remarquons que pour j assez grand on a

$$f^j(E^j_\varepsilon) = f^j(E^j_\varepsilon \cap U) \subset E^0_{\varepsilon\rho^j} \cap U_\eta.$$

Les estimations du Théorème 4.3.2 donnent alors

$$\begin{aligned} \Upsilon(C_1 \mathrm{Vol}(E^j_\varepsilon))^{C_2\rho^j} &\leq \mathrm{Vol}\left(f^j(E^j_\varepsilon \cap U)\right) \\ &\leq \mathrm{Vol}(E^0_{\varepsilon\rho^j} \cap U_\eta) \\ &\leq C_3 \exp\left(-\frac{\varepsilon\rho^j}{\eta}\right). \end{aligned}$$

En passant à la limite, on obtient $\overline{\lim}_{j\to\infty} \Upsilon(C_1 \mathrm{Vol}(E^j_\varepsilon)) \leq \exp(-\varepsilon/C_2\eta)$, puis en faisant tendre η vers 0 (les constantes C_1, C_2 ne dépendent que de f) on obtient:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{j\to\infty} \mathrm{Vol}(E^j_\varepsilon) = 0.$$

De manière équivalente

$$\frac{1}{\rho^k} W \circ f^k|_U \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ presque partout.} \tag{4.28}$$

La suite $\rho^{-k} W \circ f^k|_U$ est une suite de fonctions psh uniformément majorées. De toute sous-suite, on peut extraire une sous-suite convergeante dans L^1_{loc} (voir [Ho83]) vers une fonction psh qui est nécessairement identiquement nulle par (4.28). Donc $\rho^{-k} W \circ f^k|_U \to 0$ dans $L^1(U)$.

On conclut donc $\rho^{-k} W \circ f^k \to 0$ dans $L^1(X)$ ce qui prouve l'assertion 3.

L'assertion (4) est une conséquence du lemme suivant.

Lemme 4.4.2. *Soit ϕ_1, ϕ_2 des formes $(1,1)$ réelles lisses fermées sur X, et $u \in L^1(X)$ t.q.*

$$f^*\phi_1 = \phi_2 + dd^c u.$$

Alors il existe des constantes $C, B > 0$ t.q.

$$Vol\{|u| \geq t\} \leq B\exp(-Ct)$$

pour tout $t \geq 0$.

On fixe un voisinage $U \subset \Omega(\mathcal{SA}(f))$ de $\mathcal{SA}(f)$, et on choisit $\lambda > 1$ arbitraire. Pour tout $1 \leq i \leq s$, la fonction H_i est lisse dans U donc bornée. En combinant les Lemmes 4.4.1 et 4.4.2, on obtient

$$\begin{aligned} \int_X |H_i \circ f^k| &= \int_U |H_i \circ f^k| + \int_{X\setminus U} |H_i \circ f^k| \\ &\leq |H_i|_{L^\infty(U)} + C'\lambda^k \leq C''\lambda^k, \end{aligned}$$

pour une constante $C'' > 0$, ce qui prouve 4.

Pour conclure la preuve, il nous suffit de démontrer les deux Lemmes 4.4.1 et 4.4.2.

Démonstration. Lemme 4.4.1

Soit donc U un voisinage de $\mathcal{E}$. On a

$$\int_{X\setminus U} |u \circ f^k| \leq \mathrm{Vol}(X)\|u\|_{L^\infty(U)} + \int_{X\setminus f^{-k}(U)} |u \circ f^k|.$$

On peut alors appliquer les estimées volumiques du Théorème 4.3.3 à la suite de boréliens $\{|u \circ f^k| \geq t\} \cap X \setminus f^{-k}(U)$, et on obtient la suite d'inégalités

$$\begin{aligned} \int_{X\setminus f^{-k}(U)} |u \circ f^k| &= \int_{t\geq 0} \mathrm{Vol}\left(\{|u \circ f^k| \geq t\} \cap X \setminus f^{-k}(U)\right) dt \\ &\leq \int_{t\geq 0} C_1^{-1} \left(\mathrm{Vol}\left(\{|u| \geq t\} \cap X \setminus U\right)\right)^{1/C_2\lambda^k} \\ &\leq \int_{t\geq 0} C_4 \exp\left(-\frac{C_3 t}{\lambda^k}\right) dt \\ &= C_4 C_3^{-1}\lambda^k \leq C_5\lambda^k, \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve.

Lorsque u est bornée dans un voisinage de $\mathcal{SA}(f)$ le même raisonnement et les estimées volumiques du Théorème 4.3.3 permettent de remplacer ρ_0 par une constante $\lambda > 1$ arbitraire. □

Démonstration. Lemme 4.4.2.

Soit ω_X une forme de Kähler sur X et fixons $c > 0$ t.q. les deux formes lisses $c \cdot \omega_X \pm \phi_1$ soient positives. Ceci est toujours possible car ϕ_1 est réelle. On écrit $f^*\omega_X = \phi_3 + dd^c v$ pour une forme ϕ_3 lisse et une fonction v quasi-psh. On peut supposer que $v \leq 0$. On a donc

$$f^*(c \cdot \omega_X \pm \phi_1) = (c \cdot \phi_3 \pm \phi_2) + dd^c(c \cdot v \pm u) \geq 0,$$

donc les deux fonctions $cv \pm u$ sont aussi quasi-psh. Par le Théorème 4.3.1, il existe des constantes $D_1, D_2 > 0$ t.q. pour tout $t \geq 0$, on a

$$\mathrm{Vol}\{cv \pm u \leq -t\} \leq D_1 \exp(-D_2 t).$$

On a alors la suite d'inégalité

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}\{|u| \geq t\} &= \mathrm{Vol}\{u \geq t\} + \mathrm{Vol}\{u \leq -t\} \\ &\leq \mathrm{Vol}\{cv - u \leq -t\} + \mathrm{Vol}\{cv + u \leq -t\} \leq 2D_1 \exp(-D_2 t), \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. □

Cas uniforme:

On reprend la preuve précédente avec les mêmes notations.

Lorsque $S_i \in \mathcal{C}_1^+(X)$ est une famille de courant dont le support évite un voisinage fixe U de $\mathcal{E}$ et t.q. $\sup_i \|\{S_i\}\| < +\infty$, l'assertion (2) est encore vraie uniformément en i. Notons W^i le potentiel quasi-psh associé à S_i (voir Equation (4.24)). Une conséquence des inégalités de Harnack donne l'existence d'une constante $C > 0$ t.q $\sup_{U,i} |W^i| \leq C$. En reprenant pas à pas les arguments précédents, on voit que $\rho^{-k} W^i \circ f^k \to 0$ dans $L^1(X)$ uniformément en i. Ceci prouve que l'on a convergence uniforme $\rho^{-k}(f^*)^k S_i \to c\{S_i\} \cdot T(f)$.

Q.E.D.

4.4.2 Preuve du Théorème B.

Théorème B. *On se place sous les hypothèses précédentes.*

1. *Pour tout point $p \in \mathcal{E}$, il existe un cycle algébrique de codimension 1 à coefficients réels positifs T_p t.q.*

$$f^* T_p = \rho \cdot T_p. \tag{4.29}$$

Ce cycle est unique sous la normalisation $\|T_p\| = 1$, et si il vérifie la condition de minimalité: pour tout cycle S satifaisant à (4.29), il existe une constante $c > 0$ t.q. $S \geq c T_p$.

2. *Tout courant $S \in \mathcal{C}_1^+(X)$ vérifiant l'équation fonctionnelle $f^* S = \rho S$ est combinaison linéaire des courants $T(f)$ et $\{T_p\}_{p \in \mathcal{E}}$. En d'autres termes,*

$$\mathcal{G}_\rho = \mathbf{R}_+ \cdot T(f) + \sum_{p \in \mathcal{E}} \mathbf{R}_+ \cdot T_p.$$

La première assertion résulte de la Proposition 4.2.6 et de la définition de $\mathcal{E}$.

Soit $S \in \mathcal{C}_1^+(X)$ t.q. $f^*S = \rho S$. On ne perd rien à supposer S extrémal dans $\mathcal{G}_\rho$. Si $\nu(p, S) = 0$ pour tout $p \in \mathcal{E}$, le Théorème A implique que $S = c\{S\} \cdot T(f) \in \mathbf{R}_+ \cdot T(f)$. Sinon, on a vu que $S \geq cT_p$ pour un point $p \in \mathcal{E}$ et une constante $c > 0$. Comme S est extrémal, on a $S = c'T_p$, ce qui conclut la preuve.

Q.E.D.

4.5 Quelques exemples.

Dans cette section, nous nous intéressons plus particulièrement au cas des applications monomiales et des applications birationnelles de $\mathbf{P}^2$.

4.5.1 Applications monomiales de $\mathbf{C}^2$.

Soit $f : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ défini par $f(z,w) = (z^\alpha w^\beta, z^\gamma w^\delta)$. Une application de ce type est dominante ssi $\det A \neq 0$ ce que l'on supposera dans toute la suite. L'application f se compactifie à $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ en une application rationnelle algébriquement stable dont on vérifie qu'elle satisfait à (R5) (on a $\mathcal{A}(f) = \mathcal{SA}(f) = \{(0,0),(\infty,\infty)\}$). On note $(z,w) \in \mathbf{C}^2 = ([1:z],[1:w]) \in \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. On supposera dans toute la suite que la matrice A des degrés de f est primitive (voir Définition 3.2.2), et on note (a,b) le vecteur propre à coefficients positifs normalisé par $2ab = 1$. Sous cette hypothèse, les deux conditions (R3) et (R4) sont aussi vérifiées. On peut donc appliquer à ces applications le Théorème 4.3.2. Comme l'union des bassins d'attraction des points superattractifs est dense dans $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, nous en déduirons un analogue des Théorèmes A et B dans ce cas aussi.

L'application f possède deux points exceptionnels $\mathcal{E} = \{p_0, p_1\}$ avec:

$$\begin{aligned} p_1 &:= (0,0) = ([1:0],[1:0]), \\ p_0 &:= (\infty,\infty) = ([0:1],[0:1]). \end{aligned}$$

Les courants associés sont

$$\begin{aligned} T_{p_1} &:= a[z_1 = 0] + b[w_1 = 0], \\ T_{p_0} &:= a[z_0 = 0] + b[w_0 = 0]. \end{aligned}$$

Enfin le courant de Green s'écrit dans $\mathbf{C}^2$

$$T(f) = dd^c \log^+ \left(|z|^a |w|^b\right).$$

On a alors le théorème suivant:

Théorème 4.5.1. *Soit $f(z,w) = (z^\alpha w^\beta, z^\gamma w^\delta)$ une application monomiale de $\mathbf{C}^2$ dominante et dont la matrice des degrés est primitive.*

(I) Pour tout $S \in \mathcal{C}_1^+(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)$, les conditions suivantes sont équivalentes.

1. $\nu(p_0, S) = \nu(p_1, S) = 0$.

2. *Il existe une constante $c := c(\{S\}) > 0$ t.q.*

$$\frac{1}{\rho^j}(f^j)^* S \longrightarrow c \cdot T(f). \tag{4.30}$$

(II) Les courants $T(f)$, T_{p_0}, T_{p_1} sont les points extrmaux du convexe compact

$$\mathcal{G}_\rho := \left\{ S \in \mathcal{C}_1^+(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1) \,/\, f^*S = \rho \cdot S \text{ et } \|S\| = 1 \right\}.$$

Autrement dit

$$\mathcal{G}_\rho = \mathbf{R}_+ \cdot T(f) + \mathbf{R}_+ \cdot T_{p_0} + \mathbf{R}_+ \cdot T_{p_1}.$$

Démonstration.

L'assertion (II) découle de (I). Répétons les arguments de la preuve du Théorème A dans ce cas simple. Montrons l'implication (2)⇒(1) de la première assertion par contraposition. Si $\nu(p_0, S) > 0$, on a $f^*S \geq cT_{p_0}$ pour une constante $c > 0$ et il s'ensuit pour tout $j \geq 0$, $\rho^{-j}(f^*)^j S \geq cT_{p_0}$ donc la suite de courants $\rho^{-j}(f^*)^j S$ ne peut converger vers un multiple de $T(f)$.

Réciproquement soit $S \in \mathcal{C}_1^+(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)$. On supposera pour simplifier que $\{S\} = \{T(f)\} = a\{\omega_1\} + b\{\omega_2\}$. Notons $\varphi := \mathcal{L}^{-1}(S) \in PSH(\mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^2)$ le potentiel de S normalisé par $\sup_{|z|=|w|=1} \varphi = 0$. La fonction $U(z, w) := \varphi(1, z, 1, w)$ est alors un potentiel de S dans $\mathbf{C}^2$ négatif sur le polydisque Δ^2. La fonction psh $U_j := \rho^{-j} U \circ f^j$ est un potentiel de $\rho^{-j}(f^*)^j S$ dans $\mathbf{C}^2$. On va prouver que $U_j \to 0$ dans $L^1(\Omega_{p_1})$.

On se place dans le polydisque $\Delta^2(1/2) := \{|z|, |w| < 1/2\}$ qui est inclus dans le bassin d'attraction $\Omega(p_1)$. Notons pour $\varepsilon > 0$ et $j \in \mathbf{N}$

$$E_\varepsilon^j := \{(z, w) \in \Delta^2(1/2), U_j < -\varepsilon\}.$$

On a $f^j(E_\varepsilon^j) \subset E^0_{\varepsilon\rho^j} \cap f^j(\Delta^2(1/2))$.

Soit $\eta > 0$ fixé. Par hypothèse, $\nu(p_1, S) = 0$, donc pour tout réel $R \ll 1$ fixé, le Théorème 4.3.1 donne l'existence de deux réels $\varepsilon_0 > 0, C > 0$ t.q. pour tout $t > 0$ on a

$$\mathrm{Vol}(E_t^0 \cap \Delta^2(\varepsilon_0)) \leq C \exp(-Rt).$$

On applique alors les estimées volumiques du Théorème 4.3.2 et on obtient pour j assez grand et ε assez petit,

$$\begin{aligned}
\Upsilon(C_1 \mathrm{Vol}(E_\varepsilon^j)) &\leq \mathrm{Vol}(f^j(E_\varepsilon^j))^{1/C_2\rho^j} \\
&\leq \mathrm{Vol}\left(E^0_{\varepsilon\rho^j} \cap f^j(\Delta^2(1/2))\right)^{1/C_2\rho^j} \\
&\leq C \exp(-R\varepsilon/C_2).
\end{aligned}$$

On conclut $\mathrm{Vol}(E_\varepsilon^j) \to_{j\to\infty} 0$ en faisant tendre R vers l'infini. De manière équivalente, on a prouvé $U_j \to 0$ presque partout. Comme $U_j \leq 0$ sur $\Delta^2(1/2)$, la suite de fonctions psh $\{U_j\}_{j\geq 0}$ est localement majorée et par suite U_j converge en norme L^1 vers 0 dans $\Delta^2(1/2)$. Il s'ensuit que U_j converge vers 0 en norme L^1 dans $\Omega(p_1)$.

De manière analogue, on a $\rho^{-j} V \circ f^j \to 0$ dans $L^1(\Omega(p_0))$ pour $V := \varphi(z, 1, w, 1)$. Par homogénéité de φ, on en déduit que $\rho^{-j} U \circ f^j \to a \log|z| + b \log|w|$ dans $L^1(\Omega(p_0))$.

Comme $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \setminus (\Omega(p_0) \cup \Omega(p_1))$ est de mesure nulle, on a donc

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{\rho^j} U \circ f^j = \log^+(|z|^a |w|^b) \text{ dans } L^1(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1).$$

Ceci prouve la convergence $\rho^{-j}(f^*)^j S \to T(f)$. □

4.5.2 Applications birationnelles de $\mathbf{P}^2$.

Nous voulons ici détailler la structure de $\mathcal{E}$ dans le cas des applications birationnelles de $\mathbf{P}^2$.

Remarquons tout d'abord que toute application birationnelle f_+ algébriquement stable de $\mathbf{P}^2$ (ou $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$) avec $\lambda_1(f_+) > 1$ appartient à la classe $(\mathcal{B})$.

Le résultat principal de cette section est le théorème suivant.

Théorème 4.5.2. *Soit $f_+ : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$ une application birationnelle algébriquement stable t.q. $\lambda_1(f_+) > 1$.*

L'ensemble exceptionnel $\mathcal{E}$ est constitué d'au plus un point p, et le cycle T_p est une courbe rationnelle lisse (en particulier l'ensemble critique est localement irréductible en p).

On peut préciser le théorème précédent sous la forme suivante.

Proposition 4.5.3. *Sous les hypothèses et avec les notations précédentes.*

- *Si $\deg(T_p) = 1$, l'application f_+ est la compactification à $\mathbf{P}^2$ d'une application* holomorphe *birationnelle de $\mathbf{C}^2$ dans lui-même.*

- *Lorsque le degré algébrique $\lambda_1(f_+) = \rho \leq 4$, on a toujours $\deg(T_p) = 1$.*

Remarque: Nous donnerons au chapitre suivant (voir la Section 5.2.2) une description conjecturale de la structure du semi-groupe des applications holomorphes birationnelles de $\mathbf{C}^2$. Le problème de la classsification des applications admettant une conique totalement invariante est pour l'instant totalement ouvert. ♦

Enfin donnons un exemple explicite d'une application birationnelle possédant une conique totalement invariante.

Exemple 4.5.4. *Fixons $\alpha \neq 1 \in \mathbf{C}$. Soit $g : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$ défini en coordonnées homogènes par*

$$g[x : y : t] := [x(x^2y^2 + (3-2\alpha)t^4 + (3-\alpha^2)yt^2) : \\ y(xy+t^2)^2 : t(\alpha xy + t^2)(xy+t^2)]. \quad (4.31)$$

Notons $A \in \mathrm{Aut}(\mathbf{P}^2)$ l'automorhisme linéaire

$$A(x, y, t) := (2t + x - y, 2t - x + y, x + y)$$

et posons $f := A \circ g$. Soit $\mathcal{C}$ la conique définie par $xy + t^2 = 0$. On vérifie aisément les propriétés suivantes

- *L'application g est une application birationnelle de $\mathbf{P}^2$ (en effet on a $g^{-1}[0 : 0 : 1] = [0 : 0 : 1] \notin \mathcal{C}(g)$.*
- *La conique $\mathcal{C}$ est totalement invariante: $g^*[\mathcal{C}] = 5[\mathcal{C}]$.*
- *$I(f) = I(g) = \{[0 : 1 : 0], [1 : 0 : 0]\}$ et $g(\mathcal{C}) = [1 : 0 : 0]$.*
- *$A(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ et $A[1 : 0 : 0] = [1 : -1 : 1]$.*

On en déduit que f est une application birationnelle algébriquement stable de $\mathbf{P}^2$ t.q. $f^*[\mathcal{C}] = 5[\mathcal{C}]$.

Démonstration. Proposition 4.5.3

La première assertion est immédiate.

Pour la seconde, supposons qu'il existe une conique V totalement invariante $f_+^*V = \rho V$. Notons $f_+(V) = p$ et soit L la droite complexe tangente à V en p. Posons $f_+^*[L] = c[V] + [L']$ où L' est une courbe ne contenant pas V. Pour calculer c on se place localement en p. Dans la classification donnée au Chapitre 1, le germe (f_+, p) appartient à la classe 4, on peut donc l'écrire localement $f_+(z, w) = (z^\rho, \lambda w z^q + z^r(1 + Q(z)))$ avec $\lambda \neq 0$, $q \geq r \geq 1$ et $Q \in \mathbf{C}[z]$. La courbe L est lisse et tangente à l'ordre 2 en 0 à $\{z = 0\}$, on a donc $L = \{z = w^2(1 + \psi(w))\}$ pour une fonction ψ s'annulant à l'origine. Un calcul local donne alors $f_+^*[L] = [z - w^2(1 + \psi(w))] \circ f_+ \geq 2r[z = 0]$, donc $c \geq 2r$. On conclut $\rho \geq 2r \deg(V) + \deg(L') > 4$. $\square$

Le reste de cette section est consacrée à la preuve du Théorème 4.5.2.

Démonstration. Théorème 4.5.2

Soit donc $p \in \mathcal{E}$ un point exceptionnel que l'on suppose fixe. Nous allons tout d'abord prouver que $\mathcal{C}(f_+^2)$ est localement irréductible.

Supposons donc que $\mathcal{C}(f_+^2) \cap U$ soit réductible dans un voisinage U de p. Localement on peut écrire f_+ sous la forme

$$f_+(z, w) = (c_1 z^\alpha w^\beta(1 + \psi_1), c_2 z^\gamma w^\delta(1 + \psi_2)),$$

avec $\rho(A_p) = \rho$, $c_1 c_2 \neq 0$ et $\psi_1(0) = \psi_2(0) = 0$, où A_p désigne la matrice primitive

$$A_p := \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}.$$

Premier cas: A_p est inversible.

Comme f_+ est birationnelle, f_+ est injective dans $U \setminus \mathcal{C}(f_+^2)$ et on a donc $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ (voir classe 6 au Chapitre 1). Or $\rho(A_p) = \rho \in \mathbf{N}$ donc $\mathrm{tr}(A_p) = \rho \pm \rho^{-1} \in \mathbf{N}$, ce qui implique $\rho = 1$. Ceci contredit notre hypothèse $\lambda_1(f_+) = \rho > 1$.

Second cas: le rang de A_p est 1.

Notons V_1 (resp. V_2) la composante irréductible de $\mathcal{C}(f_+^2)$ contenant $\{z = 0\}$ (resp. $\{w = 0\}$), et $v_i := \deg(V_i)$ pour $i = 1, 2$. On a les équations

$$\begin{aligned} f_+^*[V_1] &= \alpha[V_1] + \beta[V_2], \\ f_+^*[V_2] &= \gamma[V_1] + \delta[V_2], \end{aligned}$$

d'où on tire

$$\rho v_1 = \alpha v_1 + \beta v_2, \tag{4.32}$$

$$\rho v_2 = \gamma v_1 + \delta v_2. \tag{4.33}$$

Comme $p \in \mathcal{E}$, on a de plus

$$\rho(A_p) = \mathrm{tr} A_p = \alpha + \delta = \rho. \tag{4.34}$$

Par ailleurs, un calcul donne

$$\det(Df_+(z,w)) = z^{\alpha+\gamma-1} w^{\beta+\delta-1} \Big(zw(\psi_{1z}\psi_{2w} - \psi_{2z}\psi_{1w}) + \\ + (1+\psi_1)(\alpha w \psi_{2w} - \beta z \psi_{2z}) + (1+\psi_2)(\delta z \psi_{1z} - \gamma w \psi_{1w}) \Big).$$

On en déduit localement $[\mathcal{C}(f_+)] > (\alpha + \gamma - 1)[V_1] + (\beta + \delta - 1)[V_2]$ d'où

$$3\rho - 3 > (\alpha + \gamma - 1) v_1 + (\beta + \delta - 1) v_2. \tag{4.35}$$

En additionnant (4.32) et (4.33) et en reportant dans (4.34), on obtient l'inégalité

$$3\rho - 3 > (\rho - 1)(v_1 + v_2).$$

Comme $v_1, v_2 \neq 0$, on a donc $v_1 = v_2 = 1$, et (4.32), (4.33), (4.35) impliquent alors $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$ et $\alpha + \beta = \rho$.

Les hypersurfaces V_1, V_2 sont des droites complexes plongées dans $\mathbf{P}^2$ qui se coupent transversalement en p, on peut trouver donc un système

$[z_0 : z_1 : z_2]$ de coordonnées homogènes de $\mathbf{P}^2$ dans lequel on a $V_1 = \{z_1 = 0\}$ et $V_2 = \{z_2 = 0\}$. Dans ces coordonnées, on peut écrire f_+ sous la forme

$$f_+[z_0 : z_1 : z_2] = [P_0 : P_1 : P_2] = [\star : c_1 z_1^\alpha z_2^\beta (1+\star) : c_2 z_1^\alpha z_2^\beta (1+\star)].$$

Mais f_+ est de degré algébrique ρ, on a donc $\deg(P_1) = \deg(P_2) = \rho$ et il s'ensuit $P_1 = c_1 z_1^\alpha z_2^\beta$, $P_2 = c_2 z_1^\alpha z_2^\beta$, ce qui contredit le fait que f_+ est dominante.

On a donc prouvé que pour tout point exceptionnel $p \in \mathcal{E}$, l'ensemble critique $\mathcal{C}(f_+^2)$ est localement irréductible au voisinage de p. Examinons plus précisément ce cas.

Soit V une composante irréductible de $\mathcal{C}(f_+)$ vérifiant $f_+^*[V] = \rho[V]$ et $f_+(V \setminus I(f_+)) = p \in \mathcal{E}$. Fixons un relevé de f_+ à $\mathbf{C}^3 \setminus \{0\}$ $F(z_0, z_1, z_2) = (P_0, P_1, P_2)$, et soit Q un polynôme homogène de degré $\deg(V)$ t.q. $\pi(Q = 0) = V$ (où $\pi : \mathbf{C}^3 \setminus \{0\} \to \mathbf{P}^2$ est la projection naturelle). L'équation d'invariance de V se réécrit $Q \circ F = Q^\rho$. On a donc $I(f_+) \subset V$. De plus, $\operatorname{Supp} f^*[V] \subset f_+^{-1}(V)$ donc $f_-(V) \subset V$. Comme f_+ est birationnelle et que $f_+(V) = p$, l'application $f_-|_V$ ne peut être un automorphisme donc $f_-(V)$ est réduit à un point $q \in I(f_-) \cap V$ et $V \subset \mathcal{C}(f_-)$.

Par la Proposition 4.1.1, les courbes $\mathcal{C}(f_\pm) \setminus I(f_\pm)$ sont lisses. L'application f_+ est algébriquement stable donc $I(f_+) \cap I(f_-) = \emptyset$ (Proposition 4.1.3), et il s'ensuit que

$$V = V \setminus I(f_+) \cup V \setminus I(f_-) \subset \mathcal{C}(f_+) \setminus I(f_+) \cup \mathcal{C}(f_-) \setminus I(f_-),$$

est lisse. Comme V est une courbe rationnelle, on a nécessairement $\deg(V) = 1$ ou 2.

Lorsque V est une droite complexe, on peut alors trouver des coordonnées homogènes de $\mathbf{P}^2$ t.q. $V = \{z_2 = 0\}$, et f s'écrit alors

$$f([z_0 : z_1 : z_2]) = [P_0 : P_1 : z_2^\rho],$$

ce qui prouve que f induit une application holomorphe dans $\mathbf{C}^2 := \mathbf{P}^2 \setminus V$.

On va maintenant conclure en prouvant l'unicité du point exceptionnel (lorsqu'il existe). Supposons que $\mathcal{E} = \{p_1, \cdots, p_k\}$. Quitte à remplacer f par un itéré on peut supposer que tous les points de $\mathcal{E}$ sont fixes. Notons T_{p_i} leur courbe rationnelle invariante associée satisfaisant $f^* T_{p_i} = \rho T_{p_i}$. Au voisinage de chaque point p_i, on peut écrire f sous la forme $f(z, w) = (z^\rho, \star)$ et on vérifie que l'on a $[\mathcal{C}(f)] > (\rho - 1) T_{p_i}$. Comme $\deg(\mathcal{C}(f)) = 3\rho - 3$ (Proposition 3.1.3), on obtient

$$\sum_{i=1}^k (\rho - 1) \deg(T_{p_i}) < 3\rho - 3,$$

ce qui implique soit $k = 1$ et $\deg(T_{p_1}) = 1$ ou 2, soit $k = 2$ et $\deg(T_{p_1}) = \deg(T_{p_2}) = 1$. Dans le second cas, on peut écrire f en coordonnées homogènes $f[z_0 : z_1 : z_2] = [P_0 : z_1^\rho : z_2^\rho]$ ce qui implique $\deg(f) \geq \rho > 1$ et contredit le fait que f est birationnelle. $\square$

Chapitre 5

Étude dynamique de quelques classes d'applications rationnelles de surfaces rationnelles.

Introduction

Dans ce chapitre, on supposera que X est une surface rationnelle $X = \mathbf{P}^2$ ou $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, et que $f : X \to X$ est une application rationnelle dominante de X dans elle-même. Nous avons construit au chapitre 2 un courant $T(f)$ positif fermé de bidegré $(1,1)$ invariant et montré qu'il possédait des informations sur la dynamique de f, en particulier sur la distribution des préimages des hyperplans (voir Chapitre 4). Nous voulons maintenant décrire la dynamique de f, c'est-à-dire comprendre la structure des orbites des points de X. Pour celà on adopte un point de vue stochastique. On cherche donc à construire des mesures positives invariantes “intéressantes”, possédant des propriétés de mélange, décrivant la distribution des points périodiques ou étant d'entropie maximale.

Deux cas ont été étudié abondamment: les applications holomorphes de $\mathbf{P}^2$ et les automorphismes polynomiaux de $\mathbf{C}^2$. Résumons les principaux résultats qui ont été obtenu.

Si $f : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$ est une application holomorphe de $\mathbf{P}^2$ de degré $d = \lambda_1(f) \geq 2$, on définit sa mesure de Green $\mu := T(f) \wedge T(f)$ (voir [Si99]). Cette définition a un sens car $T(f)$ admet un potentiel continu. On démontre alors les propriétés suivantes:

HOL1 La mesure μ satisfait à l'équation d'invariance

$$f^{\bullet}\mu = d^2 \cdot \mu = \deg(f)\mu,$$

et elle est d'entropie maximale

$$h_\mu(f) = 2\log d.$$

HOL2 La mesure μ est mélangeante: pour tout couple de fonctions tests $\psi, \chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{P}^2)$, on a

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbf{P}^2} \psi \circ f^j \cdot \chi d\mu = \left(\int_{\mathbf{P}^2} \psi d\mu\right) \cdot \left(\int_{\mathbf{P}^2} \chi d\mu\right).$$

En particulier, μ est ergodique.

HOL3 Pour tout point $z \in \mathbf{P}^2$ hors d'un ensemble pluripolaire, on a équidistristribution des préimages de z:

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{d^{2j}} (f^j)^{\bullet}\delta_z = \mu.$$

HOL4 Les exposants de Lyapunov de μ sont positifs. Plus précisément, si λ est le plus petit d'entre eux, on a

$$\lambda \geq \frac{1}{2}\log d.$$

HOL5 On a équidistribution des points périodiques répulsifs:

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{d^{2j}} \sum_{\substack{f^j(p)=p \\ p \text{ répulsif}}} \delta_p = \mu,$$

au sens des mesures. ♣

Les assertions HOL1, HOL2, HOL3 sont dûes à Fornaess-Sibony (voir par exemple [Si99]), tandis que HOL4 et HOL5 ont été prouvé par Briend-Duval (voir [Br97] ou [BD99]).

Pour les automorphismes polynomiaux de $\mathbf{C}^2$, les résultats analogues ont été obtenu par Bedford-Lyubich-Smillie (voir [BLS93]). On se ramène à l'étude des composées des applications de Hénon $f : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ donnée par

$$f(z, w) = (w, az + P(w)),$$

où $a \in \mathbf{C}^*$ et P est un polynôme de degré $d \geq 2$. La compactification de f à $\mathbf{P}^2$ est algébriquement stable. On note T^+ le courant de Green associée à f, et T^- le courant de Green associé à son inverse f^{-1}. On définit alors la mesure $\mu := T^+ \wedge T^-$ (comme précédemment les potentiels des courants sont continues dans $\mathbf{C}^2$). Celle-ci est une mesure de probabilité à support compact dans $\mathbf{C}^2$ et vérifie:

HEN1 $f^*\mu = f_*\mu = \mu$. La mesure μ est mélangeante.

HEN2 Les exposants de Lyapunov $\lambda_+ \geq \lambda_-$ de μ sont non nuls. On a les inégalités $\lambda_+ \geq \log d > 0$ et $\lambda_- \leq -\log d < 0$.

HEN3 On a équidistribution des périodiques de type selle:

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{d^{2j}} \sum_{\substack{f^j(p)=p \\ p \text{ selle}}} \delta_p = \mu.$$

HEN4 La mesure μ est l'unique mesure d'entropie maximale. ♣

Dans le cas général des applications rationnelles, l'existence même d'une mesure invariante $f^\bullet\mu = \deg(f) \cdot \mu$ reste un problème ouvert. Si le degré topologique de f est important, nous avons cependant le Théorème de Russakovski-Shiffman (voir Section 3.3).

Théorème 5.0.5. *Theorem 1.1 [RS97]*

Soit f une application rationnelle dominante de $X = \mathbf{P}^2$ ou $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$.

Si la condition $\lambda_1(f) < \deg(f)$ est satisfaite, il existe une mesure de probabilité μ_f sur X et un ensemble pluripolaire $\mathcal{E}_f \subset X$ tels que

$$\frac{1}{(\deg(f))^j}(f^j)^\bullet(\nu) \longrightarrow \mu_f \tag{5.1}$$

pour toute mesure de probabilité ν sur X telle que $\nu(\mathcal{E}_f) = 0$.

Sous cette hypothèse, lorsque l'on peut assurer de plus que μ_f ne charge pas les ensembles pluripolaires (en particulier $\mu_f(I(f)) = 0$), la mesure de Russakovski-Shiffman vérifie l'équation d'invariance et on prouve qu'elle est alors mélangeante (Lemme 3.3.2). On s'attend de plus à ce que μ_f soit d'entropie maximale et vérifie les assertions HOL4 et HOL5.

Pour montrer que μ_f ne charge pas les pluripolaires, on va s'efforcer de la construire de manière différente. L'idée est d'écrire μ_f comme courant pluripositif $\mu_f := dd^c(uT(f))$ (voir Appendice A) où u est une fonction s.c.s. définie sur le support de $T(f)$. Des inégalités du type Chern-Levine-Nirenberg (CLN en abrégé) montreront que μ_f ne charge pas les pluripolaires (voir Proposition A.0.11).

De même, lorsque f est birationnelle, on aimerait définir $\mu := T(f) \wedge T(f^{-1})$ et prouver HEN1, HEN2, HEN3, HEN4. Dans ce cas, il apparait aussi crucial de s'assurer que μ ne charge pas les ensembles pluripolaires.

Dans tous les cas, la présence des points d'indétermination force les potentiels des courants considérés à ne pas être localement bornés. En particulier, il est important de noter que la définition même de μ_f nécessite l'utilisation d'une théorie fine de l'intersection des courants positifs fermés (voir e.g. [De93]) et ne peut être assuré en général.

Nous construirons une mesure invariante mélangeante pour deux classes particulières d'applications. Nous étudierons à la Section 1 les produits croisés polynomiaux $f(z, w) = (P(z), Q(z, w))$ de $\mathbf{C}^2$ et prouverons les analogues des assertions HOL1, HOL2, HOL3, HOL4 et HOL5. Ces applications ont été étudiées par différents auteurs ([He96], [J1-99], [Se97]) lorsque le degré des applications des fibres ne variait pas. Ceci revient à supposer que f s'étend holomorphiquement à une compactification de $\mathbf{C}^2$. Nous autorisons ici des comportements arbitraires des applications dans les fibres ce qui nous force à contrôler précisément le rôle des points d'indétermination.

Nous considérons à la Section 2 les applications birationnelles polynomiales de $\mathbf{C}^2$ et prouvons HEN1. Les autres assertions HEN2, HEN3, HEN4 demandent une compréhension plus fine de la structure de la mesure invariante construite. Notons que J. Diller prouve HEN1 et HEN2 pour une classe d'applications birationnelles de $\mathbf{P}^2$ peu singulières t.q. $\overline{I(f^\infty)} \cap \overline{I((f^{-1})^\infty)} = \emptyset$. La dynamique "intéressante" se déroule alors à distance hors des ensembles d'indétermination. La classe d'applications que nous étudions ici est d'un type différent et fait apparaitre des problèmes liés de manière essentielle aux points d'indétermination. Le contrôle des courants $T(f)$ et $T(f^{-1})$ au voisinage de $I(f) \cup I(f^{-1})$ joue un rôle crucial dans notre étude. Ce contrôle s'appuie sur le Théorème 2.4.6 démontré au Chapitre 2.

5.1 Produits croiss polynomiaux de $\mathbf{C}^2$.

Soit f une application méromorphe dominante de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ de bidegrs (α, β) et (γ, δ). Nous noterons A sa matrice des degrs. Nous avons principalement considr la Section 3.2 le cas o A tait primitive (Dfinition 3.2.2) et laiss de ct certains cas particuliers.

Lorsque $\beta = \gamma = 0$ et $\alpha, \delta \geq 2$, l'application f est holomorphe et sa dynamique s'tudie sparment sur chacun des facteurs. Lorsque $\alpha = \delta = 0$ et $\beta\gamma \geq 2$, f est galement holomorphe et f^2 est du type prcdent.

Lorsque $\beta\gamma = 0$ et $\alpha = 1$ (ou $\delta = 1$), f est semi-linaire et sa dynamique se ramne essentiellement de la dynamique unidimensionnelle.

Il reste donc considrer le cas $\beta = 0$, $\gamma \geq 1$ et $\alpha, \delta \geq 2$ (le cas $\gamma = 0$, $\beta \geq 1$ et $\alpha, \delta \geq 2$ se traite symtriquement). Ce type d'applications a t tudi par plusieurs auteurs (voir [He96], [J1-99], [Se97]). Notre point de vue est rapprocher de celui de Jonsson [J1-99] dont nous nous sommes trs largement inspirs. Il considre des produits croiss polynomiaux de $\mathbf{C}^2$ qui admettent une extension holomorphe dans $\mathbf{P}^2$ et dispose dans ce cas d'une mesure mlangeante support compact dans $\mathbf{C}^2$ (voir l'introduction). Nous construisons ici une mesure mlangeante associe n'importe quel produit crois polynomial de $f = (P(z), Q(z, w))$ qui n'est pas semi-linaire. En particulier le degr en w peut chuter et le support de la mesure peut tre non born dans $\mathbf{C}^2$. On ne peut donc pas raliser f comme une application continument fibre au dessus de J_P, contrairement la situation tudie dans [J2-99].

Comme précédemment, on notera $\|(z, w)\| := |z| + |w|$ si $(z, w) \in \mathbf{C}^2$. De mme, pour $\zeta \in \mathbf{C}$, $\|\zeta\| := \|(1, \zeta)\| = 1 + |\zeta|$.

5.1.1 Mesure mlangeante

Nous dcomposons les rsultats de cette section en deux thormes. Dans le premier, nous introduisons les fonctions et les courants fondamentaux qui nous serviront dfinir la mesure μ invariante. Dans le second thorme, nous dcrivons la structure de la mesure μ et prouvons les points HOL1, HOL2, HOL3, et HOL4. Nous dicuterons le point HOL5 à la section suivante.

Théorème 5.1.1. *Soit $f : (z, w) \in \mathbf{C}^2 \mapsto (P(z), Q(z, w)) \in \mathbf{C}^2$, o P et Q sont des polynmes tels que* $\deg P = \alpha \geq 2$, $\deg_w Q = \delta \geq 2$. *Soit $A(z)$ le coefficient dominant de w^δ i.e. $Q(z, w) = A(z) w^d + O_z(w^{d-1})$. On note encore f l'extension mromorphe de (P, Q) $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$.*

(i) La suite de courants $\alpha^{-j} (f^j)^* (\omega_1)$ converge vers un courant $T_P \in \mathcal{C}_1^+(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)$ cohomologue ω_1 qui vrifie

$$f^* T_P = \alpha \cdot T_P \ \text{ et } \ \mathit{Supp}\ T_P = J_P \times \mathbf{P}^1,$$

o J_P, l'ensemble de Julia de P, est un compact de $\mathbf{C}$. Le courant T_P admet un potentiel partout continu.

(ii) *La suite de fonctions $g_j(z,w) = \delta^{-j}\log\|Q^j(z,w)\|$ converge ponctuellement sur $K_P \times \mathbf{C}$ vers une fonction g s.c.s. et localement borne sur $K_P \times \mathbf{C}$ telle que*

$$g \circ f = \delta \cdot g\,,$$

o K_P dsigne l'ensemble de Julia rempli de P.

(iii) *La suite de fonctions $\varphi_j(z) = \sum_{l=0}^{j-1}\log|A \circ P^l(z)|$ converge ponctuellement sur K_P vers une fonction φ s.c.s. telle que $\varphi \in L^1(\mu_P)$, o μ_P dsigne la mesure de Green du polynme P.*

(iv) *Lorsque z est fix dans $K_P \setminus \{\varphi = -\infty\}$, la fonction $w \mapsto g(z,w)$ est continue, sous-harmonique dans $\mathbf{C}$. C'est la fonction de Green avec ple l'infini du compact $K_z := \{w \in \mathbf{C} \,/\, g(z,w) = 0\}$. Elle admet le dveloppement asymptotique*

$$g(z,w) = \log|w| + \varphi(z) + o_z(1)\,.$$

Remarque: Notons que $(z,w) \in K_P \times \mathbf{C} \mapsto g(z,w)$ n'est, en gnral, pas continue (voir Proposition 5.1.13). ♦

Démonstration.

i) Le premier facteur est indpendant de w et induit une application holomorphe $P : \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^1$ pour laquelle on sait construire une mesure de probabilit μ_P telle que $P^*\mu_P = \alpha \cdot \mu_P$ et qui admet un potentiel continu. Le courant $T_P = \pi_1^*\mu_P$ a toutes les proprits annonces, o $\pi_1 : \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^1$ dsigne la projection sur le premier facteur.

ii) Il existe $C > 0$ telle que $\|Q(z,w)\| \le C\|z\|^\gamma\|w\|^\delta$, o $\gamma = \deg_z Q$. On en dduit $g_{j+1}(z,w) \le g_j(z,w) + \delta^{-(j+1)}(\log C + \gamma\log\|P^j(z)\|)$. Comme K_P est un compact compltement invariant par P, on obtient sur $K_P \times \mathbf{C}$ une majoration $g_{j+1} \le g_j + \delta^{-j}C'$. La suite (g_j) est donc une suite "quasi-dcroissante" de fonctions psh non-ngatives, elle converge ainsi ponctuellement vers une fonction g s.c.s. localement borne sur $K_P \times \mathbf{C}$. La relation fonctionnelle rsulte de ce que $g_j \circ f = \delta \cdot g_{j+1}$.

iii) On a $f^j(z,w) = (P^j(z), Q^j(z,w))$, o Q^j est de terme dominant $A_j(z)w^{\delta^j}$ avec

$$A_j(z) = \prod_{l=0}^{j-1}(A \circ P^l(z))^{\delta^{j-l-1}}\ .$$

La suite

$$\varphi_j(z) = \frac{1}{\delta^j}\log|A_j(z)| = \sum_{l=0}^{j-1}\frac{1}{\delta^{l+1}}\log|A \circ P^l(z)|$$

est "quasi-dcroissante" sur le compact K_P i.e. $\varphi_{j+1} \le \varphi_j + \log C/\delta^j$ pour une constante $C > 0$, car A est borne sur K_P qui est totalement invariant.

Elle converge donc vers une fonction φ s.c.s. Cette fonction φ n'est pas identiquement $-\infty$ puisque P admet une infinit de points priodiques dont le cycle ne rencontre pas $A^{-1}(0)$. Enfin le thorme de convergence monotone donne

$$\begin{aligned}\int \varphi \, d\mu_P &= \lim_{j\to\infty} \int \varphi_j \, d\mu_P \\ &= \sum_{l\geq 0} \frac{1}{\delta^{l+1}} < (P^l)^* \log|A|, \mu_P > \\ &= \frac{1}{\delta - 1} \int \log|A| \, d\mu_P > -\infty \ ,\end{aligned}$$

donc $\varphi \in L^1(\mu_P)$.

iv) Il existe une constante $C > 0$ t.q. pour tout $(z, w) \in K_P \times \mathbf{C}$,

$$\Big| \|Q(z,w)\| - |A(z)| \cdot \|w\|^\delta \Big| \leq C\|w\|^{\delta-1} \ .$$

On en dduit pour tout $j \in \mathbf{N}$,

$$\left| g_{j+1} - g_j - \frac{1}{\delta^{j+1}} \log|A \circ P^j| \right| \leq \frac{1}{\delta^{j+1}} \log\left(1 + \frac{C}{\|Q^j\| \cdot |A \circ P^j|}\right) \ .$$

En minorant $\|Q^j\| \geq 1$ et en sommant l'ingalit prcdente, on obtient pour tout $j \in \mathbf{N}$, et pour tout $(z, w) \in K_P \times \mathbf{C}$,

$$|g(z,w) - g_j(z,w) - (\varphi(z) - \varphi_j(z))| \leq \sum_{l\geq j} \frac{1}{\delta^{l+1}} \log\left(1 + \frac{C}{|A \circ P^l|}\right) \ .$$

Fixons $z \in K_P \setminus \{\varphi = -\infty\}$. Comme la srie du membre de droite converge, la suite $(g_j)_{j\in\mathbf{N}}$ converge uniformment vers g sur $\{z\} \times \mathbf{C}$ et $w \mapsto g(z, w)$ est continue sur $\mathbf{C}$. On obtient galement $\forall (z, w) \in K_P \times \mathbf{C}$,

$$|g(z,w) - \log\|w\| - \varphi(z)| \leq \psi(z,w) \ , \tag{5.2}$$

avec

$$\psi(z,w) := \sum_{l\geq 0} \frac{1}{\delta^{l+1}} \log\left(1 + \frac{C}{|A \circ P^l| \cdot \|Q^l\|}\right).$$

Il s'ensuit, par convergence domine,

$$\lim_{w\to\infty} \psi(z,w) = \sum_{l\geq 0} \frac{1}{\delta^{l+1}} \lim_{w\to\infty} \log\left(1 + \frac{C}{|A \circ P^l| \cdot \|Q^l\|}\right) = 0,$$

d'o $g(z,w) = \log\|w\| + \varphi(z) + o_z(1)$. Ainsi $K_z = \{w \in \mathbf{C} \,/\, g(z,w) = 0\}$ est un compact de $\mathbf{C}$, $w \mapsto g(z, w)$ est sa fonction de Green avec ple l'infini et K_z est de capacit logarithmique $e^{-\varphi(z)}$. $\square$

Théorème 5.1.2. *Soit $f = (P(z), Q(z,w))$ vrifiant les hypothses du thorme prcdent. On note $\mu_P = dd^c g_P$ la mesure de Green de P sur $\mathbf{P}^1$ et on définit la mesure de probabilit $\mu_z := \Delta_w g(z,w)$ support dans $\{z\} \times \mathbf{C}$.*

(i) Le courant $\mu := dd^c(g \cdot T_P)$ est une mesure de probabilit invariante dans $\mathbf{C}^2$ qui ne charge pas les ensembles pluripolaires (en particulier $\mu(\mathcal{C}(f)) = \mu(I(f)) = 0$). Elle est invariante, vérifie $f^\bullet \mu = \alpha\delta \cdot \mu$, et agit sur une forme test χ par

$$< \mu, \chi >= \int_{J_P} \left(\int_{\mathbf{C}} \chi(z,w) d\mu_z(w) \right) d\mu_P(z) \,. \tag{5.3}$$

(ii) La mesure μ est d'entropie maximale:

$$h_{top}(f) = h_\mu(f) = \log(\alpha\delta).$$

(iii) La mesure μ est mlangeante et pour tout point z en dehors d'un ensemble pluripolaire, on a

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{(\alpha\delta)^{2j}} (f^j)^\bullet \delta_z = \mu.$$

(iv) Le support de μ vrifie

$$\text{Supp } \mu = \overline{\bigcup_{z\in J_P\setminus\{\varphi=-\infty\}} \{z\} \times \partial K_z} \,.$$

Il est compact dans $\mathbf{C}^2$ si et seulement si $A^{-1}(0) \cap J_P = \emptyset$.

(v) Les fonctions $\log^+\|(Df)^{\pm 1}\|$ sont dans $L^1(\mu)$. Ainsi μ admet deux exposants de Lyapunov λ',λ''. Ils sont donns par

$$\lambda' = \lambda_P = \log\alpha + \sum_{P'(z_i)=0} g_P(z_i) \geq \log\alpha > 0$$

et

$$\lambda'' = \log\delta + \int \sum_{\frac{\partial Q}{\partial w}(z,w_i(z))=0} g(z, w_i(z)) \; d\mu_P(z) \geq \log\delta > 0 \;.$$

Démonstration.

i) Le courant $\mu = dd^c(g \cdot T_P)$ est bien dfini dans $\mathbf{C}^2$ car g est localement borne sur le support de T_P. C'est une mesure positive puisque g_j est psh dans $\mathbf{C}^2$ et $\mu = \lim_{j\to\infty} dd^c(g_j \cdot T_P)$. L'quation (5.3) rsulte de la dfinition de μ. La masse de μ dans $\mathbf{C}^2$ est

$$\|\mu\|_{\mathbf{C}^2} = \int_{z\in\mathbf{C}} \left(\int_{w\in\mathbf{C}} \Delta_w g(z,w) \right) d\mu_P(z) = 1 \,,$$

car $\varphi \in L^1(\mu_P)$ et $\int_w \Delta_w g(z,w) = 1$ pour $z \in J_P \setminus \{\varphi = -\infty\}$ (cf point (iv) du Thorme 5.1.1). En particulier, la mesure μ ne charge pas l'infini. La Proposition A.0.11 assure que μ ne charge pas les ensembles pluripolaires de $\mathbf{C}^2$ donc de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. L'quation fonctionnelle $f^\bullet \mu = \alpha\delta \cdot \mu$ résulte alors de celles satisfaites par g et T_P.

ii) Ceci rsulte du Corollaire 2.3.11 et de l'assertion i).

iii) Comme le degr topologique de f est $\deg(f) = \alpha\delta > \lambda_1(f) = \max(\alpha, \delta)$, le rsultat d'quidistribution de Russakovskii-Shiffman (Thorme 3.3.1) s'applique et le Lemme 3.3.2 montre que f est mlangeante.

iv) La formule annonce pour le support est une consquence de (5.3). Lorsque $A^{-1}(0) \cap J_P = \emptyset$, la fonction φ est uniformment minore sur J_P et on dduit de (5.2) que $g(z,w) - \log\|w\| \geq C_1$ pour une constante $C_1 > 0$. Cela prouve la compacit de $\mathrm{Supp}\,(\mu)$.

Si $A^{-1}(0) \cap J_P \neq \emptyset$ alors $\{\varphi = -\infty\} \cap J_P \neq \emptyset$. Soit (x_j) une suite de points de $J_P \setminus \{\varphi = -\infty\}$ qui converge vers x tel que $\varphi(x) = -\infty$. On a $\varphi(x_j) \to -\infty$ donc la suite de compacts $\partial K_{x_j} \subset \mathrm{Supp}\,(\mu)$ est non borne -ils sont de capacit logarithmique $\exp(-\varphi(x_j))$- et $\mathrm{Supp}\,(\mu)$ n'est pas born.

v) Le fait que les fonctions $\log^+ \|(Df)^{\pm 1}\|$ sont dans $L^1(\mu)$ découle du lemme suivant (voir aussi Lemme 5.1.9). Ce lemme sera de plus utile dans la section suivante.

Lemme 5.1.3. *La fonction* $p \mapsto \log \mathrm{dist}_{\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1}(p, \mathcal{C}(f)) \in L^1(\mu)$.

Démonstration.

Fixons $V \supset J_P$ un voisinage ouvert borné de J_P. La fonction

$$H(z,w) := |P'(z)|^2 \cdot \left|\frac{\partial Q}{\partial w}\right|^2 \times (1 + |w|^2)^{1-\delta}$$

définit une fonction réelle analytique sur $V \times \mathbf{P}^1$ qui s'annule précisément sur $\mathcal{C}(f)$. Les inégalités de Lojasiewicz donnent l'existence de réels $C, N > 0$ t.q.

$$C^{-1} H(z,w)^{1/N} \leq \mathrm{dist}_{\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1}((z,w), \mathcal{C}(f)) \leq C H(z,w)^N.$$

Pour conclure, il nous suffit donc de montrer que la fonction $\log|P'(z) \cdot \partial Q/\partial w| \in L^1(\mu)$, et que $\log^+|w| \in L^1(\mu)$. Nous donnerons une formule exacte de l'intégrale de la première fonction. Pour la seconde nous procédons de la manière suivante.

La formule de reprsentation de Riesz donne pour tout $w \in \mathbf{C}$

$$\int_{S^1} \log|w - \zeta| d\zeta = \log^+|w|.$$

La formule de reprsentation (5.3) et le thorme de Fubini combins au fait que

g est majore sur $J_P \times S^1$, donnent les ingalits

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{C}^2} \log^+ |w| d\mu &= \int_{J_P} d\mu_P \left(\int_{S^1 \times \mathbf{C}} \log |w - \zeta| d\zeta \otimes \Delta_w g(z,w) \right) \\
&= \int_{J_P} d\mu_P \left(\int_{S^1} \left(g(z,\zeta) - \varphi(z) \right) d\zeta \right) \\
&\leq 2\pi \left(\int -\varphi d\mu_P \right) + 2\pi \sup_{J_P \times S^1} g < +\infty.
\end{aligned}$$

Ainsi $\log^+ |w| \in L^1(\mu)$. □

L'application f admet donc deux exposants de Lyapunov relatifs la mesure ergodique μ. Ce sont deux rels $\lambda_1 \geq \lambda_2$ caractriss par l'existence, pour μ-presque tout $p \in \mathbf{C}^2$ d'un sous-espace $E_2(p)$ de $\mathbf{C}^2$ tel que

$$\begin{aligned}
\lim_{j \to +\infty} \frac{1}{j} \log \| Df^j(p) \cdot v \| = \lambda_2, \ \forall v \in E_2(p) \setminus \{0\}, \\
\lim_{j \to +\infty} \frac{1}{j} \log \| Df^j(p) \cdot v \| = \lambda_1, \ \forall v \in \mathbf{C}^2 \setminus E_2(m).
\end{aligned}$$

Le thorme ergodique de Birkhoff donne de plus (cf [Y95])

$$\Lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = \int \log |\det Df| d\mu. \tag{5.4}$$

Puisque f envoie une droite verticale $\{z\} \times \mathbf{C}$ sur la droite verticale $\{P(z)\} \times \mathbf{C}$, l'un des exposants de Lyapunov, notons le λ', est gal l'exposant de Lyapunov λ_P de P relatif la mesure μ_P qui est ergodique pour P. La formule annonce pour λ' est alors une consquence simple de la formule de Riesz pour g_P, la fonction de Green de P (cf [P85]).

Il reste calculer $\lambda'' = \Lambda - \lambda_P$. On dduit de (5.3) et (5.4)

$$\lambda'' = \Lambda - \lambda_P = \int \left(\int \log \left| \frac{\partial Q}{\partial w}(z,w) \right| \ d\mu_z(w) \right) \ d\mu_P(z).$$

Or pour tout $z \in J_P \setminus \{\varphi = -\infty\}$, $g(z,w) = \varphi(z) + \int \log |\zeta - w| \mu_z(\zeta)$, et le terme dominant de $Q_z(w) = Q(z,w)$ est $A(z) w^\delta$. Si $w_1(z), \ldots, w_{\delta-1}(z)$ sont les racines de $\partial Q_z / \partial w(w) = 0$ (comptes avec multiplicit), on obtient donc

$$\int \log \left| \frac{\partial Q}{\partial w}(z,w) \right| \ d\mu_z(w) = \log \delta + \log |A(z)| + \sum_{i=1}^{\delta-1} \left(g(z, w_i(z)) - \varphi(z) \right) \ .$$

Enfin l'galit $(\delta - 1) \int \varphi \ d\mu_P = \int \log |A| \ d\mu_P$ (voir la preuve du point iii du Thorème 5.1.1) fournit la formule dsire pour λ''. □

5.1.2 Equidistribution des points priodiques.

Dans cette section, nous dmontrons que pour les produits croiss polynomiaux de $\mathbf{C}^2$, les points priodiques rpulsifs s'quidistribuent selon μ (propriété HOL5). La preuve est de Briend-Duval [BD99] dans le cas holomorphe. Leurs arguments s'adaptent au cas rationnel modulo le fait crucial que la mesure μ ne charge pas $\mathcal{C}(f)$ - donc $I(f)$ - (voir l'hypothèse 3 du Théorème 5.1.4 ci-dessous). Cette hypothse permet d'obtenir la construction de voisinages rguliers " la Pesin" puis de construire de nombreuses branches inverses de f. Nous avons choisi de donner une dmonstration dtaille du rsultat gnral suivant. Nous pensons que l'quidistribution des points priodiques rpulsifs par rapport à une mesure d'entropie maximale est en effet valable pour une large classe d'applications méromorphes.

Théorème 5.1.4. *Soit $f : X \to X$ une application méromorphe d'une varit complexe compacte lisse de dimension n, et μ une mesure de probabilit sur X. On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites:*

1. *La mesure μ est invariante, et on a $f^\bullet\mu = \deg(f)\mu$.*
2. *La mesure μ est mlangeante.*
3. *La fonction $p \mapsto \log \mathrm{dist}(p, \mathcal{C}(f)) \in L^1(\mu)$ (en particulier $\mu(\mathcal{C}(f)) = \mu(I(f)) = 0$).*
4. *Les exposants de Lyapunov de f relativement μ sont strictement positifs.*
5. *Le nombre P_k^+ de points priodiques rpulsifs de priode k satisfait $\limsup_{k\to\infty}(P_k^+)^{1/k} \leq \deg(f)$.*

Alors on a

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{\deg(f)^{2j}} \sum_{\substack{f^j(p)=p \\ p \text{ rpulsif}}} \delta_p = \mu,$$

i.e. les points priodiques rpulsifs s'quidistribuent selon μ.

Corollaire 5.1.5. *Soit $f = (P(z), Q(z,w))$ un produit crois polynomial de $\mathbf{C}^2$ o P et Q sont des polynmes tels que $\deg P = \alpha \geq 2$, $\deg_w Q = \delta \geq 2$, et μ la mesure construite prcdemment. Alors les points priodiques rpulsifs de f s'quidistribuent selon μ.*

Démonstration. Les assertions 1, 2 et 4 sont des consquences directes du Thorme 5.1.2. Pour 5, on vrifie facilement que pour tout $k \geq 0$, le nombre de points fixes isols est born par $(\alpha\delta)^k = \deg(f)^k$. Enfin l'hypothse d'intgrabilit 3 dcoule du Lemme 5.1.3. On peut donc appliquer le Thorme 5.1.4 prcdent pour conclure. $\square$

Remarque: La condition 3 implique que la fonction $p \mapsto \log \mathrm{dist}(p, I(f)) \in L^1(\mu)$. Cette hypothèse permet de controler le rôle joué par les points d'indétermination. Notons aussi que cette hypothèse implique l'intgrabilit des fonctions $\log^+ \|Df^{\pm 1}\| \in L^1(\mu)$ ncessaire la dfinition des exposants de Lyapunov (voir Lemme 5.1.9). Enfin des conditions similaires interviennent naturellement en thorie de Pesin des applications possdant des singularits (cf [KS86]). ♦

Le reste de cette section est consacre la preuve du Thorme 5.1.4. Celle-ci suit exactement la preuve donnée par [BD99] mais nous avons choisi de la détailler pour clarifier le rôle joué par la présence de points d'indétermination. La démonstration s'appuie essentiellement sur la thorie de Pesin. Nous donnons un bref expos des rsultats qui nous seront ncessaires, nous renvoyons le lecteur [KH95] pour un expos dtaill.

Soit donc $f : X \to X$ une application mromorphe vrifiant les hypothses du Thorme 5.1.4. Reprenons les notations de la Section 2.1. Soit $\Gamma \subset X \times X$ le graphe de f et $\Gamma^\infty := \{x^\bullet = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \in X^{\mathbf{Z}} \text{ t.q. } (x_i, x_{i+1}) \in \Gamma\}$. On note $\pi_i : \Gamma^\infty \to X$ la projection $\pi_i(x^\bullet) := x_i$ et $\pi := \pi_0$. Le shift gauche $\widehat{f}(x_i) := (x_{i+1})$ dfinit un homomorphisme de Γ^∞ sur lui-mme tel que $\pi \circ \widehat{f} = f \circ \pi$. Le systme dynamique $(\Gamma^\infty, \widehat{f})$ est l'extension naturelle de f Γ^∞. La mesure μ se relve Γ^∞ en une mesure mlangeante $\widehat{\mu}$ t.q. $\pi_* \widehat{\mu} = \mu$ (voir Lemme 2.3.4).

Rappelons tout d'abord quelques notions importantes.

Définition 5.1.6. *Une fonction mesurable $K : \Gamma^\infty \to \mathbf{R}_+^*$ est dite tempre si $\lim_{k \to \infty} |k|^{-1} \log K(f^k(\widehat{x})) = 0$ pour $\widehat{\mu}$ presque tout $\widehat{x}$.*

Le lemme suivant est classique:

Lemme 5.1.7. *([KH95] p.666)*

Soit $K : \Gamma^\infty \to \mathbf{R}_+^*$ une fonction tempre. Pour tout $1 > \varepsilon > 0$, il existe une fonction mesurable $K_\varepsilon > K$ t.q. K_ε est ε-lente i.e.

$$\varepsilon < \frac{K_\varepsilon(f(\widehat{x}))}{K_\varepsilon(\widehat{x})} < \varepsilon^{-1}$$

pour $\widehat{x}$ $\widehat{\mu}$-p.p.

L'invariance de $\widehat{\mu}$ permet de construire de nombreuses fonctions tempres.

Lemme 5.1.8. *Soit $K : \Gamma^\infty \to \mathbf{R}_+^*$ une fonction mesurable t.q. $\log K \in L^1(\widehat{\mu})$. Alors K est tempre.*

Démonstration. Comme $\widehat{\mu}$ est ergodique (invariante suffit), le thorme de Birkhoff appliqu $\log K \circ f - \log K$ prouve la convergence pour $\widehat{\mu}$ presque tout point

$$\begin{aligned}\frac{1}{k}\Big(\log K\circ \widehat{f}^k-\log K\Big) &= \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\Big(\log K\circ \widehat{f}^{i+1}(\widehat{x})-\log K\circ \widehat{f}^{i}(\widehat{x})\Big)\\ &\longrightarrow \int(\log K\circ \widehat{f}-\log K)d\widehat{\mu}=0.\end{aligned}$$

Le mme raisonnement appliqu $\widehat{f}^{-1}$ permet de conclure la preuve. □

Nous utiliserons le lemme général suivant.

Lemme 5.1.9. *Soit X une variété complexe lisse compacte et $f : X \to X$ une application méromorphe quelconque. Alors il existe des constantes $C > 0$ et $N \in \mathbf{N}^*$ t.q. pour tout $x \in X$ les inégalités*

$$\begin{aligned}\|Df(x)\|,\ \|D^2f(x)\| &\le C\mathrm{dist}(x, I(f))^N,\\ \|Df^{-1}(f(x))\| &\le C\mathrm{dist}(x,\mathcal{C}(f))^N\end{aligned}$$

sont satisfaites.

Notons que $I(f) \subset \mathcal{C}(f)$ donc l'hypothèse 3 implique l'intégrabilité des fonctions $\log^+\|Df^{\pm1}\|, \log^+\|D^2f\|$. En particulier, les fonctions $1+\|Df\|$ et $1+\|D^2f\|$ sont tempérées.

Démonstration. Lemme 5.1.9

La preuve résulte des inégalités de Lojasiewicz. Elle est analogue pour les trois fonctions considérées, nous ne considérerons donc que le cas de $\log\|Df\|$.

Soit Γ le graphe de f muni des projections $\pi_1, \pi_2 : \Gamma \to X$. On fixe une métrique hermitienne arbitaire sur Γ. On a pour tout point $x \in X \setminus I(f)$, $f(x) = \pi_2\pi_1^{-1}(x)$. On veut estimer $\|D\pi_1^{-1}(x)\|$. Dans une carte locale U, on peut écrire

$$D\pi_1^{-1}(x) = \frac{\widetilde{D\pi_1}}{\det D\pi_1}(\pi_1^{-1}(x)),$$

où $\widetilde{D\pi_1}$ désigne la transposée de la comatrice de $D\pi_1$. la fonction $\det D\pi_1$ est réelle analytique sur $U \subset \Gamma$ et s'annule précisément sur l'ensemble $\mathcal{C}(\pi_1) = \pi_1^{-1}(I(f))$. Par Lojasiewicz, on peut trouver des constantes $C, N > 0$ t.q. pour tout $y \in \Gamma$ on a

$$|\det D\pi_1(y)| \ge C\mathrm{dist}(y, \pi_1^{-1}(I(f)))^N.$$

On en déduit alors pour des constantes $C', C'' > 0$

$$\begin{aligned}\|D\pi_1^{-1}(x)\| &\le \frac{\|\widetilde{D\pi_1}\|}{|\det D\pi_1|}(\pi_1^{-1}(x))\\ &\le C'\mathrm{dist}(\pi_1^{-1}(x), \pi_1^{-1}I(f))^{-N}\\ &\le C''\mathrm{dist}(x, I(f))^{-N}.\end{aligned}$$

Et il vient pour une constante $D > 0$,

$$\|Df(x)\| \leq \|D\pi_2(\pi_1^{-1}(x))\| \cdot \|D\pi_1^{-1}(x)\| \leq D\mathrm{dist}(x, I(f))^{-N},$$

ce qui conclut la preuve. □

Démonstration. Théorème 5.1.4

Première étape: Elle consiste construire des cartes locales adaptes dans lesquelles f est approche en norme $\mathcal{C}^1$ par son application tangente qui est elle-mme expansive (voir hypothse 4).

Soit $\{U_i\}$ une collection finie d'ouverts de carte disjoints: le fibr tangent $TX|_{U_i}$ est trivial. On suppose que $\mu(\cup_i U_i) = \mu(X) = 1$, et que $\mathcal{C}(f) \cup I(f) \subset \bigcup_i \partial U_i$. L'ensemble des points $\widehat{x}$ t.q. $x_k \in \bigcup_i U_i$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$ est un borlien invariant de mesure 1 que nous noterons encore Γ^∞. Par dfinition, l'espace tangent au point $\widehat{x} \in \Gamma^\infty$ est $T_{\widehat{x}}\Gamma^\infty := T_{x_0}X$. Muni de cette trivialisation, l'application tangente $D\widehat{f}(\widehat{x}) := Df(x_0)$ sur $T\Gamma^\infty$ dfinit une application valeurs dans $GL(n, \mathbf{C})$.

Grâce à l'hypothèse 3 et grce au Lemme 5.1.9, le thorme d'Osedelec s'applique (voir [KH95] p.665). On peut dfinir en presque tout point les exposants de Lyapunov de f. Ceux-ci ne dpendent pas du point considr car $\widehat{\mu}$ est ergodique, et par hypothse, ils sont tous minors par une constante $\lambda > 0$. On a donc pour presque tout $\widehat{x} \in \Gamma^\infty$ et tout $v \in T_{\widehat{x}}\Gamma^\infty$:

$$\lim_{k \to \pm\infty} k^{-1} \log \|D\widehat{f}^k(\widehat{x}).v\| \geq \lambda > 0.$$

Fixons $\varepsilon \ll 1$ une constante trs petite. En déformant la métrique hermitienne originelle de manière tempérée, on peut rendre le cocycle $D\widehat{f}$ uniformément expansif. C'est le contenu du thorme d'ε-rduction de Pesin qui se réduit dans notre cadre à l'assertion suivante:

Théorème 5.1.10. *(voir [KH95] p.666)*

Il existe une application $C_\varepsilon : \Gamma^\infty \to GL(n, \mathbf{C})$ avec $\|C_\varepsilon^{\pm 1}\|$ tempre et tel que la matrice $A_\varepsilon(\widehat{x}) := C_\varepsilon(\widehat{f}(\widehat{x}))D\widehat{f}(\widehat{x})C_\varepsilon^{-1}(\widehat{x})$ vrifie

$$\|A_\varepsilon(\widehat{x})^{-1}\|^{-1} \geq \exp(\lambda - \varepsilon) \tag{5.5}$$

pour $\widehat{\mu}$-presque tout point $\widehat{x} \in \Gamma^\infty$.

On va alors montrer qu'en tordant des cartes locales par C_ε on peut approcher l'application f par son application tangente en norme $\mathcal{C}^1$.

Par commodit, on fixe une mtrique lisse sur X et $r_0 > 0$ t.q. l'exponentielle $\exp_{\widehat{x}} := \exp_{x_0} : B(r_0) \to X$ soit un plongement avec $\|D\exp_{\widehat{x}}(w)\| \leq 1$ pour tout $w \in B(r_0)$. Soit $C, N > 0$ des constantes fournies par le Lemme 5.1.9, et fixons $r(\widehat{x})$ une fonction mesurable de l'ordre de $C\mathrm{dist}(x_0, I(f))^N$ vérifiant

$$r(\widehat{x}) \times \sup_{B(x_0, r(\widehat{x}))} 1 + \|Df\| \leq r_0.$$

Notons que r est tempérée. L'ingalit des accroissements finis implique

$$f(\exp_{\widehat{x}} B(r(\widehat{x}))) \subset \exp_{\widehat{f}(\widehat{x})}(B(r_0))\,.$$

On peut donc dfinir l'application

$$f_{\widehat{x}} := \left(C_\varepsilon(\widehat{f}(\widehat{x})) \circ \exp^{-1}_{\widehat{f}(\widehat{x})}\right) \circ f \circ \left(\exp_{\widehat{x}} \circ C_\varepsilon^{-1}(\widehat{x})\right)$$

dans la boule $C_\varepsilon(\widehat{x})B(r(\widehat{x})) \supset B(\|C_\varepsilon^{-1}(\widehat{x})\|^{-1}r(\widehat{x}))$ contenant l'origine de $\mathbf{C}^n$. Notons $\overline{r}(\widehat{x}) := \|C_\varepsilon^{-1}(\widehat{x})\|^{-1}r(\widehat{x})$.

L'application $f_{\widehat{x}}$ fixe l'origine et dans la boule $B(\overline{r}(\widehat{x}))$ on a l'estimation

$$\|Df_{\widehat{x}}(w) - Df_{\widehat{x}}(0)\| \leq \\ \|C_\varepsilon(\widehat{f}(\widehat{x}))\| \cdot \|C_\varepsilon^{-1}(\widehat{x})\| \cdot \sup_{B(\overline{r}(\widehat{x}))} 1 + \|D^2 f\| \cdot \|w\| := \eta(\widehat{x}) \cdot \|w\|.$$

Il s'ensuit

$$\|Df_{\widehat{x}}(w) - Df_{\widehat{x}}(0)\| \leq \varepsilon,$$

dans la boule $B(\delta(\widehat{x}))$ avec $\delta(\widehat{x}) := \min\{\varepsilon/\eta(\widehat{x}), \overline{r}(\widehat{x})\}$. Par hypothèse la fonction $\mathrm{dist}(x_0, I(f))$ est μ-intégrable, il s'ensuit que η est tempérée (Lemme 5.1.8) puis que δ l'est aussi. En posant $\psi_{\widehat{x}} := \exp_{\widehat{x}} \circ C_\varepsilon^{-1}(\widehat{x})$, on a prouv (notons que $Df_{\widehat{x}}(0) = A_\varepsilon(0)$ dans les notations du Théorème 5.1.10):

Proposition 5.1.11. *Il existe une fonction tempre δ sur Γ^∞ et une famille de cartes $\psi_{\widehat{x}} : B(\delta(\widehat{x})) \to X$ t.q. si on pose*

$$f_{\widehat{x}} := \psi^{-1}_{\widehat{f}(\widehat{x})} \circ f \circ \psi_{\widehat{x}}$$

on a les estimations

1. $\|Df_{\widehat{x}}(0)^{-1}\|^{-1} \geq \exp(\lambda - \varepsilon)$,
2. $\|Df_{\widehat{x}}(w) - Df_{\widehat{x}}(0)\| \leq \varepsilon$.

De plus, il existe une fonction tempre H et un rel $K > 0$ t.q.

$$K^{-1}\mathrm{dist}(\psi_{\widehat{x}}(u), \psi_{\widehat{x}}(v)) \leq \mathrm{dist}(u,v) \leq H(\widehat{x})\mathrm{dist}(\psi_{\widehat{x}}(u), \psi_{\widehat{x}}(v)), \tag{5.6}$$

c'est-à-dire que les cartes $\psi_{\widehat{x}}$ sont à excentricité tempérée.

Deuxième étape: A l'aide de la proposition précédente, on va contruire de nombreuses branches inverses de f^k.

Quitte à appliquer le Lemme 5.1.8, on peut supposer δ à variation ε-lente. Fixons $\lambda' > \varepsilon$ t.q. $e^{\lambda'} = e^{\lambda - \varepsilon} - \varepsilon$. L'estimation (2) de la Proposition 5.1.11 implique pour tout $u, v \in B(\delta(\widehat{x}))$,

$$\| f_{\widehat{x}}(u) - f_{\widehat{x}}(v) - Df_{\widehat{x}}(0).(u-v) \| \leq \\ \int_0^1 \| \left(Df_{\widehat{x}}(v + (u-v)t) - Df_{\widehat{x}}(0)\right).(u-v) \| \, dt \leq \varepsilon\|u - v\|,$$

et par suite

$$\|f_{\widehat{x}}(u) - f_{\widehat{x}}(v)\| \geq e^{\lambda'}\|u - v\|. \tag{5.7}$$

L'application $f_{\widehat{x}}$ est donc injective sur $B(\delta(\widehat{x}))$ et pour tout $r \leq \delta(\widehat{x})$ on a

$$f_{\widehat{x}}(B(r)) \supset B(e^{\lambda'}r).$$

Comme δ est ε-lente, on a $B(e^{\lambda'}\delta(\widehat{x})) \supset B(\delta\widehat{f}(\widehat{x}))$. On peut donc définir une branche inverse $f_{\widehat{x}}^{-1}$ de $f_{\widehat{x}}$ sur $B(\delta(\widehat{x}))$ et pour tout $r \leq \delta(\widehat{x})$ on a

$$f_{\widehat{x}}^{-1}(B(r)) \subset B(e^{-\lambda'}r).$$

Par récurrence, on vérifie que pour (presque) tout $\widehat{x} \in \Gamma^\infty$ et pour tout $k \geq 0$ la branche inverse $f_{\widehat{x}}^{-k}$ de $f_{\widehat{x}}^k := \psi_{\widehat{f}^k(\widehat{x})}^{-1} \circ f^k \circ \psi_{\widehat{x}}$ est bien définie sur $B(\delta(\widehat{x}))$ et pour tout $r \leq \delta(\widehat{x})$ on a

$$f_{\widehat{x}}^{-k}(B(r)) \subset B(e^{-k\lambda'}r).$$

On se ramène maintenant dans la variété X via $\psi_{\widehat{x}}$. On peut donc définir pour (presque) tout point $\widehat{x} \in \Gamma^\infty$ et pour tout $k \geq 0$ une branche inverse de f^k que l'on notera aussi $f_{\widehat{x}}^{-k}$ envoyant x_0 sur x_{-k} et t.q.

$$f_{\widehat{x}}^{-k} : B\left(x_0, \frac{\delta(\widehat{x})}{H(\widehat{x})}\right) \longrightarrow B\left(x_{-k}, e^{-k\lambda'}K\frac{\delta(\widehat{x})}{H(\widehat{x})}\right).$$

Comme H est tempérée, on obtient:

Proposition 5.1.12. *Il existe une fonction ε-lente $\eta > 0$ et $\lambda'' > 1$ t.q. pour $\widehat{\mu}$-presque tout point $\widehat{x} \in \Gamma^\infty$ et pour tout $k \geq 0$, la branche inverse $f_{\widehat{x}}^{-k}$ de f^k envoyant x_0 sur x_{-k} est bien définie au voisinage de x_0 et l'inclusion*

$$f_{\widehat{x}}^{-k}\left(B\left(x_0, \eta(\widehat{x})\right)\right) \subset B\left(x_{-k}, e^{-k\lambda''}\eta(\widehat{x})\right)$$

est vérifiée.

Troisième étape: A l'aide de la proposition précédente, on conclut la preuve en reprenant les arguments de [BD99]. On utilise de manière cruciale le mélange de μ et son équation d'invariance $f^\bullet\mu = \deg(f)\mu$.

Donnons une idée de la preuve. Soit U une petite boule fixée. Comme f est mélangeante, on a pour k assez grand

$$\mu(f^{-k}(U) \cap U) \sim \mu(U)^2.$$

On a vu que l'on pouvait construire de nombreuses branches inverses de f^k et que le diamètre des composantes de $f^{-k}(U)$ décroissait exponentiellement vite. On peut donc recouvrir $f^{-k}(U)$ à un ensemble de mesure négligeable près par une union de composantes B de diamètre $\operatorname{diam}(B) \ll \operatorname{diam}(U)$ et t.q. $f^k : B \to U$ est bijective. L'équation d'invariance de μ implique $\mu(B) = \deg(f)^{-k}\mu(U)$. Notons $\mathcal{B}$ l'ensemble des composantes connexes de $f^{-k}(U)$ intersectant U et vérifiant les conditions précédentes. Comme le diamètre de $B \in \mathcal{B}$ est petit par rapport à celui de U, on peut supposer que $B \subset U$. Le théorème du point fixe appliqué à $f^{-k} : U \to B$ fournit l'existence d'un point périodique de période k attractif pour f^{-k} donc répulsif pour f^k. On a donc

$$\begin{aligned} \mu(f^{-k}(U) \cap U) &\sim \mu\left(\bigcup_{\mathcal{B}} B\right) = \frac{\mu(U)}{\deg(f)^k}\ \mathrm{Card}\mathcal{B} \\ &\sim \frac{\mu(U)}{\deg(f)^k}\mathrm{Card}\{f^k(x) = x,\ x \in U \text{ répulsif}\}. \end{aligned}$$

Par suite, $\lim_{k\to\infty} \deg(f)^{-k}\mathrm{Card}\{f^k(x) = x,\ x \in U \text{ répulsif}\} = \mu(U)$, ce qui conclut la preuve.

Nous renvoyons à [BD99] pour une preuve précise de ce fait. □

5.1.3 Exemples

Nous prcisons dans ce paragraphe la dynamique d'une classe particulire de produits croiss polynomiaux. Cela fournit en particulier des exemples d'applications polynomiales de $\mathbf{C}^2$ pour lesquelles l'ensemble K_f des points d'orbite positive borne n'est pas ferm.

On considre $f : (z, w) \in \mathbf{C}^2 \to (P(z), A(z)w^\delta) \in \mathbf{C}^2$, avec $\delta \geq 2$, $\deg P = \alpha \geq 2$. Comme prcdemment $\varphi(z) = \sum_{l\geq 0} \delta^{-l-1} \log |A \circ P^l(z)|$. On vrifie aisment les assertions suivantes.

- La fonction $g : K_P \times \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ est donne par $g(z, w) = \max(\varphi(z) + \log |w|, 0)$.
- $K_z = \{w \in \mathbf{C} \,/\, |w| \leq e^{-\varphi(z)}\}$.
- Le second exposant de Lyapunov est $\lambda'' = \log \delta$.

Il est possible de dcrire prcisment certains aspects de la dynamique en discutant selon que $A^{-1}(0)$ rencontre ou non J_P (resp. $\mathrm{Int}(K_P)$). Nous ne mentionnerons que la

Proposition 5.1.13. *Supposons que $A^{-1}(0) \cap J_P \neq \emptyset$.*

- *L'ensemble $\{\varphi = -\infty\} \cap J_P$ est dense dans J_P.*
- *La fonction $g_{|J_P \times \mathbf{C}}$ est partout discontinue.*

- *L'ensemble* $K_f = \{(z,w) \in \mathbf{C}^2 \,/\, |f^j(z,w)|_{j\geq 0} := O(1)\}$ *des points d'orbite positive borne n'est pas ferm. Son adhrence contient* $J_P \times \mathbf{C}$.

Démonstration. Soit x un point de J_P tel que $A(x) = 0$. Les primages de x par P^j sont denses dans J_P et appartiennent $\cup_{j\geq 1}\{\varphi_j = -\infty\} \subset \{\varphi = -\infty\}$. La fonction $\varphi_{|J_P}$ ne peut donc pas tre continue aux points de $J_P \setminus \{\varphi = -\infty\}$. Par suite, g est nulle sur une famille de droites $\{z\} \times \mathbf{C}$ dense dans $J_P \times \mathbf{C}$ et $g|_{J_P\times\mathbf{C}}$ est partout discontinue.

L'ensemble K_f est un sous-ensemble de $K_P \times \mathbf{C}$. Si $\log|w| > -\varphi(z)$, l'quation fonctionnelle $g \circ f = \delta \cdot g$ assure que $|w_j| \to \infty$, l'orbite de (z,w) est attire par $\{w_0 = 0\}$, donc $(z,w) \notin K_f$.

Si $z \in K_P$ et $\varphi(z) + \log|w| < 0$,

$$\frac{1}{\delta^j}\log|w_j| = \log|w| + \sum_{l=0}^{j-1}\frac{1}{\delta^{l+1}}\log|A \circ P^l(z)|$$

est strictement ngatif pour j assez grand. Donc $|w_j| \to 0$ et $(z,w) \in K_f$.

Ainsi $K_f \cap (J_P \times \mathbf{C})$ est strictement inclus dans $J_P \times \mathbf{C}$ et contient une famille dense de droites $\{z\} \times \mathbf{C}$, il n'est donc pas ferm. $\square$

5.2 Applications birationnelles polynômiales dans $\mathbf{C}^2$.

Nous allons étudier dans cette section une autre classe d'applications polynomiales de $\mathbf{C}^2$: celle-ci sera contenue dans l'ensemble des applications birationnelles de $\mathbf{P}^2$ ($\deg(f) = 1$) et contiendra la classe des applications de Hénon (voir l'introduction de ce chapitre).

Considérons tout d'abord f une application birationnelle de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ de matrice des degré $A \in M(2, \mathbf{N})$. Il est naturel (cf Proposition 3.1.6) de se restreindre aux applications telles que $I_1(f) \cap I_2(f) = \emptyset$. Dans ce cas, la Proposition 3.3.4 permet d'exprimer le degré topologique $\deg(f) = \alpha\delta + \beta\gamma = 1$. On a donc $\beta\gamma = 0$ ou $\alpha\delta = 0$. Lorsque $\beta = 0$ (le cas $\gamma = 0$ se traite par symétrie), on obtient $\alpha = \delta = 1$; le premier facteur est donc linéaire et la dynamique de ce produit croisé est assez simple étudier. Dans la suite nous nous intéressons au cas $\alpha = 0$ (le cas $\delta = 0$ se traite similairement). On a alors $\beta = \gamma = 1$ et on peut conjuguer f linéairement pour se ramener l'étude de

$$f : ([z], [w]) \mapsto ([w], [C(w)z_1 + D(w)z_0 : A(w)z_1 + B(w)z_0]),$$

o A, B, C, D sont des polynmes homogènes de degré δ en $w = (w_0, w_1)$.

Une application de la forme précédente est donc polynomiale dans $\mathbf{C}^2$, ssi $C \equiv D \equiv 0$, c'est-à-dire qu'on peut l'écrire sous la forme

$$f : (z, w) \in \mathbf{C}^2 \mapsto (w, A(w)z + B(w)) \in \mathbf{C}^2,$$

avec $A, B \in \mathbf{C}[w]$ et $A \not\equiv 0$. Lorsque A est un polynme constant, on dira que f est une application de Hénon.

5.2.1 Quelques rappels.

Soit X une surface complexe lisse compacte connexe et $f : X \to X$ une application rationnelle dominante. Rappelons que f est dite birationnelle si il existe des fermés analytiques stricts $V, W \subsetneq X$ t.q. $f : X \setminus V \to X \setminus W$ soit un biholomorphisme.

Si $f = f_+$ est birationnelle, on notera f_- son inverse. On vérifie les propositions suivantes (voir Section 4.2).

Proposition 5.2.1. *Soit $f_+ : X \to X$ une application birationnelle.*

- *f_+ ralise un biholomorphisme de $X \setminus \mathcal{C}(f_+)$ sur $X \setminus \mathcal{C}(f_-)$;*
- *$f_+(\mathcal{C}(f_+)) = I(f_-)$.*

Proposition 5.2.2. *Soit $f_+ : X \to X$ une application birationnelle. Notons f_+^*, f_-^* les actions respectives de f_+, f_- sur $H^{1,1}(X)$. Alors pour toutes formes ω_1, ω_2 lisses fermées de bidegré $(1,1)$ on a*

$$< f_+^*\omega_1, \omega_2 >=< \omega_1, f_-^*\omega_2 > .$$

En particulier, on a $\rho_1(f_+) = \rho_1(f_-)$, *et*

$$\lambda_1(f_+) = \lambda_1(f_-).$$

Dans toute la suite, on notera $\rho := \lambda_1(f_+) = \lambda_1(f_-)$.

Proposition 5.2.3. *Soit* $f_+ : X \to X$ *une application birationnelle. Les conditions suivantes sont quivalentes:*

i) f_+ *est algbriquement stable ;*

ii) $I(f_+^\infty) \cap I(f_-^\infty) = \emptyset$ *;*

iii) f_- *est algbriquement stable.*

Le rsultat suivant est une consquence simple du thorme de convergence du Chapitre 4. Celui-ci sera utilisé de manière cruciale dans la preuve du mélange de la mesure naturelle associée à f (voir Théorème 5.2.7).

Proposition 5.2.4. *Soit* $f_+ : X \to X$ *une application birationnelle de la classe* $(\mathcal{B})$ *du Chapitre 4. Soit* T^+ *un courant de Green associé à une forme positive fermée lisse vérifiant* $f_+^* T^+ = \rho T^+$.

Alors le courant de Green T^+ *est extrémal dans* $\mathcal{C}_1^+(X)$.

Démonstration. Soit $S \in \mathcal{C}_1^+(X)$ tel que $S \leq T^+$. On veut montrer que S est proportionnel à T^+. Considérons $S_j := \rho^j (f_+^j)^\bullet S$ l'extension triviale de $\rho^j (f_+|^j_{X \setminus \mathcal{C}(f_+^j)})^*(S)$ à travers $\mathcal{C}(f_+^j)$. Le courant T^+ vérifie $\rho^j (f_-^j)^* T^+ = T^+$ dans $X \setminus \mathcal{C}(f_-^j)$, on en déduit l'inégalité $S_j \leq T^+$ valable dans tout X puisque T^+ et S_j ne chargent pas $\mathcal{C}(f_-^j)$.

Soit à présent $S'_j = \rho^{-j} (f_+^j)^* S_j$. L'invariance de T^+ donne $S'_j \leq T^+$ donc S'_j ne charge pas $\mathcal{C}(f_+^j) \cup \mathcal{C}(f_-^j)$ (Théorème 2.4.6). Mais on a clairement $S'_j = S$ hors de $\mathcal{C}(f_+^j) \cup \mathcal{C}(f_-^j)$, comme S ne charge pas non plus les hypersurfaces, on en déduit que $S'_j = S$ dans X.

De $S_j \leq T^+$ on déduit que $\operatorname{Supp} S_j \cap \overline{V} = \emptyset$, où V désigne un voisinage assez petit de l'ensemble des points périodiques superattractifs de f. Comme la famille $\{S_j\}$ est de masse bornée, on peut en extraire une sous-suite convergeante S_{j_k} vers un courant S'. Le Théorème A assure alors que $(f^j)^*(S_{j_k})/\rho^j$ converge vers $c \cdot T^+$ où c ne dépend que de la classe de cohomologie de S'. On conclut alors $S = c \cdot T^+$. □

Remarque: En particulier, lorsque $X = \mathbf{P}^2$ ou $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ et que f_+ est algébriquement stable (et n'est pas un produit croisé) la proposition précédente s'applique. Le courant de Green (qui est alors uniquement déterminé) est un courant positif fermé extrémal. ♦

5.2.2 La classe $\mathcal{H}$.

On introduit le semi-groupe $\mathcal{H}$ suivant qui sera notre objet d'étude.

Définition 5.2.5. *Soit $\mathcal{H}$ le semi-groupe des applications birationnelles polynomiales $f : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ s'écrivant sous la forme $f = h_1 \circ \cdots \circ h_s$ avec*

$$h_i : (z, w) \mapsto (w, A_i(w)z + B_i(w)),$$

où $A_i, B_i \in \mathbf{C}[w]$, $A_i \not\equiv 0$, et $\delta_i := \max\{1 + \deg(A_i), \deg(B_i)\} \geq 2$.

Le théorème de Jung (voir théorème 2.6 de [FM89]) permet de montrer que tout automorphisme polynomial de $\mathbf{C}^2$ est conjugué par un automorphisme polynomial soit à une composée d'applications de Hénon, soit à une application élémentaire $(z, w) \mapsto (az + b, cw + B(z))$ avec $a, c \in \mathbf{C}^*$, $b \in \mathbf{C}$, et $B \in \mathbf{C}[z]$, soit à un automorphisme affine.

Question. Toute application birationnelle polynomiale de $\mathbf{C}^2$ est-elle conjuguée par un automorphisme polynomial de $\mathbf{C}^2$ l'une des applications suivantes ?

1. un élément de $\mathcal{H}$;
2. une application élémentaire de la forme $(z, w) \mapsto (az+b, A(z)w+B(z))$ avec $a \in \mathbf{C}^*$, $b \in \mathbf{C}$, $A, B \in \mathbf{C}[z]$, et $A \not\equiv 0$.
3. un automorphisme affine.

La proposition suivante indique que tout élément de $\mathcal{H}$ se compactifie de manière algébriquement stable soit dans $\mathbf{P}^2$, soit dans $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$.

Proposition 5.2.6. *Soit $f = h_1 \circ \cdots \circ h_s \in \mathcal{H}$ avec*

$$h_i : (z, w) \mapsto (w, A_i(w)z + B(w)),$$

où $A_i, B_i \in \mathbf{C}[w]$ et $A_i \not\equiv 0$, et $\delta_i := \max\{1 + \deg A_i, \deg B_i\} \geq 2$. Notons δ le degré total de f; ρ le rayon spectral de la matrice des degrés en (z, w) de f et (a, b) le vecteur propre associé, à coefficients réels positifs normalisés par $2ab = 1$.

1. *Si $\deg A_s \leq \deg B_s - 1$, f se compactifie en une application algébriquement stable de $\mathbf{P}^2$. L'hyperplan l'infini $\{t = 0\}$ est contracté par f sur le point $q = [0 : 1 : 0]$ qui est superattractif. Soit $\Omega_q \subset \mathbf{C}^2$ son bassin d'attraction.*

   Le courant positif invariant $T^+ := \lim_{j\to\infty} \delta^{-j}(f^j)^*\omega_{FS}$ admet pour potentiel dans $\mathbf{C}^2$ la fonction $g^+ := \lim_{j\to\infty} \delta^{-j} \log^+ \|f^j\|$. Celle-ci est psh, continue, et $\{g^+ > 0\} = \Omega_q$.

2. *Si $\deg A_s \geq \deg B_s$, f se compactifie en une application algébriquement stable de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. Les deux droites à l'infini $\{z_0 w_0 = 0\}$ sont contractées par f^2 sur le point $q = ([0 : 1], [0 : 1])$ qui est superattractif. Soit $\Omega_q \subset \mathbf{C}^2$ son bassin d'attraction.*

Le courant positif invariant $T^+ := \lim_{j\to\infty} \rho^{-j}(f^j)^*(a\omega_1 + b\omega_2)$ *admet pour potentiel dans* $\mathbf{C}^2$ *la fonction* $g^+ := \lim_{j\to\infty} \rho^{-j} \log^+ \|f^j\|$. *Celle-ci est psh, continue, et* $\{g^+ > 0\} = \Omega_q$.

Démonstration. Notons $f_s = (P_s, Q_s) = h_1 \circ \cdots \circ h_s$, nous allons démontrer par récurrence sur $s \geq 1$ que
1) si $\deg A_s < \deg B_s$, alors $\deg_w Q_s = \deg Q_s > \deg P_s = \deg_w P_s$;
2) si $\deg A_s \geq \deg B_s$, alors $\deg_z Q_s + \deg_w Q_s = \deg Q_s > \deg P_s = \deg_z P_s + \deg_w P_s$.

L'assertion est claire pour $s = 1$. Supposons la vérifiée au rang $s-1$ et écrivons les relations de récurrence

$$\begin{aligned} P_s(z,w) &= P_{s-1}(w, A_s(w)z + B_s(w)) \\ Q_s(z,w) &= Q_{s-1}(w, A_s(w)z + B_s(w)). \end{aligned}$$

Il suffit alors d'examiner les quatres cas qui se présentent, selon que f_{s-1} et h_s sont de "type $\mathbf{P}^2$" ou de "type $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$".

Les assertions concernant le comportement de f_s l'infini en résultent, celles concernant le courant de Green découlent du Théorème 3.4.3 . $\square$

5.2.3 Mesure mélangeante

Comme $f = f_+ \in \mathcal{H}$ est birationnelle, on peut également considérer T^- le courant invariant associé à son inverse. Le courant T^+ admet un potentiel continu hors des points de $I(f_+^\infty) = I(f_+^2)$ qui sont en nombre fini, on peut donc définir le produit $T^+ \wedge T^-$ (voir [De93]).

Notre théorème principal est le suivant.

Théorème 5.2.7. *Soit* $f \in \mathcal{H}$.

La mesure $\mu := T^+ \wedge T^- / \|T^+ \wedge T^-\|$ *est une mesure de probabilité dans* $\mathbf{C}^2$ *qui ne charge pas l'infini et vérifie* $f_+^*\mu = (f_+)_*\mu = \mu$.

La mesure μ *est mélangeante.*

Démonstration. Supposons que f_+ se compactifie de manière algébriquement stable dans $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ (le cas $\mathbf{P}^2$ est analogue).

Le courant T^+ admet un potentiel continu dans $\mathbf{C}^2$, comme de plus T^- ne charge pas les hypersurfaces, la mesure $\mu|_{\mathbf{C}^2}$ ne charge pas les hypersurfaces (voir [De93]). En particulier elle ne charge ni $\mathcal{C}(f_+)$ ni $\mathcal{C}(f_-)$, ce qui assure $f_+^*\mu|_{\mathbf{C}^2} = (f_+)_*\mu|_{\mathbf{C}^2} = \mu|_{\mathbf{C}^2}$.

Montrons présent que μ ne charge pas les points d'indétermination de f_+^2, ce qui assurera que $\mu|_{\mathbf{C}^2}$ est une mesure de probabilité puisque le support de T^+ ne rencontre l'infini qu'aux points de $I(f_+^\infty) = I(f_+^2)$. Soit $p \in I(f_+^\infty)$, on se place dans une carte locale avec $p = 0$ et on note G^+ un potentiel continu de T^+ dans $B_0 \setminus \{0\}$, o B_0 est une boule centrée en $p = 0$. Par la Proposition 3.4.4, on peut trouver une constante $c > 0$ t.q.

$$G^+(Z) \geq c \log \|Z\| + O(1).$$

En particulier, la fonction G^+ est une fonction psh semi-exhaustive dans B_0 (voir definition 4.1 p.137 [De93]), et $\exp(G^+)$ est continue dans B_0. On a

$$\mu\{p\} = \lim_{r \to -\infty} \int_{\{G^+ \leq r\}} T^- \wedge dd^c G^+.$$

Le second membre est par définition le nombre de Lelong $\nu(T^-, G^+)$ de T^- par rapport au poids G^+ (definition 4.2 p.137 [De93]). Notons que

$$\limsup_{Z \to 0} G^+(Z)/\log \|Z\| \leq c.$$

Le théorme de comparaison des nombres de Lelong généralisés de Demailly (First comparison theorem p.148 [De93]) donne alors $\nu(T^-, G^+) \leq c \cdot \nu(T^-, 0)$. Comme f_+ est algébriquement stable, on a $I(f_+^\infty) \cap I(f_-^\infty) = \emptyset$ (Proposition 5.2.3), d'o $\nu(T^-, 0) = 0$ (Théorème 2.4.6). Il s'ensuit que μ ne charge pas le point $p = 0$.

Nous en déduisons présent le mélange de μ en reprenant la démonstration proposée par Sibony dans le cas des automorphismes polynomiaux réguliers de $\mathbf{C}^k$ (Théorme 7.1 p.52 [Si99]). Si ψ et χ sont des fonctions test, il s'agit de montrer que

$$\int \psi(f_-^j) \chi d\mu \to \left(\int \psi d\mu \right) \left(\int \chi d\mu \right).$$

Puisque μ ne charge pas les points de $I(f_+^\infty)$, ni les droites à l'infini, on peut supposer que les supports de ψ et χ sont inclus dans $\mathbf{C}^2$. Enfin on ne perd rien supposer que $0 \leq \psi, \chi \leq 1$. Considérons $R_j := (f_-^j)^*(\psi T^-)/\rho^j$. La Proposition 5.2.8 qui suit montre que R_j converge vers $c_\psi \cdot T^-$ avec $c_\psi = \int \psi d\mu$ et $dR_j, dd^c R_j$ convergent vers 0 en masse. Il s'ensuit que $\psi(f_-^j) T^+ \wedge T^-$ converge vers $c_\psi \cdot T^+ \wedge T^-$. Soit en effet θ une fonction test support dans une boule de $\mathbf{C}^2$, on note G^+ un potentiel continu de T^+ dans cette boule. Alors

$$\begin{aligned} < \psi(f_-^j) T^- \wedge T^+, \theta > &= < \frac{1}{\rho^j} (f_-^j)^* (\psi T^-) \wedge T^+, \theta > = < dd^c (R_j \theta), G^+ > \\ &= < R_j \wedge dd^c \theta, G^+ > + < \theta dd^c R_j, G^+ > + 2 < dR_j \wedge d^c \theta, G^+ > . \end{aligned}$$

Le premier terme converge vers $< c_\psi \cdot T^- \wedge dd^c \theta, G^+ > = < c_\psi \cdot T^+ \wedge T^-, \theta >$ puisque G^+ est continue au voisinage du support de θ et les deux derniers convergent vers 0 puisque $\|dR_j\|$ et $\|dd^c R_j\|$ convergent vers 0. Ainsi

$$\int \psi(f_-^j) \chi d\mu = < \psi(f_-^j) T^+ \wedge T^-, \frac{\chi}{\|T^+ \wedge T^-\|} > \longrightarrow < \mu, \psi > < \mu, \chi >,$$

ce qui conclut la preuve. □

Proposition 5.2.8. *Soit $f \in \mathcal{H}$ et ψ une fonction test.*

La suite de courants

$$R_j := \frac{1}{\rho^j}(f_-^j)^*(\psi T^-) = (\psi \circ f_-^j)T^-$$

converge vers $c_\psi \cdot T^-$, o $c_\psi =< \mu, \psi >= \int \psi T^+ \wedge T^- / \|T^+ \wedge T^-\|$. De plus dR_j et $dd^c R_j$ convergent vers 0 en masse. Plus précisément, il existe une constante $C > 0$ t.q. pour toute 1-forme test θ et toute fonction lisse χ les estimations

$$\begin{aligned} \left| \int dR_j \wedge \theta \right| &\leq C\rho^{-j/2} \|\theta\|_{L^\infty}, \\ \left| \int \chi dd^c R_j \right| &\leq C\rho^{-j} \|\chi\|_{L^\infty}, \end{aligned}$$

sont satisfaites.

Remarque: La proposition précédente prouve que les coefficients de corrélations $c_j(\phi, \psi) := \int \psi \circ f_+^j \phi d\mu - \int \psi d\mu \int \phi d\mu$ décroissent exponentiellement. Ce phénomène est général pour tous les systèmes holomorphes étudiés jusqu'à présent. ♦

Démonstration. On ne perd rien supposer que $0 \leq \psi \leq 1$. La suite de courants positifs R_j est de masse uniformment borne et vrifie donc $R_j \leq T^-$. Comme R_j (resp. μ) ne charge pas l'hypersurface $\mathcal{C}(f_-^j)$ (resp. $\mathcal{C}(f_+^j)$), on a

$$\begin{aligned} < R_j, T^+ >= &\int_{\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \setminus \mathcal{C}(f_-^j)} \frac{1}{\rho^j}(f_-^j)^*(\psi T^-) \wedge T^+ \\ &= \int_{\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \setminus \mathcal{C}_{f^j}} \psi T^- \wedge \frac{1}{\rho^j}(f_+^j)^*(T^+) = \int \psi \cdot T^+ \wedge T^-. \end{aligned}$$

Nous allons montrer que dR_j converge vers 0 en masse, il s'ensuit que toute valeur d'adhrence S de la suite R_j est un courant positif ferm de bidegr $(1,1)$ sur $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. Mais $S \leq T^-$, donc S est proportionnel T^- (Proposition 5.2.4). La constante de proportionnalit c vrifie

$$c < T^+, T^- >= \lim_k < R_{j_k}, T^+ >= \int \psi T^+ \wedge T^-,$$

donc $c = c_\psi$ est indpendante de S, d'o R_j converge vers $c_\psi T^-$.

Soit θ une $(0,1)$ forme test. L'ingalit de Cauchy-Schwarz implique

$$\begin{aligned}
\left|\int \partial R_j \wedge \theta\right| &= \frac{1}{\rho^j}\left|\int \partial\psi \wedge T^- \wedge (f_+^j)^*\theta\right| \\
&\leq \frac{1}{\rho^j}\left|T^- \wedge \partial\psi \wedge \overline{\partial\psi}\right|^{1/2} \cdot \left|\int T^- \wedge (f_+^j)^*\theta \wedge \overline{(f_+^j)^*\theta}\right|^{1/2} \\
&= \frac{1}{\rho^{j/2}}\left|\int T^- \wedge \partial\psi \wedge \overline{\partial\psi}\right|^{1/2} \cdot \left|\int T^- \wedge \theta \wedge \overline{\theta}\right|^{1/2} \\
&\frac{1}{\rho^{j/2}}\left|\int T^- \wedge \partial\psi \wedge \overline{\partial\psi}\right|^{1/2} \cdot \|T^-\| \cdot \|\theta\|_{L^\infty},
\end{aligned}$$

les galits tant justifies par le fait qu'aucun des courants impliqus ne charge les hypersurfaces. Par suite $\|\partial R_j\|$ converge vers 0 et $\|dR_j\|$ galement puisque R_j est positif. Soit prsent χ une fonction test, on a

$$|< dd^c R_j, \chi >| = \frac{1}{\rho^j}\left|\int \chi \circ f^j dd^c\psi \wedge T^-\right| \leq \frac{C}{\rho^j}\|\chi\|_{L^\infty} \cdot \|\psi\|_{\mathcal{C}^2},$$

donc $\|dd^c R_j\|$ tend vers 0. □

5.2.4 Exemples

Nous nous intéressons ici au cas particulier $f(z,w) = (w, A(w)z)$ avec $\deg A \geq 1$). Considérons son extension méromorphe f dans $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. L'ensemble d'indétermination de f est

$$I(f_+) = \{([1:0],[0:1]); ([0:1],[1,\zeta]) \text{ o } A(\zeta) = 0\}$$

et on a

$$I(f_+^\infty) = I_{f_+^2} = I(f_+) \cup \{([0:1],[1:0])\}\,.$$

L'ensemble d'indétermination de l'inverse f_- est

$$I(f_-) = \{([0:1],[0:1])\,;\,([1:\zeta],[1:0]) \text{ o } A(\zeta) = 0\}\,.$$

L'ensemble $I(f_-^\infty)$ est constitué du point l'infini $q = ([0:1],[0:1])$ et de la réunion des orbites -sous l'action de f_+- des points $(\zeta, 0)$, o $\zeta \in A^{-1}(0)$. On obtient donc

$$I(f_-^\infty) = \left\{q\,; (\lambda^j\zeta, 0), (0, \lambda^{j+1}\zeta) \text{ avec } \zeta \in A^{-1}(0) \text{ et } j \geq 0\right\},$$

o on a posé $\lambda = A(0)$.

Lorsque $|\lambda| < 1$, les points de $I(f_+)$ sont envoyés par f_- sur le $2-$cycle $\{([1:0],[0:1]); ([0:1],[1:0])\}$ qui est attractif pour f_-. L'application f_+ est donc normale et le support de la mesure μ est compact dans $\mathbf{C}^2$.

Lorsque $|\lambda| = 1$, on a $E(f_+) \cap E(f_-) = \emptyset$. Notons que tout potentiel de T^- est discontinue sur les cercles $\{|z| = |\zeta|\} \times \{0\}$ et $\{0\} \times \{|w| = |\zeta|\}$ si λ est d'argument irrationnel.

Lorsque $|\lambda| > 1$, $E(f_+) \cap E(f_-)$ est non vide, constitué du 2-cycle $\{([0 : 1], [1 : 0]); ([1 : 0], [0 : 1])\}$ qui est semi-répulsif pour f_- (de valeurs propres 0 et λ). Nous pensons que le support de la mesure mélangeante μ n'est pas compact dans $\mathbf{C}^2$ lorsque $|\lambda| \geq 1$.

Appendix A

Complément de théorie du pluripotentiel

Complément de théorie du pluripotentiel

Nous avons construit au Chapitre 5 une mesure mélangeante μ pour les produits croisés polynomiaux de $\mathbf{C}^2$ sous la forme $\mu := dd^c(vT)$ où T est un courant positif fermé de bidegré $(1,1)$ et v est une fonction s.c.s. et localement bornée définie sur le support de T. Par construction, la fonction v est limite décroissante de fonctions psh globales ce qui garantit $dd^c(vT) \geq 0$. La mesure μ définit un courant dit pluripositif (voir [Si85]).

Nous allons établir pour une classe de courants de cette forme quelques rsultats analogues aux proprits classiques de la théorie du pluripotentiel initie par Bedford et Taylor [BT82]. Bien qu'il s'agisse d'une adaptation immdiate de la thorie telle qu'elle est prsente e.g. dans [De93] (voir aussi [FS95]), nous en donnons des dmonstrations pour la commodit du lecteur; nous nous restreignons toutefois au contexte qui nous intresse.

Dans cet appendice Ω désignera un ouvert pseudoconvexe $\mathbf{C}^2$ à bord lisse et $T \in \mathcal{C}_1^+(\Omega)$ un courant positif fermé de bidegré $(1,1)$ sur Ω. On munit Ω d'une fonction ψ lisse strictement psh d'exhaustion t.q. $\Omega = \{\psi < 0\}$, et on notera $|T| := T \wedge dd^c\psi$ la mesure trace du courant T.

Définition A.0.9. *Une fonction v s.c.s définie sur le support de T est dite T-psh si la condition suivante est satisfaite. Il existe une suite $\{v_j\}_{j\geq 0}$ de fonctions psh dans Ω t.q. la suite $v_j|_{\operatorname{Supp} T}$ est décroissante et $v_j|_{\operatorname{Supp} T} \to v$ simplement.*

Lemme A.0.10. *Soit v une fonction T-psh localement bornée. Alors $v \in L^1(|T|)$ et on peut donc construire le courant $dd^c(vT)$. Celui-ci définit une mesure positive dans Ω.*

Démonstration. Quitte à régulariser les fonctions psh v_j on peut supposer que $v_j \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Pour tout $j \geq 0$, on a $v_j \in L^1(|T|)$. Par convergence monotone on en déduit $v \in L^1(|T|)$. De même $v_j \searrow v$ donc on a $dd^c(v_jT) \to dd^c(vT)$ au sens des mesures. Comme $v_j \in PSH(\Omega)$ on a $dd^c(v_jT) \geq 0$. Il s'ensuit $dd^c(vT) \geq 0$. □

On va démontrer un analogue des inégalités de Chern-Levine-Nirenberg pour les fonctions T-psh.

Proposition A.0.11. *Soit $\varphi \in PSH(\Omega)$ et v une fonction T-psh localement bornée. Pour tout compact $F \subset\subset \Omega$, il existe $C > 0$ indpendante de T et v telle que*

$$\|\varphi dd^c v \wedge T\|_F \leq C \int_\Omega \varphi |T| \cdot \|v\|_{L^\infty(\Omega \cap \operatorname{Supp} T)}.$$

En particulier $dd^c v \wedge T$ ne charge pas les ensembles pluripolaires si T ne les charge pas (e.g. lorsque $T = dd^c u$ et u est localement borne).

Démonstration. Proposition A.0.11

Pour des raisons techniques on est amen travailler dans $\mathbf{C}^3$; on note $\tilde{T}, \tilde{v}, \tilde{\varphi}$ les courants et fonctions obtenus partir de T, v, φ en ajoutant une coordonne indpendante, et on pose $\tilde{F} := F \times \Delta(1)$ et $\tilde{\Omega} = \Omega \times \Delta(2)$. On notera abusivement ψ une fonction lisse psh d'exhaustion de $\tilde{\Omega}$. On ne perd rien à supposer que $\tilde{\varphi} \leq 0$ et $-1 \leq \psi \leq 0$ sur $\widetilde{\Omega}$. Pour $\alpha > 0$ on notera $\widetilde{\Omega}_\alpha := \{\psi < -\alpha\} \subset\subset \widetilde{\Omega}$.

Fixons $\varepsilon > 0$ assez petit. Quitte à retrancher $\|v\|_{L^\infty(\Omega \cap \operatorname{Supp} T)} + \varepsilon$ à $\widetilde{v}$ on peut toujours supposer que $v < -\varepsilon$ sur $\operatorname{Supp} T$.

Fixons $\delta > 0$ petit t.q. $\widetilde{F} \subset\subset \widetilde{\Omega}_\delta$ et posons $A := \delta^{-1}\|v\|_{L^\infty(\Omega \cap \operatorname{Supp} T)}$. Définissons la fonction psh dans $\widetilde{\Omega}$

$$V := \max\{\widetilde{v}, A\psi\}.$$

Notons que

- sur $(\widetilde{\Omega} \setminus \widetilde{\Omega}_{\varepsilon/A}) \cap \operatorname{Supp} \widetilde{T}$, on a $V = A\psi$;
- sur $\widetilde{\Omega}_\delta \cap \operatorname{Supp} \widetilde{T}$, on a $V = \widetilde{v}$.

On fixe de plus une fonction lisse χ à support compact dans $\widetilde{\Omega}$ t.q. $\chi \equiv \psi + 1 \geq 0$ dans $\widetilde{\Omega}_{\varepsilon/A}$.

On a alors la suite d'inégalités.

$$\begin{aligned}
0 \leq \int_F -\varphi dd^c v \wedge T &\leq \int_{\widetilde{\Omega}_\delta} -\widetilde{\varphi} dd^c \widetilde{v} \wedge \widetilde{T} \wedge dd^c \psi \\
&= \int_{\widetilde{\Omega}_\delta} -\widetilde{\varphi} dd^c V \wedge \widetilde{T} \wedge dd^c \psi \leq \int_{\widetilde{\Omega}_{\varepsilon/A}} -\widetilde{\varphi} dd^c V \wedge \widetilde{T} \wedge dd^c \psi \\
&= \int_{\widetilde{\Omega}_{\varepsilon/A}} -\widetilde{\varphi} dd^c V \wedge \widetilde{T} \wedge dd^c \chi = \int_{\widetilde{\Omega}} + \int_{\widetilde{\Omega} \setminus \widetilde{\Omega}_{\varepsilon/A}} \\
&= \int_{\widetilde{\Omega}} -\chi dd^c \widetilde{\varphi} \wedge dd^c V \wedge \widetilde{T} + A \int_{\widetilde{\Omega} \setminus \widetilde{\Omega}_{\varepsilon/A}} \widetilde{\varphi} dd^c \psi \wedge \widetilde{T} \wedge dd^c \chi \\
&\leq 0 + \frac{\|v\|_{L^\infty(\operatorname{Supp} T \cap \Omega)}}{\delta} \times \|\chi\|_{\mathcal{C}^2(\widetilde{\Omega})} \left| \int_\Omega \varphi T \wedge (dd^c \psi)^2 \right|
\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve.

Lorsque $T = dd^c u$ avec u localement borne, les ingalits standard de Chern-Levine-Nirenberg assurent que $dd^c u$ ne charge pas les ensembles pluripolaires (cf [De93]). □

Proposition A.0.12. *Soit (u_j) une suite de fonctions psh dans Ω qui con verge vers u dans $L^1_{loc}(\Omega)$. Soit (v_j) une suite de fonctions continues dans Ω qui dcrot vers une fonction v, continue dans Ω. Alors*

$$v_j dd^c u_j \to v dd^c u \text{ au sens des courants,}$$

et donc $dd^c u_j \wedge dd^c v_j \to dd^c u \wedge dd^c v$.

Démonstration.

Quitte retrancher une constante, on peut supposer que $v_j, v \leq 0$. Soit θ une forme test positive de bidegr $(1,1)$ dans Ω, il suffit de montrer que $\int_\Omega v_j dd^c u_j \wedge \theta \to \int_\Omega v dd^c u \wedge \theta$. La suite de courants $v_j dd^c u_j$ est de masse localement uniformment borne dans Ω, soit $R = \lim v_{j_k} dd^c u_{j_k}$ une valeur d'adhrence. On a

$$0 \geq \int_\Omega v_{j_k} dd^c u_{j_k} \wedge \theta \geq \int_\Omega v dd^c u_{j_k} \wedge \theta.$$

Or $dd^c u_{j_k} \wedge \theta$ tend vers $dd^c u \wedge \theta$ au sens des mesures de Radon et v est continue, donc le membre de droite de l'ingalit tend vers $\int_\Omega v dd^c u \wedge \theta$. Ainsi $R \geq v dd^c u$. Rciproquement, on a

$$\int_\Omega v_{j_k} dd^c u_{j_k} \wedge \theta \leq \int_\Omega v_p dd^c u_{j_k} \wedge \theta,$$

pour tout $p \leq j_k$ fix. Comme v_p est continue, le membre de droite tend vers $\int_\Omega v_p dd^c u \wedge \theta$; le thorme de la convergence monotone assure que ce dernier tend vers $\int_\Omega v dd^c u \wedge \theta$ lorsque $p \to +\infty$. On en dduit $R \leq v dd^c u$. $\square$

Appendix B

Pull-back of Lelong number of positive closed $(1, 1)$ currents.

Introduction

In this appendix, we study the behaviour of Lelong number of positive closed $(1,1)$ current under pull-back of a (non-finite) holomorphic map f. We obtain an estimate which is used in the proof of Theorem 2.4.6 in a crucial way. We also need for this proof a precise control of the Lelong number when f is a finite morphsim in terms of its ramification degree. We give a short proof of this well-known fact.

B.1 Statement of the main result

Fix $f : (\mathbf{C}^m, 0) \to (\mathbf{C}^n, 0)$ a holomorphic germ, and T a positive closed current of bidegree $(1,1)$ defined in a neighborhood of the origin in $(\mathbf{C}^n, 0)$. Let $u \in$ PSH$(\mathbf{C}^n, 0)$ be a plurisubharmonic (psh) potential for T such that $T = dd^c u$. One can set $f^*T := dd^c(u \circ f)$, as soon as the psh function $u \circ f$ is not identically $-\infty$.

Definition B.1.1. *Lelong number (see [LG86])*

Let $u \in$ PSH$(\mathbf{C}^n, 0)$. The function $r \to \sup_{|z|=r} u(z)$ is an increasing convex function of $\log r$. We can hence define the Lelong number of u at 0 by setting

$$\nu(u,0) := \max\{c \geq 0, \text{ such that } u(z) \leq c \log|z| + O(1)\}$$

which is a finite non-negative real number. For a positive closed $(1,1)$ current T in $(\mathbf{C}^n, 0)$, the Lelong number of T at 0 is $\nu(T,0) := \nu(u,0)$ for any psh potential $T = dd^c u$.

For a given positive closed current T of bidegree $(1,1)$ so that f^*T exists, we are interested in estimating the Lelong number of the pull-back $\nu(f^*T, 0)$ in terms of $\nu(T,0)$. Our theorem can be stated as follows.

Theorem B.1.2.

Let $f : (\mathbf{C}^m, 0) \to (\mathbf{C}^n, 0)$ be a holomorphic map. Then the following conditions are equivalent.

(1) The map f has generic (maximal) rank equal to n;

(2) For any positive closed current T of bidegree $(1,1)$, f^*T is well defined and the operator f^* is continuous for the weak topology of currents;

(3) The range of f is not pluripolar;

(4) For any positive closed current T of bidegree $(1,1)$, f^*T is well defined, and there exists a constant $C > 0$ (depending only on f) such that one has the inequality

$$\nu(T,0) \leq \nu(f^*T, 0) \leq C \times \nu(T,0)$$

between Lelong numbers of T and f^*T at the origin.

An immediate corollary is the following result which is used throughout the proof of Theorem 2.4.6 (see Section 2.1 for precise definitions) .

Corollary B.1.3. *Let X be a connected complex algebraic compact manifold and $f : X \to X$ a rational dominant map. Let T be a closed positive* $(1,1)$ *current. Then for all point $p \in X$ we have*

$$\nu(p, f^*T) > 0 \Rightarrow \nu(f(p), T) > 0 \text{ or } p \in I(f).$$

Remark : The proof gives an estimate for the constant C above. Assume $n = m$, and (1) is satisfied. Then (4) holds with $C = 1 + 2(\mu(Jf, 0) + n - 1)$, where $\mu(Jf, 0)$ is the order of vanishing of the Jacobian determinant of f at 0. ♦

Using this remark, we also have a semi local version of Theorem B.1.2.

Corollary B.1.4.

Let X and Y be two connected complex manifolds, and $f : X \to Y$ be a holomorphic map whose generic rank is maximal equal to $\dim(Y)$*. Then for any compact set $K \subset X$, there exists a constant $C_K > 0$ such that for all positive closed current T of bidegree* $(1,1)$*, and all $p \in K$, one has the inequality*

$$\nu(T, p) \leq \nu(f^*T, p) \leq C_K \times \nu(T, f(p))$$

between Lelong numbers.

Before giving a proof of this theorem and of its corollary, we will make some remarks about the stated results.

The main result of Theorem B.1.2 is contained in the implication (1) ⇒ (4). All the others are either obvious, or were known before.

The second assertion is contained in [M96]. We also refer the reader to this article for more general problems concerning pull-back of positive closed currents by holomorphic mappings.

The upper estimate given in (4) was already known in several different cases (the other inequality is easy to prove) especially in the case of a finite morphism. As we use it in the proof of Theorem 2.4.6, we give a short proof of this fact.

Proposition B.1.5. *(see [De93])*

Let f be a finite holomorphic germ $(\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^n, 0)$ *of local degree* $e(0, f)$ *and T a positive closed current (of any bidegree). Then*

$$\nu(f^*T, 0) \leq e(0, f) \times \nu(T, 0) \ .$$

Proof. Let us assume that f is a finite morphism of degree $l = e(0, f)$. In particular, f is open. Define $\mathcal{I}$ to be the primary ideal of the ring $\mathcal{O}_0^n$ of holomorphic germs at 0 generated by the n components of f. We have

$l = \dim_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_0^n/\mathcal{I}$ (see [S65]). For $i = 1, \cdot, n$, it implies that the sequence of vectors $z_i, z_i^2, \cdots, z_i^l$ can not be independent. Hence there exists a linear combination of such vectors that lies in $\mathcal{I}$: $a_{k_i} z_i^{k_i} + \cdots + a_l z_i^l \in \mathcal{I}$, with $k_i \leq l$ and $a_{k_i} \neq 0$. It implies for $i = 1, \cdot, n$ the existence of a constant $C > 0$ such that $|z_i^{k_i}| \leq C|f|$. In particular we get, for Z small enough

$$|f(Z)| \geq C|Z|^l \ .$$

We then have the following inequalities:

$$\begin{aligned} u(f(Z)) &\leq \nu(f^*T, 0) \log |Z| + O(1) \\ &\leq l^{-1} \times \nu(f^*T, 0) \ \log |f(Z)| + O(1). \end{aligned}$$

And this implies

$$l \times \nu(T, 0) \geq \nu(f^*T, 0) \ .$$

□

C. Kiselman also proved (1) ⇒ (4) for monomial morphisms.

Proposition B.1.6. *(see [Ki87])*
Let $M = [a_{ij}] \in M(n, \mathbf{N})$ be an $n \times n$ matrix with non-negative integer coefficients. We assume that $\det M \neq 0$. *If*

$$f(z) = (\prod_{j=1}^n z_j^{a_{1j}}, \cdots, \prod_{j=1}^n z_j^{a_{nj}})$$

then

$$\nu(f^*T, 0) \leq \max_i \{\sum_j a_{ij}\} \times \nu(T, 0)$$

for any positive closed $(1,1)$ *current* T.

Diller in [Di98] also proved the main estimate (4) for birational mappings of $\mathbf{P}^2$.

A warning concerning the implication (1) ⇒ (3). When f does not have generic maximal rank, it is not true in general that the image of f is contained in a countable union of hypersurfaces. It is contained in a countable union of polydisks of dimension strictly less than n.

Example B.1.7. *(see [H73] 4.2)*
Define $f : (\mathbf{C}^3, 0) \to (\mathbf{C}^3, 0)$ by $f(z, w, t) = (z, ze^w, ze^{e^w})$. Note that f is independent of the last variable t. Then the set $f(\mathbf{C}^3, 0)$ is pluripolar, but it is not included in a countable union of hypersurfaces.

Proof. We give a short proof of these facts.

We begin proving that $f(\mathbf{C}^3, 0)$ is pluripolar. Decompose the mapping $f = \pi \circ g \circ p$ with $p(z, w, t) = (z, w)$, $g(x, y) = (y, e^x, e^{e^x})$, and $\pi(z, w, t) = (z, zw, zt)$. The range of g is included in the hypersurface $g(\mathbf{C}^2, 0) \subset \{e^w = t\}$, hence is pluripolar. The morphism π is an isomorphism outside $\{z = 0\}$. As countable union of pluripolar sets remains pluripolar, we see that the image

$$f(\mathbf{C}^3, 0) = \pi \circ g \circ p(\mathbf{C}^3, 0) = \pi(g(\mathbf{C}^2, 0)) = \{0\} \bigcup_{k \geq 0} \pi(g(\mathbf{C}^2, 0) \cap \{|z| > 1/k\})$$

is also pluripolar.

For the second fact, we proceed as follows. Assume first that $f(\mathbf{C}^3, 0)$ is included in an hypersurface defined by a non identically zero holomorphic map h. We thus have the identity $h(z, ze^w, ze^{e^w}) = 0$ for every z, w in a neighborhood of $0 \in \mathbf{C}$. Expand h in power series $h = \sum_{k \geq 0} h_k$ where h_k is a homogeneous polynomial of degree k in three variables. Take an index $k_0 \in \mathbf{N}$ such that $h_{k_0} \not\equiv 0$. Then $h_{k_0}(z, ze^w, ze^{e^w}) = z^{k_0} h_{k_0}(1, e^w, e^{e^w}) \equiv 0$. This would contradict the fact that the three functions $(1, e^w, e^{e^w})$ are algebraically independent.

Now assume $f(\mathbf{C}^3, 0) \subset \bigcup_{n \in \mathbf{N}} H_n$ is included in a countable union of hypersurfaces. For each $n \in \mathbf{N}$, the complex space $f^{-1} H_n$ is also an hypersurface by what preceeds. But we have $(\mathbf{C}^3, 0) \subset f^{-1} f(\mathbf{C}^3, 0) \subset \bigcup_{n \in \mathbf{N}} f^{-1} H_n$, which can not contain any open subset of $(\mathbf{C}^3, 0)$. $\square$

Note: the main theorem has been proved independently by C.Kiselman (see [Ki99]) with a different method. His proof relies on volume estimates of sublevel sets of psh functions.

B.2 Proof of the main theorem

We shall first prove the equivalence between the first three assertions. We conclude by proving (4) $\Rightarrow$ (3), and (1) $\Rightarrow$ (4).

(1) $\Rightarrow$ (2): we assume that f has generic maximal rank equal to n. If $u \in \mathrm{PSH}(\mathbf{C}^n, 0)$ is non degenerate, the psh function $u \circ f$ can not be identically $-\infty$, as the range of f contains some open ball. Hence f^*T is well-defined for any closed positive current T of bidegree $(1, 1)$. For a sequence of positive closed $(1, 1)$ current $T_j \to T$ converging weakly towards T, one can find a sequence u_j of psh potential of T_j converging in L^1_{loc} to u a psh potential for T. It remains to check that $u_j \circ f \to u \circ f$ in L^1_{loc}.

As f has maximal generic rank, $u_j \circ f \to u \circ f$ almost everywhere. Now one can extract a subsequence $u_{j_k} \circ f$ converging in L^1_{loc} to a psh function (see [Ho83] p.94). As any such limit should be equal to $u \circ f$, we infer $u_j \circ f \to u \circ f$ in L^1_{loc}, thus $f^*T_j \to f^*T$ in the weak topology.

(2) $\Rightarrow$ (3): if the range $f(\mathbf{C}^n, 0)$ is pluripolar, one can find a non-degenerate function $u \in \mathrm{PSH}(\mathbf{C}^n, 0)$ such that $u \circ f \equiv -\infty$. In that case, if $T := dd^c u$, f^*T is not defined.

We also give an example of a sequence of positive closed currents of bidegree $(1,1)$ so that $T_n \to T$, f^*T_n and f^*T are all well-defined, but for which the sequence f^*T_n fails to converge to f^*T. For this, work in the unit ball, and take $f(z,w) = (0,w)$, $T_n = dd^c u_n$, with $u_n(z,w) = \max\{n^{-1}\log|z|, -2+|w|^2\}$. Then $T_n \to 0$, but $f^*T_n = dd^c|w|^2$.

(3) $\Rightarrow$ (1): we only sketch the proof. We proceed by induction on m. Assume $f : (\mathbf{C}^m, 0) \to (\mathbf{C}^n, 0)$ is a holomorphic germ such that $\mathrm{rk} Df_z$ the rank of Df_z is smaller than $n-1$ for any $z \in (\mathbf{C}^m, 0)$. Set $N := \max\{\mathrm{rk} Df_z\} \leq n-1$, and define for each $k \leq N$,

$$V_k := \{z \in (\mathbf{C}^m, 0),\ \mathrm{rk} Df_z \leq k\}\ .$$

By assumption, V_N contains an open neighborhood of the origin. Define $W := V_N - V_{N-1}$.

The set V_k is the set where all minors of Df_z of size $k+1$ have zero determinant, and hence defines a closed analytic subspace of $(\mathbf{C}^m, 0)$. Hence W is a Zariski open set of V_p. Now, on W the rank of the differential of f is constant equal to p. We can thus apply locally the constant rank theorem. Take any countable covering $\{U_i\}_{i\in I}$ of W by open subsets such that for each $i \in I$, the set $f(U_i)$ is a (non-closed) analytic subset of $(\mathbf{C}^n, 0)$ of dimension $N < n$. For any $i \in I$, $f(U_i)$ is pluripolar. A countable union of pluripolar sets remains pluripolar, hence $f(W) = \bigcup_{i\in I} f(U_i)$ is pluripolar. As $\dim(V_{N-1}) < m$, we can apply the induction hypothesis to conclude that

$$f(\mathbf{C}^m, 0) = f(W) \cup f(V_{N-1})$$

is pluripolar too.

The implication (4) $\Rightarrow$ (3) follows from (2) $\Rightarrow$ (3). In fact, we even have that when the range of f is pluripolar, the supremum of $(\nu(T,0))^{-1}\nu(f^*T,0)$ over all positive closed current T of bidegree $(1,1)$ for which f^*T is well-defined, is not finite.

Take $u \in \mathrm{PSH}(\mathbf{C}^n, 0)$ non-degenerate such that $u \circ f \equiv -\infty$. For any $\alpha > 0$, define $v_\alpha(z) := \max\{\alpha \log|z|, u(z) + \log|z|\}$. Then

$$\nu(f^*v_\alpha, 0) = \alpha \times \nu(\log|f|, 0)\ ,$$

and

$$\nu(v_\alpha, 0) = \min\{\alpha,\ \nu(u,0)+1\}\ .$$

Hence for $\alpha \geq \nu(u,0)+1$,

$$(\nu(dd^c v_\alpha, 0))^{-1}\nu(f^*dd^c v_\alpha, 0) = C\alpha$$

with $C = (\nu(u,0)+1)^{-1}\nu(\log|f|, 0)$.

(1) $\Rightarrow$ (4): let us first prove the following general result.

Lemma B.2.1.
If $f : (\mathbf{C}^m, 0) \to (\mathbf{C}^n, 0)$ is an arbitrary holomorphic germ, and T is a positive closed current of bidegree $(1,1)$ so that f^*T is well-defined, one has the inequality

$$\nu(f^*T, 0) \geq \nu(T, 0)$$

between Lelong numbers.

Proof. We fix $u \in \mathrm{PSH}(\mathbf{C}^n, 0)$ a local potential for T. We always have $|f(Z)| \leq A|Z|$ for some constant, so that the estimate

$$u(Z) \leq \nu(T, 0) \log |Z| + O(1)$$

implies

$$u(f(Z)) \leq \nu(T, 0) \log |Z| + O(1)$$

which gives us the stated inequality. □

We now proceed with the proof of the upper bound for $\nu(f^*T, 0)$ given in (4). As before, u will denote a local potential for T.

Let us show how to reduce the proof of this estimate to the equidimensional case i.e. when $n = m$.

We assume the estimate has already been proved for $n = m$. By assumption, the rank of the Jacobian derivative of f is generically equal to n. We can therefore find a closed embedding $i : L = (\mathbf{C}^n, 0) \hookrightarrow (\mathbf{C}^m, 0)$ of a piece of n-plane into $(\mathbf{C}^m, 0)$ such that the rank of the Jacobian derivative of the restriction $\overline{f} := f \circ i$ to $(\mathbf{C}^n, 0)$ is also generically equal to n. We can now apply the estimate to $\overline{f}$ and use Lemma B.2.1. We get

$$\begin{aligned} \nu(f^*T, 0) &\leq \nu(i^* \circ f^*T, 0) \\ &\leq \nu(\overline{f}^* T, 0) \\ &\leq C_{\overline{f}} \times \nu(T, 0) \ . \end{aligned}$$

Let us deal now with the equidimensional case. The assumption on f can be rewritten as its Jacobian derivative does not vanish identically on a neighborhood of the origin.

Take a line L passing through 0 intersecting $\mathcal{C}(f)$ the critical set of f only at 0, and not tangent to any irreducible component of $\mathcal{C}(f)$. We can assume it is given in coordinates $z = (z_1, \cdots, z_n)$ by $L := \{z_2 = \cdots = z_n = 0\}$. We can find an open cone around this line L

$$\mathcal{C} := \{z \in U,\ \mathrm{dist}(z, L) < \varepsilon |z|\}$$

such that $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}(f) = \emptyset$.

Instead of working in this cone, it is more convenient to work on an open set (see the figure below). We thus consider the blow-up π of the origin 0, and replace the germ f by the composition $g := f \circ \pi$. In coordinates, $\pi(z) = (z_1, z_1 z_2, \cdots, z_1 z_n)$.

We look at g in the open set $\overline{\pi^{-1}\{\mathcal{C}\}}$. Define $E = \pi^{-1}\{0\} = \{z_1 = 0\}$. Let us point out some special properties of the map g.

1. $\mathcal{C}(g) = E$.
2. $g^{-1}\{0\} = E$.

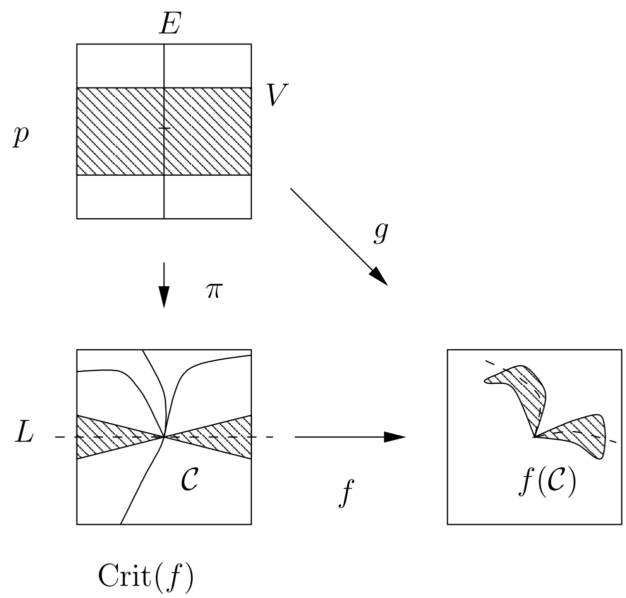

Figure B.1: Blowing up the map f.

We can thus write the Jacobian determinant of g under the form

$$Jg(z) = z_1^N \psi(z)$$

for some integer $N \in \mathbf{N}$, and some holomorphic function ψ which does not vanish at any point of E. In a sufficiently small neighborhood V of the origin, we can find a constant $C > 0$ such that $\forall z \in V$

$$|Jg(z)| \geq C|z_1|^N \ . \tag{B.1}$$

For the proof of Remark B.1 and Corollary B.1.4, we will need the following estimation on the integer N. It gives precisely a control on the constant C of assertion (4) of the theorem.

Lemma B.2.2. *The integer N introduced above can be chosen as*

$$N = \mu(Jf, 0) + n - 1,$$

where $\mu(Jf, 0)$ is the order of vanishing of the holomorphic function Jf at the point 0.

Proof.

Set $N_0 := \mu(Jf, 0)$. We first check that for a (generic) suitable choice of line L, one has in a small cone $\mathcal{C}$ around L as above

$$|Jf(z)| \geq C|z|^{N_0}. \tag{B.2}$$

Expand the holomorphic jacobian determinant Jf in power series $Jf = \sum_{k \geq N_0} h_k$ where h_k is a homogeneous polynomial of degree k and h_{N_0} is not identically zero. Let $\mathbf{P}^{n-1}$ be the set of complex lines in $\mathbf{C}^n$ passing through the origin, and for a point $z \in \mathbf{C}^n$ set $L_z = \mathbf{C}z$. By homogeneity of h_{N_0}, one can define the continuous function $H : \mathbf{P}^{n-1} \to \mathbf{R}_+$ by $H(L_z) = |z|^{-N_0}|h_{N_0}(z)|$. Take a generic line L such that $H(L) > 0$. Then for all lines L' close to L, one has $H(L') \geq H(L)/2$. Hence in a small cone $\mathcal{C}$ around L, one has $H(L_z) \geq H(L)/2$.

We infer $\forall z \in \mathcal{C}$,

$$\begin{aligned}
|f(z)| &\geq |h_{N_0}(z) - \sum_{k \geq N_0+1} h_k(z)| \\
&\geq |h_{N_0}(z)| - |\sum_{k \geq N_0+1} h_k(z)| \\
&\geq 2^{-1}H(L)|z|^{N_0} - C'|z|^{N_0+1} \geq C|z|^{N_0},
\end{aligned}$$

for some constants $C, C' > 0$.

Now a direct computation yields $\det(D\pi_z) = z_1^{n-1}$. Therefore, if we have chosen a line L so that equation B.2 applies, we get $\forall z \in \mathcal{C}$,

$$\begin{aligned}
|\det(Dg_z)| &= |\det(D\pi_z) \times \det(Df_{\pi(z)})| \\
&\geq |z_1|^{n-1} \times C|z_1|^{\mu(Jf,0)},
\end{aligned}$$

which concludes the proof of Lemma B.2.2. □

In the sequel, we will assume that V is a small ball in $\mathbf{C}^n$ endowed with the usual euclidean metric. If $r > 0$ and K is a compact set, we set

$$B(K, r) := \{z,\ \mathrm{dist}(z, K) < r\}\ .$$

The key lemma is:

Lemma B.2.3.

There exists two integers $N_0, N_1 \in \mathbf{N}^*$, and two constants $C_0, C_1 > 0$ such that $\forall z \in V$,

$$g(B(z, C_0|z_1|^{N_0})) \supset B\left(g(z), C_1|z_1|^{N_1}\right)\ .$$

Moreover, we can choose $N_0 = N + 1$, and $N_1 = 2N + 1$ (with the above notations).

Proof.

The idea is to approximate the range of $g(B(z,r))$ by $Dg_z(B(z,r))$ and estimate the size of the latter.

We have $\forall z \in V$, $|Jg(z)| \geq C|z_1|^N$. In V, all eigenvalues of Dg_z are uniformly bounded by some constant $D > 0$. Therefore $\forall z \in V - E$,

$$|Dg_z^{-1}|^{-1} \geq \inf\{|\lambda|,\ \lambda \in \mathrm{Spec}(Dg_z)\} \geq \frac{C}{D^{n-1}}|z_1|^N \ .$$

And $\forall z \in V$, $\forall r > 0$,

$$Dg_z(B(z,r)) \supset B(g(z), C'|z_1|^N r) \ ,$$

for some constant $C' > 0$. Now by Taylor's formula, there exists another constant $C'' > 0$ such that $\forall z, w \in V$,

$$|g(w) - g(z) - Dg_z.(w-z)| \leq C''|w-z|^2 \ .$$

If we choose $M > N$ and take $r = |z_1|^M$, we infer for z sufficiently small

$$g(B(z, |z_1|^M)) \supset B(g(z), C'|z_1|^{N+M} - C''|z_1|^{2M}) \ ,$$

which gives the desired result with $N_1 = N + M$. □

To conclude, we follow Diller ([Di98]). Define $\Delta_r := L \cap \{|z| \leq r\}$. We first apply Lemma B.2.3 to each point of the set $\partial\Delta_r$. We obtain

$$g\left(B(\partial\Delta_r, C_0 r^{N_0})\right) \supset B\left(\partial g(\Delta_r), C_1 r^{N_1}\right). \tag{B.3}$$

We consider now translated of $g(\Delta_r)$ by vectors z of norm $|z| < C_1 r^{N_1}$. The estimate B.3 tells us that $\partial(z + g(\Delta_r))$ is still included in the range of g. We have more precisely $\forall |z| \leq C_1 r^{N_1}$,

1. $z \in z + g(\Delta_r)$,
2. $\partial(z + g(\Delta_r)) \subset g\left(B(\partial\Delta_r, C_0 r^{N_0})\right)$.

We are now in position to prove the desired inequality. We start with

$$u(g(z)) \leq \nu(g^* u, 0) \log|z| + D$$

for some constant $D \in \mathbf{R}$. We want to prove an analog estimate for u. Fix $z \in V$ and $r > 0$ such that $|z| < C_1 r^{N_1}$. Then the maximum principle applied to u on the analytic disk $z + g(\Delta_r)$ yields

$$\begin{aligned}
u(z) &\leq \max_{z+g(\Delta_r)} u \leq \max_{\partial(z+g(\Delta_r))} u \\
&\leq \max_{g(B(\partial\Delta_r, C_0 r^{N_0}))} u \\
&\leq \max_{w \in B(\partial\Delta_r, C_0 r^{N_0}))} u(g(w)) \\
&\leq \max_{w \in B(\partial\Delta_r, C_0 r^{N_0}))} \nu(g^* u, 0) \log|w| + D \\
&\leq \nu(g^* u, 0) \log r + D'
\end{aligned}$$

for $D' := D + \nu(g^*u, 0)\log(3/2)$ (by possibly reducing C_0 we can assume that $C_0 r^{N_0-1} \leq 1/2$). As this is true for any r satisfying $|z| \leq C_1 r^{N_1}$, we obtain

$$u(z) \leq \frac{1}{N_1}\nu(g^*u, 0)\log|z| + D'' \ .$$

Thus $\nu(u, 0) \geq N_1^{-1}\nu(g^*u, 0)$. To conclude the proof we use the general inequality in Lemma B.2.1

$$\nu(u, 0) \geq \frac{1}{N_1}\nu(g^*u, 0) \geq \frac{1}{N_1}\nu((f \circ \pi)^*u, 0) \geq \frac{1}{N_1}\nu(f^*u, 0) \ .$$

The proof combined with Lemmas B.2.2 and B.2.3 gives more precisely (see Remark B.1):

Lemma B.2.4. *If $f : (\mathbf{C}^n, z) \to (\mathbf{C}^n, f(z))$ is a germ of holomorphic map of maximal generic rank, then for any positive closed current T of bidegree $(1,1)$, one has the inequality*

$$\nu(f^*T, z) \leq (2(n - 1 + \mu(Jf, 0)) + 1) \times \nu(T, f(z))$$

between Lelong numbers.

Proof of Corollary B.1.4.

First, we localize the problem and assume that $X = B^m(0,1)$, $Y = B^n(0,1)$ are unit balls respectively in $\mathbf{C}^m$ and $\mathbf{C}^n$. As before, it is moreover sufficient to prove it in the equidimensional case i.e. $X = Y = B^n(0,1)$.

As f has maximal generic rank, we can apply Lemma B.2.4 at each point $z \in K$. Now on the compact set K, the function $z \to \mu(Jf, z)$ is upper semi continuous, hence bounded above by a constant C_K. This yields Corollary B.1.4. $\square$

Appendix C

Proof of the classification of contracting rigid germs.

Introduction

We present the proof of the classification stated in Chapter 1 as follows. First, we prove that we can conjugate analytically every rigid germ to one of the normal form. Then we look for every possible formal conjugacy between two analytic normal forms: this leads to the proof of the uniqueness of these, as well as the computation of their respective automorphism groups. Except in the case of germs of class 2, this will also prove the equivalence between formal and analytic classification. We conclude by computing the degree of all normal forms.

The proof in itself is not particularly difficult, but it can be sometimes a little tricky. We use standard fixed point methods to construct our conjugacy maps. As the maps under consideration are strictly contracting, everything works nicely.

C.1 Existence of normal forms

• **f is invertible.**

The case when f is invertible is well-known, and we will not give any proof of this fact (see [RR88]).

• **f is singular, $\mathcal{C}(f^\infty)$ is irreducible.**

First step: construction of an invariant foliation.

Let us suppose now that $\mathcal{C}(f^\infty)$ is irreducible. We can assume that $\mathcal{C}(f^\infty) = \{z = 0\}$. As it is totally invariant, f can be written under the form $f(z,w) = (\alpha z^p(1 + g(Z)), f_2(Z))$, with $p \geq 1$, $g \in \mathfrak{M}$, and $\alpha \neq 0$. We show that there exists a holomorphic function $h(z,w) = z(1 + \psi(z,w))$ s.t.

$$h \circ f = \alpha h^p. \tag{C.1}$$

This is equivalent to the equation $(1 + \psi)^p = (1 + \psi \circ f)(1 + g)$. As f is strictly contracting, this can be solved by

$$1 + \psi := \exp\left[\sum_{k\geq 1} \frac{1}{p^k} \log(1 + g \circ f^{k-1})\right].$$

We hence infer that the foliation given by the holomorphic 1-form dh is f-invariant and in the coordinates $(z,w) \to (\widetilde{z}, \widetilde{w}) = (h(z,w), w)$, the map f is given by $f(\widetilde{z}, \widetilde{w}) = (\alpha \widetilde{z}^p, f_2)$. For sake of simplicity, we drop the tilde in the sequel and set $(\widetilde{z}, \widetilde{w}) = (z,w)$. The foliation is then given by $dz = 0$.

We have $\det Df_z = p\alpha z^{p-1} f_{2w}$. As $\mathcal{C}(f^\infty) = \{z = 0\}$ is totally invariant, we infer the following expansion for f_2, namely $f_2(Z) = \lambda z^q w(1 + \eta(Z)) + h(z)$, with $p + q - 1 > 0$, and h, $\eta \in \mathfrak{M}$. Note that h depends only on the variable z and not on w.

Second step.

Our next step is to cancel the the term η. We look for a diffeomorphism of the form $\phi(z,w) = (z, w(1+\psi(Z)))$, with $\psi \in \mathfrak{M}$, which conjugates f to a map of the form $\tilde{f}(z,w) = (\alpha z^p, \lambda z^q w + \tilde{h}(z))$, with $\tilde{h} \in \mathfrak{M}$. We compute

$$\tilde{f} \circ \phi(z,w) = (\alpha z^p, \lambda w z^q(1+\psi(Z)) + \tilde{h}(z)) \ ,$$

and

$$\phi \circ f(z,w) = (\alpha z^p, (\lambda w z^q(1+\eta(Z)) + h(z))(1+\psi \circ f(Z))) \ .$$

This latter equation can be rewritten thanks to the following identity

$$\int_0^1 \frac{d}{dt}\psi(f(z,wt))dt = \psi(f(z,w)) - \psi(f(z,0));$$

$$\psi \circ f(z,w) = \psi(\alpha z^p, 0) + \lambda w z^q \int_0^1 (1+\eta(z,wt) + wt\eta_w(z,wt))\frac{\partial \psi}{\partial w} \circ f(z,wt)dt \ ,$$

under the form

$$\phi \circ f(z,w) = (\alpha z^p, \lambda w z^q(1+\eta(Z) + T\psi(Z)) + \widetilde{h}(z)) \ ,$$

where

$$T\psi(Z) = (1+\eta(Z))\psi \circ f(Z) + h(z)\int_0^1 (1+\eta_1(z,wt))\frac{\partial \psi}{\partial w} \circ f(z,wt)dt \ , \quad \text{(C.2)}$$

and $\eta_1 = \eta + w\eta_w$. We are thus reduced to find $\psi \in \mathfrak{M}$ such that $\psi = T\psi + \eta$, which can be formally solved by $\psi := \sum_{k \geq 0} T^k \eta$. The following lemma shows that this sum converges to a holomorphic function in a small neighborhood of 0.

Let $\mathfrak{B}_r$ be the space of holomorphic functions ψ defined on the ball $B(0,r)$ so that $\sup\{|\psi(Z)|,\ Z \in B(0,r)\} < \infty$.

Lemma C.1.1.
There exist some constants $r > 0$, $C > 0$, and $1 > \varepsilon > 0$ such that $\forall \psi \in \mathfrak{B}_r$, $\forall n \in \mathbf{N}$,

$$|T^n\psi|_r \leq C(1-\varepsilon)^n |\psi|_r \ .$$

Proof. Lemma C.1.1. Let us fix some constants $1 > \widetilde{\Lambda} > \Lambda > \rho(Df_0) > 0$, and $\varepsilon > 0$ small enough such that $1 - 3\varepsilon > \Lambda$. Let $r > 0$ be small enough such that we have for any $|Z| < r$, The constant $B > 0$ can be chosen arbitrarily small by eventually conjugating f by an automorphism of the form $(z,w) \to (z, bw)$. We will assume we have

$$B \leq \min\{\Lambda, \varepsilon(1-\widetilde{\Lambda})(\widetilde{\Lambda} - \Lambda)\} \ .$$

This implies also that we have for any $|Z| < r$,

$$|f(Z)| \leq \Lambda |Z|. \tag{C.3}$$

Let us recall the basic Cauchy estimates.

Lemma C.1.2. *Cauchy's lemma.*
$\forall 0 < \theta < 1$, $\forall \psi \in \mathfrak{B}_\rho$,

$$\max\{|\psi_z|_{\theta\rho}, |\psi_w|_{\theta\rho}\} \leq \frac{|\psi|_\rho}{\rho(1-\theta)}. \tag{C.4}$$

If moreover $\psi(0) = 0$*, then* $\forall |Z| \leq \theta\rho$*,*

$$|\psi(Z)| \leq \frac{|\psi|_\rho}{\rho(1-\theta)} |Z| \ . \tag{C.5}$$

The second assertion follows by integrating the first one.

Now pick any $\psi \in \mathfrak{B}_r$, and find $A > 0$ such that $|\psi(Z)| \leq A|Z|$. We want to estimate $\psi_w \circ f(Z)$ for $|Z| < r$. We apply lemma C.1.2 to ψ_w with $\theta := \Lambda/\widetilde{\Lambda}$, and $\rho := r\widetilde{\Lambda}$. Then $\forall |Z| \leq r$, we have $|f(Z)| \leq \Lambda r$, and

$$\begin{aligned} |\psi_w \circ f(Z)| &\leq |\psi_w(0)| + \frac{|\psi_w|_{\widetilde{\Lambda} r}}{\widetilde{\Lambda} r(1 - \Lambda\widetilde{\Lambda}^{-1})} |f(Z)| \\ &\leq |\psi_w(0)| + \frac{\Lambda |\psi|_r}{r^2(1-\widetilde{\Lambda})(\widetilde{\Lambda} - \Lambda)} |Z| \end{aligned}$$

We thus get

$$\begin{aligned} |T\psi(Z)| &\leq (\Lambda(1 + |\eta|_r))A|Z| + B|z|(1 + |\eta_1|_r)|\psi_w(0)| \\ &\quad + B|z|(1 + |\eta_1|_r) \frac{\Lambda |\psi|_r}{r^2(1-\widetilde{\Lambda})(\widetilde{\Lambda} - \Lambda)} |Z| \\ &\leq (1 - 2\varepsilon)A|Z| + C|\psi_w(0)||Z| + A\varepsilon|Z|, \end{aligned}$$

with $C := Br(1 + |\eta_1|_r)$. We have hence proved the lemma:

Lemma C.1.3.
There exists $C > 0$*, such that if* $\psi \in \mathfrak{B}_r$ *satisfies* $|\psi(Z)| \leq A|Z|$ *for any* $|Z| < r$*, then for all* $|Z| \leq r$*,*

$$|T\psi(Z)| \leq ((1-\varepsilon)A + C|\psi_w(0)|)|Z| \ .$$

Now a direct computation yields

$$T\psi_w(0) = \psi_w(0) \frac{\partial f_2}{\partial w}(0) \ .$$

And we obtain $\forall n \geq 0$:

$$|T^n \psi_w(0)| \leq \Lambda^n |\psi_w(0)| \ .$$

If we define by induction the sequence

$$A_{n+1} = (1-\varepsilon)A_n + C|\psi_w(0)|\Lambda^n \ ,$$

with $A_1 = A$, we get by iterating lemma C.1.3, $\forall n \geq 0$, $\forall |Z| \leq r$,

$$|T^n \psi(Z)| \leq A_n |Z| \ .$$

Now $(1-\varepsilon)^{-n-1}A_{n+1} = (1-\varepsilon)^{-n}A_n + C\left(\Lambda/(1-\varepsilon)\right)^n |\psi_w(0)|$, hence $\forall n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} A_n &\leq C\frac{|\psi_w(0)|}{1-\Lambda(1-\varepsilon)^{-1}}(1-\varepsilon)^n \\ &\leq C'|\psi|_r(1-\varepsilon)^n \end{aligned}$$

for some constant $C' > 0$. This concludes the proof of lemma C.1.1. □

We have thus showed that f can be analytically conjugated to $(\alpha z^p, \lambda w z^q + \widetilde{h}(z))$ for some $\widetilde{h} \in \mathfrak{M}$. To simplify notations we drop the tilde, and we assume f is now given by $f(z,w) = (\alpha z^p, \lambda w z^q + h(z))$.

Third step.

We conjugate f by $\phi(z,w) = (z, w + \psi(z))$, with $\psi \in \mathfrak{M}$. We obtain $\phi^{-1} \circ f \circ \phi(z,w) = (\alpha z^p, \lambda w z^q + T^{\lambda,q}_{\alpha,p}\psi + h(z))$, where

$$T^{\lambda,q}_{\alpha,p}\psi(z) = \lambda z^q \psi(z) - \psi(\alpha z^p) \ .$$

Our problem of finding simple normal form for f is equivalent to characterize coker $T^{\lambda,q}_{\alpha,p}\mathfrak{M} := \mathfrak{M}/T^{\lambda,q}_{\alpha,p}\mathfrak{M}$.

We have to distinguish three essentially different cases: $q = 0$; or $q \geq 1$ and $p = 1$; or $q \geq 1$ and $p \geq 2$.

First case: $q = 0$

This is equivalent to say that f has non-zero trace and $\deg(f) \geq 2$. We necessarily have then $p \geq 2$ because f is not an automorphiam, and we can assume that $\alpha = 1$ by conjugating by a linear map of the form $(z,w) \to (az, w)$ with $a^{p-1}\alpha = 1$. We have $f(z,w) = (z^p, \lambda w + h(z))$, and we are looking for the image of the operator $T^{\lambda,0}_{1,p}\psi(z) = \lambda\psi(z) - \psi(z^p)$.

Lemma C.1.4. *The operator $T^{\lambda,0}_{1,p}$ is injective, and:*

$$T^{\lambda,0}_{1,p}\mathfrak{M} = \mathfrak{M} \ .$$

Hence coker $T_{1,p}^{\lambda,0}\mathfrak{M} = \{0\}$. This shows that f is analytically conjugate to $(z,w) \to (z^p, \lambda w)$.

Proof. Lemma C.1.4.

Expand $h \in \mathfrak{M}$ in power series $h(z) = \sum_{k\geq 1} a_k z^k$, and set $\psi(z) = \sum_{k\geq 1} b_k z^k$. The equation $T_{1,p}^{\lambda,0}\psi = h$ is equivalent to $b_k = \lambda^{-1}(a_k + b_{k/p})$ for each $k \geq 1$ (we adopt the convention $a_k = 0$ if k is not an integer). This defines by induction a unique solution. We are only left with the convergence of this series. As h is convergent, we have an estimate $|a_k| \leq Ar^k$, for some constants $A > 0$ and $r > 0$ we can choose to be larger than $r > |\lambda|^{-1} > 1$. Choose then $B > 0$ such that $AB^{-1} + r^{-1+1/p} \leq |\lambda|$. Then an immediate induction yields $\forall k \geq 1$,

$$b_k \leq \frac{1}{|\lambda|}\left(\frac{A}{B} + r^{\frac{k}{p}-k}\right) Br^k \leq Br^k \ ,$$

which concludes the proof. □

Second case: $q \geq 1$ and $p = 1$.

Equivalently f has non-zero trace and is strict. By conjugating by $(z,w) \to (az, w)$ with $a^q\lambda = 1$ we can assume that $\lambda = 1$. We have to find the cokernel of the operator $T_{\alpha,1}^{1,q}\psi(z) = z^q\psi(z) - \psi(\alpha z)$, either on $\mathfrak{M}$ or on $\mathfrak{M}[[z]]$.

Lemma C.1.5.

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}[[z]] &= T_{\alpha,1}^{1,q}\mathfrak{M}[[z]], \\ \mathfrak{M} &= T_{\alpha,1}^{1,q}\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{M}_q[z]. \end{aligned}$$

This implies that first f is formally conjugated to $(z,w) \to (\alpha z, wz^q)$, and second analytically conjugated to $(z,w) \to (\alpha z, wz^q + P(z))$ with $P \in \mathfrak{M}_q[z]$.

Proof. Lemma C.1.5.

As before, we simplify notations and replace $T_{\alpha,1}^{1,q}$ by T. The first part of the assertion is very simple. If we both expand h and ψ in power series $\psi(z) = \sum b_k z^k$, and $h(z) = \sum a_k z^k$, the equation $T\psi = h$ is equivalent to $\forall k \geq 0$, $b_{k-q} = b_k\alpha^k + a_k$, which can be solved formally without any difficulty (by convention $b_k = 0$ if $k \notin \mathbf{N}$).

We consider now T acting on $\mathfrak{M}$. The operator T is injective, because of multiplicity considerations, as $\mu(\psi(\alpha z), 0) = \mu(\psi, 0)$, and $\mu(z^q\psi(z), 0) = q + \mu(\psi, 0)$.

Let us compute now coker $T|_{\mathfrak{M}[z]} := \mathfrak{M}[z]/T\mathfrak{M}[z]$, and set $\mathfrak{M}_i[z] := \{R \in \mathfrak{M}[z],\ \deg(R) \leq i\}$. We claim that the natural mapping

$$\mathfrak{M}_q[z] \to \mathfrak{M}[z]/T\mathfrak{M}[z] \ , \tag{C.6}$$

is an isomorphism. The injectivity merely comes from the equation

$$\deg(T(P)) = \deg(P) + q \ .$$

Now $T\mathfrak{M}_i[z] \subset \mathfrak{M}_{i+q}[z]$, and $\dim T\mathfrak{M}_i[z] - \dim \mathfrak{M}_{i+q}[z] = q$, hence $\forall i \in \mathbf{N}$,

$$0 \to \mathfrak{M}_q[z] \to \mathfrak{M}_{i+q}[z]/T\mathfrak{M}_i[z] \to 0,$$

which gives us the isomorphism C.6.

Let us ook now at the operator T on the Banach space

$$H^1(\Delta) := \{\psi(z) = \sum_{n\geq 1} a_n z^n, \text{ such that } \sum_{n\geq 1} |a_n| < \infty\} \ ,$$

with the norm $|\psi| := \sum_{n\geq 1} |a_n|$. We have $\forall \psi \in H^1(\Delta)$,

$$(1 - |\alpha|)|\psi| \leq |T\psi| \leq 2|\psi| \tag{C.7}$$

The proof of C.7 is elementary. Write $T\psi(z) = \sum_{n\geq 1}(a_{n-q} - \alpha^n a_n)z^n$. Then

$$|T\psi| \leq \sum_{n\geq 1} |a_{n-q}| + |\alpha^n a_n| \leq 2 \sum_{n\geq 1} |a_n| \ ,$$

and

$$|T\psi| \geq \sum_{n\geq 1} |a_{n-q}| - |\alpha^n a_n| \geq (1 - |\alpha|) \sum_{n\geq 1} |a_n| \ .$$

Equation C.7 implies that T defines a continuous operator on $H^1(\Delta)$ whose range is closed.

Now $\mathfrak{M}[z]$ is dense in $H^1(\Delta)$. As $TH^1(\Delta)$ is closed and T is continuous, this implies

$$\overline{T\mathfrak{M}[z]} = TH^1(\Delta) \ .$$

The vector space $\mathfrak{M}_q[z]$ is finite dimensional, thus $TH^1(\Delta) \oplus \mathfrak{M}_q[z]$ is closed too. But

$$\mathfrak{M}[z] = T\mathfrak{M}[z] \oplus \mathfrak{M}_q[z] \subset TH^1(\Delta) \oplus \mathfrak{M}_q[z] \subset \overline{\mathfrak{M}[z]} = H^1(\Delta) \ ,$$

hence we have the decomposition

$$H^1(\Delta) = TH^1(\Delta) \oplus \mathfrak{M}_q[z] \ . \tag{C.8}$$

We can now conclude the second assertion of lemma C.1.5. Take $\psi \in \mathfrak{M}$, and $r > 0$ small enough so that $\psi_r(z) := \psi(rz)$ belongs to $H^1(\Delta)$. By C.8, we can find $P \in \mathfrak{M}_q[z]$ and $\phi \in H^1(\Delta)$ such that $\psi(rz) = T\phi(z) + P(z)$. We get then $\psi(z) = T\phi(z/r) + P(z/r)$ which finishes the proof. □

Third case: $q \geq 1$ and $p \geq 2$.

Equivalently, f has zero trace. We can assume that $\alpha = 1$ by conjugating by $(z, w) \to (az, w)$ with $a^{p-1}\alpha = 1$. We have as in the previous case to determine the cokernel of the operator $T^{1,q}_{\lambda,p}\psi(z) = \lambda z^q \psi(z) - \psi(z^p)$. We define$\kappa = q/(p - 1)$.

Lemma C.1.6.

Analytic action.

- *If* $\kappa \notin \mathbf{N}$ *or* $\lambda \neq 1$ *(*f *is not special):* $T^{1,q}_{\lambda,p}$ *is injective and*

$$\mathfrak{M} = T^{1,q}_{\lambda,p}\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{M}_q[z] \ .$$

- *If* $\kappa \in \mathbf{N}$ *and* $\lambda = 1$ *(*f *is special):* $\ker T^{1,q}_{\lambda,p} = \mathbf{C}z^{\kappa}$*, and*

$$\mathfrak{M} = T^{1,q}_{\lambda,p}\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{M}_q[z] \oplus \mathbf{C}z^{q+\kappa} \ .$$

Formal action.

- *If* $\kappa \notin \mathbf{N}$ *or* $\lambda \neq 1$ *(*f *is not special):* $T^{1,q}_{\lambda,p}$ *is injective and*

$$\mathfrak{M}[[z]] = T^{1,q}_{\lambda,p}\mathfrak{M}[[z]] \oplus \mathfrak{M}_q[z] \ .$$

- *If* $\kappa \in \mathbf{N}$ *and* $\lambda = 1$ *(*f *is special):* $\ker T^{1,q}_{\lambda,p} = \mathbf{C}z^{\kappa}$*, and*

$$\mathfrak{M}[[z]] = T^{1,q}_{\lambda,p}\mathfrak{M}[[z]] \oplus \mathfrak{M}_q[z] \oplus \mathbf{C}z^{q+\kappa} \ .$$

The first statements imply that if f is non special $f \cong (z^p, \lambda w z^q + P(z))$ with $P \in \mathfrak{M}_q[z]$, and if f is special $f \cong (z^p, \lambda w z^q + P(z) + a z^{\kappa+q})$ with $P \in \mathfrak{M}_q[z]$ and $a \in \mathbf{C}$. The second series will be used for proving the equivalence of formal and analytic classification.

Proof. Lemma C.1.6.

In the sequel, we set $T := T^{1,q}_{\lambda,p}$. We have:

Lemma C.1.7.

For any $r \in \mathbf{N}^*$*, we have both*

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^{q+[\kappa]+r} &= T^{1,q}_{\lambda,p}\mathfrak{M}^{[\kappa]+r}, \\ \mathfrak{M}^{q+[\kappa]+r}[[z]] &= T^{1,q}_{\lambda,p}\mathfrak{M}^{[\kappa]+r}[[z]]. \end{aligned}$$

In particular, note that for $r = 1$ we obtain $\mathfrak{M}^{q+[\kappa]+1} = T\mathfrak{M}^{[\kappa]+1}$. And we also infer that it is sufficient to prove the first two statements on the analytic action of $T^{1,q}_{\lambda,p}$ to complete the proof of lemma C.1.6.

Proof. Lemma C.1.7.

Let us consider the germ $h(z) = \sum_{k \geq q+[\kappa]+1} a_k z^k \in \mathfrak{M}^{q+[\kappa]+1}[[z]]$. We are looking for $\psi(z) = \sum_{k>0} b_k z^k$ such that $T\psi = h$. By identifying term by term, we get for all $k \geq 0$:

$$b_k = \frac{1}{\lambda}\ \left(a_{k+q} + b_{p^{-1}(k+q)}\right) \ , \tag{C.9}$$

with the convention $b_i = 0$ if $i \notin \mathbf{N}$. If $k \leq \kappa$, we define $b_k = 0$, and equation (C.9) holds because $k \leq p^{-1}(k+q) \leq \kappa$. If $k > \kappa$, we have $p^{-1}(k+q) < k$. Equation (C.9) allows us to define by induction the sequence b_k which solves $T\psi = h$. This proves lemma C.1.7 in the formal case. Assume now $h \in \mathfrak{M}^{q+[\kappa]+r}$. We thus infer for any $k \in \mathbf{N}$, $|a_k| \leq Ar^k$, for some constants $A > 0$, and $r > 1$. To conclude we have to prove that ψ defined as above is analytic. This follows from the estimate $\forall k \in \mathbf{N}$, $|b_k| \leq \rho^k$ for $\rho > \max\{2Ar^{q+1}|\lambda|^{-1}, (2|\lambda|^{-1})^{1/\theta}, r, 1\}$ and $0 < \theta := ([\kappa]+1) - p^{-1}([\kappa]+q+1)$.

For $k \leq \kappa$, the estimate is obvious, as $b_k = 0$ For $k > \kappa$, $p^{-1}(k+q) < k$, thus

$$\begin{aligned} |b_k| &= |\lambda|^{-1}|a_{k+q} + b_{p^{-1}(k+q)}| \\ &\leq \left(\frac{Ar^q}{|\lambda|}\left(\frac{r}{\rho}\right)^k + \frac{\rho^{-k+p^{-1}(k+q)}}{|\lambda|}\right)\rho^k \\ &\leq \left(\frac{Ar^q}{|\lambda|}\left(\frac{r}{\rho}\right) + \frac{\rho^{-\theta}}{|\lambda|}\right)\rho^k \leq \rho^k\ . \end{aligned}$$

This concludes the proof of Lemma C.1.7. □

In the sequel we use the notation $\underline{\kappa}$ for the largest integer $\underline{\kappa} < \kappa$. If $\kappa \notin \mathbf{N}$, $\underline{\kappa} = [\kappa]$, otherwise $\underline{\kappa} = \kappa - 1$.

Take now $h(z) = \sum_{0<k<q+\kappa} a_k z^k \in \mathfrak{M}_{q+\underline{\kappa}}[z]$. Let k_0 be the largest integer such that $q + \kappa > k_0 > q$ and $a_{k_0} \neq 0$. Then

$$\begin{aligned} \widetilde{h}(z) &:= h(z) + T(-a_{k_0}\lambda^{-1}z^{k_0-q}) \\ &= \sum_{a<k<k_0} a_k z^k + a_{k_0}\lambda^{-1}z^{p(k_0-q)} + (a_{k_0}z^{k_0} - \lambda a_{k_0}\lambda^{-1}z^{k_0}) \end{aligned}$$

is a polynomial of degree $\deg(\widetilde{h}) < \deg(h)$. We can thus iterate the process, which yields the following:

Lemma C.1.8.

1. *If h is a polynomial of degree $q + r$ with $1 \leq r \leq \underline{\kappa}$, there exists a monomial $\psi(z) = cz^r$ with $c \in \mathbf{C}^*$ such that $\deg(h + T^{1,q}_{\lambda,p}\psi) \leq q + r - 1$.*

2. *For any $h \in \mathfrak{M}_{q+\underline{\kappa}}[z]$, there exists $\psi \in \mathfrak{M}_{\underline{\kappa}}[z]$ such that $h + T^{1,q}_{\lambda,p}\psi \in \mathfrak{M}_q[z]$.*

Assume now that $\kappa \notin \mathbf{N}$, then $\underline{\kappa} = [\kappa]$, and lemma C.1.7 and C.1.8 imply

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \mathfrak{M}_q[z] \oplus \sum_{q<k\leq q+\underline{\kappa}} \mathbf{C}z^k \oplus \mathfrak{M}^N \\ &= \mathfrak{M}_q[z] \oplus T\mathfrak{M}_{\underline{\kappa}}[z] + T\mathfrak{M}^{\underline{\kappa}+1} \\ &= \mathfrak{M}_q[z] \oplus T\mathfrak{M}. \end{aligned}$$

If $\kappa \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}\mathfrak{M} &= \mathfrak{M}_q[z] \oplus \sum_{q<k\leq q+\kappa-1} \mathbf{C}z^k \oplus \mathbf{C}z^{\kappa+q} \oplus \mathfrak{M}^N \\ &= \mathfrak{M}_q[z] \oplus T\mathfrak{M}_{\kappa-1}[z] \oplus T\mathfrak{M}^{\kappa+1} + \mathbf{C}z^{\kappa+q}.\end{aligned}$$

But for any $b \in \mathbf{C}$,

$$T(bz^\kappa) = \lambda b z^{q+\kappa} - bz^{p\kappa} = (\lambda - 1)bz^{q+\kappa} \ .$$

Hence if $\lambda \neq 1$, we get

$$\mathbf{C}z^{q+\kappa} = T(\mathbf{C}z^\kappa) \ ,$$

and we still have

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_q[z] \oplus T\mathfrak{M} \ .$$

Otherwise, $\mathbf{C}z^\kappa \subset \ker T$ and

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_q[z] \oplus \mathbf{C}z^{\kappa+q} \oplus T\mathfrak{M} \ .$$

We finish the proof of lemme C.1.6 by computing $\ker T$. Take $\psi \in \ker T$. It satisfies the equation $\lambda z^q \psi(z) = \psi(z^p)$. Hence $\deg \psi = \kappa$, and in particular κ should be an integer. Now if $\psi(z) \in az^\kappa + \mathfrak{M}^{\kappa+1}$, we have $\lambda z^q \psi(z) - \psi(z^p) \in a(\lambda - 1)z^{q+\kappa} + \mathfrak{M}^{q+\kappa+1}$. Therefore, T is injective if f is not special, and $\ker T = \mathbf{C}z^\kappa$ otherwise. $\square$

• f **is singular,** $\mathcal{C}(f^\infty)$ **is reducible.**

We suppose now that $\mathcal{C}(f^\infty)$ is reducible, that means thanks to our definition of rigid germs that $\mathcal{C}(f^\infty)$ is a union of two transverse smooth curves at 0 we assume to be $\{zw = 0\}$. We can thus write f under the form

$$f(z,w) = (\lambda_1 z^a w^b (1+\varepsilon_1(Z)), \lambda_2 z^c w^d (1+\varepsilon_2(Z))) = \lambda Z^M (1+\varepsilon(Z)) \ ,$$

with $\lambda_1\lambda_2(a+b)(c+d) \neq 0$, and $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$.

First case: $\mathrm{tr} Df_0 \neq 0$ ($M(f)$ is invertible).

As $\alpha := \mathrm{tr}(Df_0) \neq 0$, one of the two diagonal terms of Df_0 is non-zero, hence we can asssume, by eventually permuting coordinates, that $a = 1$ and $b = 0$. As in the first step in the irreducible case, we can cancel the term ε_1. Since $\mathcal{C}(f^\infty) = \{zw = 0\}$, we have $d \geq 2$, and $c \geq 1$. By conjugating f by a linear automorphism $(z,w) \to (z, \theta w)$ with $\theta^{c-1}\alpha_2 = 1$, we can assume that $\alpha_2 = 1$ so that f is finally given by $f(z,w) = (\alpha z, z^c w^d(1+\varepsilon(Z)))$. We have for any $n \in \mathbf{N}$,

$$f^n(z,w) = (\alpha^n z, \alpha^{r_n} w^{d^n} z^{c_n}(1+\varepsilon_n(Z))) \ ,$$

with $r_{n+1} = dr_n + nc$, $c_{n+1} = dc_n + c$, and $1+\varepsilon_{n+1} = (1+\varepsilon_n)^d(1+\varepsilon\circ f^n)$. Put $\phi_n(z,w) = (z, w(1+\varepsilon_n(Z))^{1/d^n})$, so that $\phi_n \circ f = g \circ \phi_{n+1}$, with $g(z,w) = (\alpha z, z^c w^d)$. Note ϕ_n is well-defined in a fixed neighborhood of the origin, if we specify that we always take the determination of the logarithm with $\log 1 = 0$, thanks to the fact that f is contracting, and to the induction relation defining ε_n. Define $\varepsilon_0 \equiv 0$. We have

$$\begin{aligned} \Delta_n &:= \left| \frac{1}{d^{n+1}} \log(1+\varepsilon_{n+1}) - \frac{1}{d^n}\log(1+\varepsilon_n) \right| \\ &= \frac{1}{d^{n+1}} |\log(1+\varepsilon\circ f^n)| \leq A \frac{\Lambda^n}{d^{n+1}}, \end{aligned}$$

for some constant $A > 0$ such that $\Delta_0(Z) \leq A|Z|$, and $0 < \Lambda < 1$ with $|f(Z)| \leq \Lambda|Z|$ in a neighborhood of the origin. This proves the normal convergence of the sequence of functions $(1+\varepsilon_n)^{1/d^n}$, and this implies that $f \cong (\alpha z, z^c w^d)$.

Second case: $M(f)$ is invertible, and f has zero trace.

In the sequel, we denote by $M(f) = M$, and the coefficients of M^n respectively by a_n, b_n, c_n, and d_n. If $Z = (z,w)$, we also define $Z^{M^n} := (z^{a_n} w^{b_n}, z^{c_n} w^{d_n})$.

As $\mathrm{tr} Df_0 = 0$ and Df_0 is singular, we have $Df_0^2 = 0$. Hence $\min\{a_2 + b_2, c_2 + d_2\} \geq 2$. It implies by induction $\min\{a_{2n} + b_{2n}, c_{2n} + d_{2n}\} \geq 2^n$, and as each of these sequences are increasing $\min\{a_n + b_n, c_n + d_n\} \geq \tau_0^n$ for some positive number $\tau_0 > 1$, and $n \geq 1$.

Let us compute the iterates of f. We have $f(Z) = \lambda Z^M(1+\varepsilon(Z))$, thus for any $n \geq 1$, we infer

$$f^n(Z) = \lambda^{\frac{M^n - \mathrm{Id}}{M - \mathrm{Id}}} Z^{M^n} \prod_{k=1}^{n} (1 + \varepsilon \circ f^{k-1}(Z))^{M^{n-k}} \ .$$

In a sufficiently small neighborhood of 0, we have $|f^2(Z)| \leq C|Z|^2 \leq |Z|^{\tau_1}$, for some $C > 0$, and some positive real $2 > \tau_1 > 1$. We infer for all $n \in \mathbf{N}$, and for Z small enough, $|f^{2n}(Z)| \leq |Z|^{\tau_1^n}$, hence $|f^{2n+1}(Z)| \leq |f(Z)|^{\tau_1^n} \leq |Z|^{\tau_2^n}$, with $\tau_1 > \tau_2 > 1$. Finally, one gets, for any $n \in \mathbf{N}^*$, and Z in a fixed neighborhood of the origin,

$$|f^n(Z)| \leq |Z|^{\tau_2^n}.$$

We define the sequence of biholomorphisms $\phi_n(Z)$ by

$$\phi_n(Z) = Z \prod_{k=0}^{n} (1 + \varepsilon \circ f^k)^{M^{-k}} \ .$$

By definition the following equation holds:

$$\lambda \phi_{n+1}^M = \phi_n \circ f \ ;$$

and we have

$$\begin{aligned} \left|\log(1 + \varepsilon \circ f^n(Z))^{M^{-n}}\right| &= |\log(1 + \varepsilon \circ f^n(Z)) \cdot \ M^{-n}| \\ &\leq A|f^n(Z).M^{-n}| \\ &\leq A\rho(M^{-1})^n |Z|^{\tau_2^n} \ . \end{aligned}$$

We deduce from this that ϕ_n converges uniformly to ϕ which is tangent to the identity, and conjugates f to $Z \to \lambda Z^M$.

Assume now that $1 \notin \mathrm{Spec} M$. One can then find $\mu \in (\mathbf{C}^*)^2$ such that $\lambda \mu^M = \mu$. If we set $\phi(Z) = \mu Z$, one checks that $\phi^{-1} \circ (\lambda Z^M) \circ \phi = Z^M$.

Third case: $M(f)$ is singular.

Under this condition, the matrix $M(f) - \mathrm{Id}$ can not be singular. In fact, if it were the case, $M(f)$ would be conjugated to $\mathrm{diag}(0,1)$, and $M(f)^n$ would be bounded. But as in the previous case, $\min\{a_n + b_n, c_n + d_n\} \to \infty$ which gives a contradiction. We can thus find a couple $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in (\mathbf{C}^*)^2$ such that $\theta^M = \theta \alpha^{-1}$, and by conjugating f by $(z,w) \to (\theta_1 z, \theta_2 w)$, we reduce α_1, α_2 to 1. The mapping f is now given by

$$f(z,w) = \Big(z^a w^b (1 + \varepsilon_1(Z)), z^c w^d (1 + \varepsilon_2(Z))\Big) \ .$$

We recall some integer invariants naturally associated to the matrix $M(f)$. As the rank of $M(f)$ is 1, the range of $M(f)$ is a line. The coefficients of $M(f)$ are non-negative integers, hence we can find a vector

$v = (\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^2 \cap M(f)(\mathbf{C}^2)$ of minimal norm $\alpha + \beta$. The minimality implies $\gcd\{\alpha, \beta\} = 1$. Pick any vector $(\alpha_0, \beta_0) \in \mathbf{N}^2 \cap M(f)(\mathbf{C}^2)$. We have $\alpha\beta_0 = \alpha_0\beta$ hence $\alpha|\alpha_0$ and $\beta|\beta_0$. The couple (α, β) is thus uniquely defined. As $M(f)$ is singular, the vector v is also an eigenvector, and its eigenvalue is given by $p := \mathrm{tr} M(f) \geq 2$.

The **first step** is to construct an invariant foliation.

Lemma C.1.9. *One can conjugate f to a map preserving the foliation $\mathcal{F}$ given by the holomorphic 1-form $d(z^\alpha w^\beta) = 0$.*

Proof. We would like to conjugate f to a map

$$\widetilde{f}(z, w) = (z^a w^b (1 + \varepsilon(Z))^{-\beta}, z^c w^d (1 + \varepsilon(Z))^\alpha) \ ,$$

for some $\varepsilon \in \mathfrak{M}$. We use a change of coordinates of the form

$$\phi(z, w) = (z(1 + \psi(Z)), w(1 + \psi(Z))) \ ,$$

with $\psi \in \mathfrak{M}$. The equation $\phi \circ f = \widetilde{f} \circ \phi$ is then equivalent to

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon_1)(1 + \psi \circ f) &= (1 + \varepsilon \circ \phi)^{-\beta} (1 + \psi)^{a+b}, \\ (1 + \varepsilon_2)(1 + \psi \circ f) &= (1 + \varepsilon \circ \phi)^\alpha (1 + \psi)^{c+d}, \end{aligned}$$

or if we multiply the α-th power of the first line by the β-th power of the second

$$(1 + \varepsilon_1)^\alpha (1 + \varepsilon_2)^\beta (1 + \psi \circ f)^{\alpha+\beta} = (1 + \psi)^{p(\alpha+\beta)}, \tag{C.10}$$

$$(1 + \varepsilon_2)(1 + \psi \circ f) = (1 + \varepsilon \circ \phi)^\alpha (1 + \psi)^{c+d}. \tag{C.11}$$

Set $\theta := (\alpha + \beta)^{-1}(\alpha \log(1 + \varepsilon_1) + \beta \log(1 + \varepsilon_2))$. This defines a holomorphic function in a sufficiently small neighborhood of 0. Then $\psi \in \mathfrak{M}$ solves C.10 if and only if $\eta := \log(1 + \psi)$ solves $p\eta - \eta \circ f = \theta$. A solution of this equation is given by the series of functions $\sum_{k \geq 0} p^{-k} \theta \circ f^k$. As f is contracting, this series defines a convergent holomorphic function. Once ψ is found, ε is uniquely defined by equation C.11. This concludes the first step. $\square$

We assume f is now given by

$$f(z, w) = (z^a w^b (1 + \varepsilon(Z))^{-\beta}, z^c w^d (1 + \varepsilon(Z))^\alpha) \ .$$

A computation of the jacobian determinant of f gives

$$\det Df(Z) = p \ z^{a+c-1} w^{b+d-1} (1 + \varepsilon(Z))^{\alpha-\beta} D_\xi \varepsilon(Z) \ ,$$

where $D_\xi = \alpha w \partial/\partial w - \beta z \partial/\partial z$ is the operator of derivation associated to a vector field ξ defining the foliation $\mathcal{F}$ above. On the power series expansion of ε, D_ξ is given by

$$D_\xi \left(\sum_{k,l} a_{kl} z^k w^l \right) = \sum_{k,l} a_{kl} (\alpha l - \beta k) z^k w^l \ . \tag{C.12}$$

Now f is rigid and $\mathcal{C}(f^\infty) \subset \{zw = 0\}$ hence $(\det Df)^{-1}\{0\} = \{zw = 0\}$, and $\det Df_Z \in z^{k_0}w^{l_0}\mathcal{O}^*$ for some k_0, $l_0 \in \mathbf{N}^*$. Hence

$$D_\xi\varepsilon(Z) = \lambda_0 z^\mu w^\nu(1 + \eta_0(Z)) \ , \tag{C.13}$$

with $\mu := k_0 + 1 - (a + c)$ and $\nu := l_0 + 1 - (b + d) \in \mathbf{N}$, $\lambda_0 \neq 0$, and $\eta_0 \in \mathfrak{M}$. In view of equation C.12, one sees that any monomial $a_{kl}z^kw^l$ with a non-zero coefficient in the power series expansion of $D_\xi\varepsilon$ satisfies $\alpha l \neq \beta k$. In particular $\delta := \alpha\nu - \beta\mu$ cannot be zero. Moreover, by integrating C.12, one obtains that $\varepsilon(z, w) = \delta^{-1}\lambda_0 z^\mu w^\nu(1 + \eta(z, w)) + h(z^\alpha w^\beta)$ for some $\eta, h \in \mathfrak{M}$.

For sake of convenience, we replace $(1 + \varepsilon)$ by its δ-th root. We assume thus that

$$f(z, w) = (z^a w^b(1 + \varepsilon(Z))^{-\beta/\delta}, z^c w^d(1 + \varepsilon(Z))^{\alpha/\delta}) \ ,$$

with $\varepsilon = \lambda z^\mu w^\nu(1 + \eta(z, w)) + h(z^\alpha w^\beta)$, and $\psi, h \in \mathfrak{M}$. We also let $\eta_0 \in \mathfrak{M}$ be such that $D_\xi\varepsilon = \lambda\delta z^\mu w^\nu(1 + \eta_0)$.

We will need the following lemma in the sequel.

Lemma C.1.10. *We have $a + b \geq 2$, and $c + d \geq 2$ except if $b = d = 0$, $c = 1$, $a \geq 2$, and $\nu \geq 2$, or $a = c = 0$, $b = 1$, $d \geq 2$, and $\mu \geq 2$.*

Proof. Assume for instance that $c + d = 1$. Then, because $\mathrm{tr}Df_0 = 0$, we necessary have $d = 0$ and $c = 1$. As $M(f)$ is singular, we infer $b = 0$. Note we have $a \geq 2$. Therefore $\alpha = 1$, and $\beta = 0$, and as $\mathcal{C}(f^\infty)$ is reducible, we have $\nu \geq 2$. □

Second step. Our goal is to make a change of coordinates to simplify ε, that is to cancel the term η. For that purpose, we reduce the problem to the existence of a fixed point of a certain operator T in a suitable space of holomorphic functions. We actually show that this operator is contracting. The operator T is completely analoguous to the one introduced above in the irreducible case (equation C.2). We replace the integration process by an integration along the vector field ξ. To prove that T is contracting, we decompose its action into a composition of simpler operators, and look at its action on the power series expansion of a holomorphic function.

We define the operators

$$D_\xi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M} \qquad D_\xi\left(\sum_{k,l} a_{kl}z^kw^l\right) = \sum_{k,l}(\alpha l - \beta k)a_{kl}z^kw^l;$$

$$I_\xi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M} \qquad I_\xi\left(\sum_{k,l} a_{kl}z^kw^l\right) = \sum_{k,l}\frac{1 - \delta_{\alpha l,\beta k}}{\alpha l - \beta k}a_{kl}z^kw^l;$$

$$S : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M} \qquad S\left(\sum_{k,l} a_{kl}z^kw^l\right)(x) = \sum_j a_{j\alpha,j\beta}x^j.$$

The second operator I_ξ is an operator of integration along the vector field ξ. By doing so, we get a rest which is constant on a leaf of $\mathcal{F}$, and which is given by S. We have more precisely, $\ker D_\xi = \{h(z^\alpha w^\beta),\ \text{for}\ h \in \mathfrak{M}\}$, and for any $\psi \in \mathfrak{M}$,

$$\psi(z,w) = I_\xi D_\xi \psi(Z) + S\psi(z^\alpha w^\beta).$$

We will also need the following relation. For any $\psi = \sum_{k,l} a_{kl} z^k w^l \in \mathfrak{M}$, one has

$$I_\xi(z^\mu w^\nu \psi(Z)) = z^\mu w^\nu T_1 \psi(Z)\ ,$$

with

$$T_1\left(\sum_{k,l} a_{kl} z^k w^l\right) = \sum_{k,l} \frac{1-\delta_{\alpha l+\delta,\beta k}}{\alpha l - \beta k + \delta} a_{kl} z^k w^l.$$

Recall ε is given by

$$\varepsilon(z,w) = \lambda z^\mu w^\nu (1+\eta(Z)) + h(z^\alpha w^\beta)\ ,$$

and that our aim is to find a conjugacy ϕ which cancels the term η. We choose

$$\phi(Z) = (z(1+\psi)^{-\beta/\delta}, w(1+\psi)^{\alpha/\delta})\ ,$$

and define $\widetilde{f} = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$. We then have

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(z,w) &= (z^a w^b (1+\widetilde{\varepsilon}(Z))^{-\beta/\delta}, z^c w^d (1+\widetilde{\varepsilon}(Z))^{\alpha/\delta}), && \text{(C.14)}\\ 1+\widetilde{\varepsilon}\circ\phi &= (1+\varepsilon)(1+\psi\circ f), && \text{(C.15)} \end{aligned}$$

and we want to impose $\widetilde{\varepsilon}(z,w) = \lambda z^\mu w^\nu + \widetilde{h}(z^\alpha w^\beta)$, for some $\widetilde{h} \in \mathfrak{M}$. It is equivalent to the equation

$$\begin{aligned} &1 + \lambda z^\mu w^\nu (1+\psi(Z)) + \widetilde{h}(z^\alpha w^\beta) = \\ &\qquad \Big(1 + \lambda z^\mu w^\nu (1+\eta(Z)) + h(z^\alpha w^\beta)\Big)(1+\psi\circ f). \qquad \text{(C.16)} \end{aligned}$$

A direct though long computation yields

$$Df.\xi = \frac{D_\xi \varepsilon}{\delta(1+\varepsilon)}\xi = \lambda z^\mu w^\nu \frac{1+\eta_0}{1+\varepsilon}\xi.$$

We have

$$\begin{aligned} D_\xi(\psi\circ f)(Z) &= (D\psi_{f(Z)} \circ Df_Z).\xi(Z)\\ &= D\psi_{f(Z)}\left(\frac{D_\xi \varepsilon}{\delta(1+\varepsilon(Z))}\xi(f(Z))\right). \end{aligned}$$

Hence

$$D_\xi(\psi\circ f) = \lambda z^\mu w^\nu \frac{1+\eta_0}{1+\varepsilon}(D_\xi\psi)\circ f. \qquad \text{(C.17)}$$

We deduce from this

$$\begin{aligned}\psi\circ f(z,w) &= I_\xi D_\xi(\psi\circ f)(z,w)+S(\psi\circ f)(z^\alpha w^\beta)\\ &= I_\xi\left(\lambda z^\mu w^\nu\frac{1+\eta_0}{1+\varepsilon}(D_\xi\psi)\circ f\right)(z,w)+S(\psi\circ f)(z^\alpha w^\beta)\\ &= \lambda z^\mu w^\nu T_1\left(\frac{1+\eta_0}{1+\varepsilon}(D_\xi\psi)\circ f\right)(z,w)+S(\psi\circ f)(z^\alpha w^\beta).\end{aligned}$$

Using the preceeding computations, we see that solving equation C.16 is equivalent to find a $\psi\in\mathfrak{M}$ such that

$$\begin{aligned}\psi &= \eta+T\psi, &\text{(C.18)}\\ T\psi &:= (1+\eta)\psi\circ f+(1+h(z^\alpha w^\beta))T_1\left(\frac{1+\eta_0}{1+\varepsilon}D_\xi\psi\circ f\right). &\text{(C.19)}\end{aligned}$$

The series $\psi := \sum_{k\geq 0}T^k\eta$ solves C.18, so it remains to prove that this defines a holomorphic function near the origin.

We shall work on the complete space $\mathfrak{B}_r$ with $r>0$ to be fixed later, and conclude by proving the following lemma.

Lemma C.1.11.
For all $r>0$ small enough, T defines an operator on $\mathfrak{B}_r$, which is strictly contracting.

Proof. Let us fix $0<\Lambda\ll\theta<1$, such that $\Lambda(1-\theta)^{-1}<1/4$, and $\Lambda\theta^{-1}(1-\Lambda\theta^{-1})^{-1}<1/4\times(1-\theta)^2$.

Assume first that $a+b\geq 2$, and $c+d\geq 2$. We can then find a constant $A>0$ such that $|f(Z)|\leq A|Z|^2$ in a neighborhood of the origin, hence for $r>0$ small enough, $|Z|<r$ implies $|f(Z)|\leq\Lambda|Z|$.

Otherwise, by lemma C.1.10, one can assume that $c+d=1$, and f is given by $f(z,w)=(z^a,z(1+\lambda z^\mu w^\nu(1+\eta(Z))+h(z)))$, with $\nu\geq 2$. By conjugating f by an automorphism $(z,w)\to(z,Cw)$, we transform it under the form $f(z,w)=(z^a,Dz(1+\lambda z^\mu w^\nu(1+\eta(Z))+h(z)))$, with $D=1/C$ as small as we wish to have again $|f(Z)|\leq\Lambda|Z|$ for $|Z|<r$. Note in this case a fixed point of the operator T conjugate f to $(z,w)\to(z^a,Dz(1+\lambda z^\mu w^\nu+\widetilde{h}(z)))$, which is analytically conjugated to $(z,w)\to(z^a,z(1+\lambda D^\nu z^\mu w^\nu+\widetilde{h}(z)))$.

To prove that T is contracting, we first estimate $\psi\circ f$, and $(D_\xi\psi)\circ f$. Lemma C.1.2 yields for any $\psi\in\mathfrak{B}_r$,

$$|\psi\circ f|_r\leq\frac{\Lambda}{1-\theta}|\psi|_r\leq 1/4|\psi|_r, \tag{C.20}$$

and also

$$\begin{aligned}|(D_\xi\psi)\circ f|_{\theta^{-1}r} &= |(\alpha w\psi_w-\beta z\psi_z)\circ f|_{\theta^{-1}r}\\ &\leq \max\{\alpha,\beta\}\max\{|\psi_z|_{\Lambda\theta^{-1}r},|\psi_w|_{\Lambda\theta^{-1}r}\}|f|_{\theta^{-1}r}\\ &\leq \frac{\Lambda\theta^{-1}}{1-\Lambda\theta^{-1}}|\psi|_r\leq 1/4\times(1-\theta)^2\times|\psi|_r.\end{aligned}$$

Consider the power series expansion

$$\widetilde{\psi} := (1+\varepsilon)^{-1}(1+\eta_0)(D_\xi \psi)\circ f = \sum_{n\in\mathbf{N}^2} a_n Z^n.$$

If $\psi \in \mathfrak{B}_r$, we get $\widetilde{\psi} \in \mathfrak{B}_{\theta^{-1}r}$, and we have the integral representation, for any $n \in \mathbf{N}^2$,

$$a_n = \frac{\theta^2}{(2i\pi r)^2}\int_{|\zeta_1=|\zeta_2|=\theta^{-1}r} \widetilde{\psi}(\zeta)\zeta^{-n} d\zeta_1 d\zeta_2,$$

which gives the estimate

$$\begin{aligned} |a_n| &\leq 1/4 \times (1-\theta)^2 \frac{1+|\eta_0|_{\theta^{-1}r}}{1+|\varepsilon|_{\theta^{-1}r}} \times \frac{\theta^{|n|}}{r^{|n|}}|\psi|_r \\ &\leq 1/2 \times (1-\theta)^2 \frac{\theta^{|n|}}{r^{|n|}}|\psi|_r, \end{aligned}$$

for r small enough. But T_1 divides each term a_n by an integer, so we can make the estimates

$$|T_1\widetilde{\psi}|_r \leq \sum_n |a_n| r^{|n|} \leq 1/2(1-\theta)^2 \times |\psi|_r \sum_n \frac{\theta^{|n|}}{r^{|n|}} r^{|n|} \leq 1/2|\psi|_r \ .$$

We finally get

$$|T\psi|_r \leq 1/4 \times (1+|\eta|_r)|\psi|_r + 1/2 \times (1+|h|_r)|\psi|_r \leq 4/5|\psi|_r,$$

for r small enough. this concludes the proof of lemma C.1.11. $\square$

We have finally proved that in any case we have: $f \cong f_h$ for some $h \in \mathfrak{M}$, and

$$f_h = \left(z^a w^b(1+\lambda z^\mu w^\nu + h(z^\alpha w^\beta))^{-\beta/\delta}, z^c w^d (1+\lambda z^\mu w^\nu + h(z^\alpha w^\beta))^{\alpha/\delta}\right) . \tag{C.21}$$

Third step. Now we would like to simplify h. For that purpose, we use the following type of change of coordinates

$$\phi(z,w) = \left(z(1+\frac{\psi(z^\alpha w^\beta)}{z^\mu w^\nu})^{-\beta/\delta}, w(1+\frac{\psi(z^\alpha w^\beta)}{z^\mu w^\nu})^{\alpha/\delta}\right) \ ,$$

where $\psi \in \mathfrak{M}^r[[z]]$ or in $\mathfrak{M}^r$, and r is the least positive integer such that $r(\alpha,\beta) > (\mu,\nu)$ for the product order in $\mathbf{N}^2$.

If two maps f_{h_1} and f_{h_2} of the previous forms C.21 are given, ϕ conjugates them $\phi \circ f_{h_1} = f_{h_2} \circ \phi$ if and only if $h_1(x) - h_2(x) = \lambda\psi(x) - x^{-q}\psi(x^p)$. Hence, as before in the irreducible case, we reduce the problem of finding normal forms, to the computation of the cokernel of the linear operator

$\widetilde{T}^q_{\lambda,p} : \mathfrak{M}^r \to \mathfrak{M}^r$ defined by $\widetilde{T}^q_{\lambda,p}\psi(x) = \lambda\psi(x) - x^{-q}\psi(x^p)$. Notice that the operator $\widetilde{T}^q_{\lambda,p}$ is the same (with a shift given by taking the quotient by x^q) as the operator $T^{1,q}_{\lambda,p}$ studied previously in lemma C.1.6. For any $\psi \in \mathfrak{M}$, we have $T^{1,q}_{\lambda,p}\psi(x) = x^q\widetilde{T}^q_{\lambda,p}\psi(x)$. Recall we defined $\kappa := q/(p-1)$.

Lemma C.1.12.

Analytic action.

- *If $\kappa \notin \mathbf{N}$, or $\lambda \neq 1$, or $r > \kappa$ (f is not special), the operator $\widetilde{T}^q_{\lambda,p}$ is injective, and*
$$\mathfrak{M} = \widetilde{T}^q_{\lambda,p}\mathfrak{M}^r \oplus \mathfrak{M}_{r-1}[x].$$
- *If $\kappa \in \mathbf{N}$, $\lambda = 1$, and $r \leq \kappa$ (f is special),* $\ker \widetilde{T}^q_{\lambda,p} = \mathbf{C}x^\kappa$*, and*
$$\mathfrak{M} = \widetilde{T}^q_{\lambda,p}\mathfrak{M}^r \oplus \mathfrak{M}_{r-1}[x] \oplus \mathbf{C}x^\kappa.$$

Formal action.

- *If $\kappa \notin \mathbf{N}$, or $\lambda \neq 1$, or $r > \kappa$ (f is not special), the operator $\widetilde{T}^q_{\lambda,p}$ is injective, and*
$$\mathfrak{M}[[z]] = \widetilde{T}^q_{\lambda,p}\mathfrak{M}^r[[z]] \oplus \mathfrak{M}_{r-1}[x].$$
- *If $\kappa \in \mathbf{N}$, $\lambda = 1$, and $r \leq \kappa$ (f is special),* $\ker \widetilde{T}^q_{\lambda,p} = \mathbf{C}x^\kappa$*, and*
$$\mathfrak{M}[[z]] = \widetilde{T}^q_{\lambda,p}\mathfrak{M}^r[[z]] \oplus \mathfrak{M}_{r-1}[x] \oplus \mathbf{C}x^\kappa.$$

Proof. Take $\psi \in \ker \widetilde{T}^q_{\lambda,p}$. Then, we automatically have $T^{1,q}_{\lambda,p}\psi = 0$, and lemma C.1.6 shows that ψ is identically zero when $\kappa \notin \mathbf{N}$ or $\lambda \neq 1$, and $\psi \in \mathbf{C}x^\kappa$ otherwise. This gives the statements about the injectivity of $\widetilde{T}^q_{\lambda,p}$.

We use the notation $\underline{\kappa}$ for the greatest integer strictly less than κ. We also use the convention that $x^\kappa = 0$ when κ is not an integer. We apply now both lemmas C.1.7, and B.2.4. They give the following decomposition of $\mathfrak{M}$ (the same is true for $\mathfrak{M}[[z]]$):

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \mathfrak{M}^{[\kappa]+1} \oplus (\mathfrak{M}_{\underline{\kappa}}[x] \cap \mathfrak{M}^r) \oplus \mathfrak{M}_{r-1}[x] \oplus \mathbf{C}x^\kappa \\ &= \widetilde{T}^q_{\lambda,p}(\mathfrak{M}^{[\kappa]+1}) \oplus \widetilde{T}^q_{\lambda,p}(\mathfrak{M}_{\underline{\kappa}} \cap \mathfrak{M}^r) \oplus \mathfrak{M}_{r-1}[x] \oplus \mathbf{C}x^\kappa. \end{aligned}$$

Now if $\kappa \notin \mathbf{N}$, we have $\underline{\kappa} = [\kappa]$ so that in that case,

$$\mathfrak{M} = \widetilde{T}^q_{\lambda,p}\mathfrak{M}^r \oplus \mathfrak{M}_{r-1}[x].$$

When $\kappa \in \mathbf{N}$, and $\lambda \neq 1$, $\mathbf{C}\widetilde{T}^q_{\lambda,p}x^\kappa = \mathbf{C}x^\kappa$, hence we have again,

$$\mathfrak{M} = \widetilde{T}^q_{\lambda,p}\mathfrak{M}^r \oplus \mathfrak{M}_{r-1}[x].$$

Finally, when $\kappa \in \mathbf{N}$, and $\lambda = 1$,

$$\mathfrak{M} = \widetilde{T}^q_{\lambda,p}\mathfrak{M}^r \oplus \mathfrak{M}_{r-1}[x] \oplus \mathbf{C}x^\kappa.$$

$\square$

This concludes the proof of the existence of normal forms for each class of contracting rigid germ.

C.2 Uniqueness of normal forms and automorphism groups.

- **Class 1.**

The case when f is invertible is well-known, and we will not give any proof of this fact (see [NA74]).

Before dealing with the non invertible cases, we state two lemmas which will be used several times during the proof.

Lemme C.2.1.

Let f_1 and f_2 be two normal forms not belonging to the first class and ϕ a formal biholomorphism conjugating them $\phi \circ f_1 = f_2 \circ \phi$.

- *If f_1 and f_2 are irreducible, and $\mathcal{C}(f_1) = \mathcal{C}(f_2) = \{z = 0\}$, ϕ can be written under the form $\phi(z, w) = (Az(1 + \psi), \phi_2)$ for some $A \in \mathbf{C}^*$, $\psi \in \mathfrak{M}$, and the action of f_1 and f_2 on $\pi_1(\Delta^* \times \Delta)(\cong \mathbf{Z})$ are equal.*

- *If f_1 and f_2 are reducible, there exist A_1, $A_2 \in \mathbf{C}^*$, $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}$, such that either $\phi = (A_1 z(1 + \psi_1), A_2 w(1 + \psi_2))$, or $\phi = (A_1 w(1 + \psi_1), A_2 z(1 + \psi_2))$ In particular, either $M(f_1) = M(f_2)$, or $M(f_1)\Sigma = \Sigma M(f_2)$, with $\Sigma(z, w) = (w, z)$, and where $M(f_i)$ denotes the action of f_i on $\pi_1(\Delta^* \times \Delta^*)$.*

Lemme C.2.2.

Let f be a contracting germ, $h \in \mathfrak{M}[[z]]$ a formal germ, and $p \in \mathbf{N}^*$ an integer such that $(1 + h)^p = (1 + h \circ f)$. Then $h \equiv 0$ is identically zero.

Proof. Lemma C.2.1

It is an immediate consequence of the fact that ϕ should map $\mathcal{C}(f_1^2)$ which is equal in any cases to $\mathcal{C}(f_1^\infty)$ onto $\mathcal{C}(f_2^2)$. □

Proof. Lemma C.2.2

If $(1+h)^p = (1+h\circ f)$, one also has for any $n \in \mathbf{N}$, $(1+h)^{p^n} = (1+h\circ f^n)$. Assume h is not identically zero, and expand $h = h_k + \sum_{l>k} h_l$ in power series, where h_l is a homogeneous polynomial of degree l, and $h_k \not\equiv 0$. Then $(1 + h)^{p^n} = 1 + p^n h_k +$ lower order terms, whereas $1 + h \circ f^n = 1 + h_k \circ f^n +$ l.o.t. As f is contracting, $h_k \circ f^n$ tends to 0, and its homogeneous part of degree k tends to zero too. This gives a contradiction. □

If ψ is a holomorphic germ, we denote by $\mu(\psi, 0)$ the order of vanishing of ψ at the origin.

- **Class 2.**

In this case, a normal form is given by $f(z, w) = (\alpha z, wz^q + P(z))$.

We first remark that $\alpha = \mathrm{tr} Df_0$ and $q = \mu(\det Df_z, 0)$ are both formally invariant. Hence the formal normal form is unique.

Take two maps $f_i(z,w) = (\alpha z, wz^q + P_i(z))$ for $i = 1,2$ with $\deg P_i \leq q$, and a local formal biholomorphism $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ such that $\phi \circ f_1 = f_2 \circ \phi$. By lemma C.2.1, $\phi_1 = \zeta z(1+\psi)$ for some $\zeta \in \mathbf{C}^*$ and $\psi \in \mathfrak{M}[[z]]$, hence $\phi_{1z} = \zeta(1+\widetilde{\psi})$ with $\widetilde{\psi} := (z\psi)_z$. From $\phi_{1z} \circ f^n = \phi_{1z}$ one infers $1 + \widetilde{\psi} \circ f_1^n = 1 + \widetilde{\psi}$ hence $\widetilde{\psi} \equiv 0$ by lemma C.2.2, and $\psi \equiv 0$. Thus $\phi_1(Z) = \zeta z$, and as ϕ is a biholomorphism $\xi := \phi_{2w}(0) \neq 0$. Similarly, $\phi_{2w} \circ f_1 = \zeta^q \phi_{2w}$ which implies both $\zeta^q = 1$, and that ϕ_{2w} is constant equal to ξ. Therefore, we can write $\phi_2(z,w) = \xi w + h(z)$, with $h \in \mathfrak{M}[[z]]$. We obtain $h(\alpha z) - z^q h(z) = P_2(\zeta z) - \xi P_1(z)$. Using the notation of lemma C.1.5, this means $T^{1,q}_{\alpha,1} h(z) = P_2(\zeta z) - \xi P_1(z)$. The right hand side is a polynomial of degree less than q, hence by lemma C.1.5, the germ h is identically zero and $P_1(\zeta z) = \xi P_2(z)$. Whence ϕ is linear of the form $\phi(z,w) = (\zeta z, \xi w)$. Both results about uniqueness of normal forms and computation of automorphism groups are easily deduced from this.

• **Class 3.**

Recall the normal form is given by $f(z,w) = (\alpha z, w^l)$. The uniqueness and the equivalence of formal and analytic classification is immediate because $\alpha = \mathrm{tr} Df_0$, and $l = \mu(\det Df_Z, 0) + 1$ are formally invariant.

Let $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ be a formal biholomorphism commuting with f, that is $\phi \circ f = f \circ \phi$ We get $lw^{l-1}\phi_{1w} \circ f = \alpha \phi_{1w}$. By looking at multiplicities of both hand sides , we infer $\phi_{1w} \equiv 0$. This forces $\lambda := \phi_{1z}(0)$ to be non-zero. Now for any $n \in \mathbf{N}$, $\phi \circ f^n = f^n \circ \phi$, hence $\phi_{1z} \circ f^n = \phi_{1z}$, and we conclude that $\phi_1(Z) = \lambda z$. On the other hand, by lemma C.2.1, $\phi_2 = \zeta w(1+\psi)$ for some $\zeta \in \mathbf{C}^*$ and $\psi \in \mathfrak{M}[[z]]$. As $\phi_2 \circ f_1^n = \phi_2^{l^n}$, one has $1 + \psi \circ f_1^n = (1+\psi)^{l^n}$ hence $\psi \equiv 0$ by lemma C.2.2. The map ϕ is thus linear, $\phi(z,w) = (\lambda z, \zeta w)$. It is a straight computation to get the stated results.

• **Class 4.**

A normal form is given by $f(z,w) = (z^p, \lambda w z^q + P(z))$. Both coefficients p and q are formally invariant by lemma C.2.1, and as $p + q - 1 = \mu(\det Df_z, 0)$.

Let us take now two normal forms $f_i(z,w) = (z^p, \lambda_i w z^q + P_i(z))$ for $i = 1,2$, and $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ a formal biholomorphism conjugating them $\phi \circ f_1 = f_2 \circ \phi$. By lemma C.2.1, $\phi_1 = \zeta z(1+\psi)$, and we have $\zeta^p = \zeta$, and $1 + \psi \circ f_1 = (1+\psi)^p$. Hence $\psi \equiv 0$ by lemma C.2.2, and $\zeta \in \mathbf{U}_{p-1}$. On the other hand, we also have $\lambda_2 \zeta^q z^q \phi_{2w} = \lambda_1 z^q \phi_{2w} \circ f_1$. As ϕ is a biholomorphism, $\phi_{2w}(0) \neq 0$, hence $\lambda_2 = \zeta^q \lambda_1$. We thus infer for any $n \in \mathbf{N}$, $\phi_{2w}(Z) = \phi_{2w}(f_1^n(Z))$, whence ϕ_{2w} is constant, and $\phi_2(z,w) = bw + \psi(z)$ for some $\psi \in \mathfrak{M}[[z]]$. Therefore $bP_2(z) - P_1(\zeta z) = \lambda_2 z^q \psi(z) - \psi(z^p) := T^{1,q}_{\lambda_2,p}\psi(z)$ in the notations of lemma C.1.6.

Recall that f_1 is special when $p-1$ is a multiple of q and $\lambda_1 = 1$, and notice that f_1 is special if and only if f_2 is. In fact p and q are invariant under analytic conjugacy, and one has $\lambda_2 = \zeta^q \lambda_1$ with $\zeta^{p-1} = 1$, hence $\lambda_1^\tau = \lambda_2^\tau$, where $\tau = (p-1)/\gcd\{p-1, q\}$.

Assume now that neither f_1 nor f_2 are special. Then both polynomials

P_1 and P_2 have degree less than q. Applying Lemma C.1.6, we get $\psi \equiv 0$, hence $bP_2(z) = P_1(\zeta z)$, and we conclude that $\phi(z,w) = (\zeta z, bw)$ is linear.

When f_1 and f_2 are special, the polynomial $Q(z) := bP_2(z) - P_1(\zeta z)$ is a sum of a polynomial of degree less than q, and a monomial of degree $q+\kappa$ where $\kappa := q/(p-1)$. By lemma C.1.6, we again conclude that Q is identically zero, and that $\psi(z) = az^\kappa$ for some constant $a \in \mathbf{C}$, so that $\phi(z,w) = (\zeta z, bw + az^\kappa)$.

An immediate check yields then the stated results.

• **Class 5.**

A normal form of this class is given by $f(z,w) = (\alpha z, z^c w^d)$. The uniqueness is obvious by lemma C.2.1, and as $\alpha = \mathrm{tr} Df_0$.

Let $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ be a formal biholomorphism commuting with f. We necessarily have $\phi_1 = \lambda z(1+\psi)$ with $\lambda \in \mathbf{C}^*$ and $\psi \in \mathfrak{M}[[z]]$. But as for any $n \in \mathbf{N}$, $\phi_1 \circ f^n = \alpha^n \phi_1$, we infer $(1 + \psi \circ f^n) = (1+\psi)$, and $\psi \equiv 0$, hence $\phi_1(Z) = \lambda z$. We also have $\phi_2 = \mu w(1+h)$ with $h \in \mathfrak{M}[[z]]$, and $\phi_2(\alpha z, z^c w^d) = \lambda^c z^c \phi_2(z,w)^d$. Hence $\lambda^c \mu^d = \mu$, and $(1 + h\circ f) = (1+h)^d$. Thus $h \equiv 0$ by Lemma C.2.2, and $\phi(z,w) = (\lambda z, \mu w)$ with $\lambda^c \mu^{d-1} = 1$, and this concludes the proof.

• **Class 6.**

Let us take two normal forms $f_i(Z) = \lambda_i Z^{M_i}$ for $i = 1,2$, with $\lambda_i \in (\mathbf{C}^*)^2$, and $M_i \in M(2,\mathbf{N})$, and let ϕ be a formal biholomorphism conjugating them

$$\phi(\lambda_1 Z^{M_1}) = \lambda_2 \phi(Z)^{M_2}. \tag{C.22}$$

Lemme C.2.3.

Under the conditions above, the germ ϕ is linear. More precisely, there exist $\varepsilon \in \{0,1\}$, $\mu = (\mu_1,\mu_2) \in (\mathbf{C}^*)^2$, such that

$$\phi(Z) = \Sigma^\varepsilon(\mu_1 z, \mu_2 w) = \Sigma^\varepsilon(\mu Z),$$

with $M_1\Sigma^\varepsilon = \Sigma^\varepsilon M_2$, and $\mu\lambda_1 = \lambda_2^{\Sigma^\varepsilon}\mu^{M_1}$.

Proof.

By Lemma C.2.1, we can write ϕ under the form $\phi(z,w) = \Sigma^\varepsilon(\mu_1 z(1+\psi_1), \mu_2 w(1+\psi_2)) = \Sigma^\varepsilon(\mu Z(1+\psi(Z)))$, with $\varepsilon \in \{0,1\}$, $\mu \in (\mathbf{C}^*)^2$, and $\psi_i \in \mathfrak{M}[[z]]$. But equation (C.22) gives

$$\Sigma^\varepsilon\left(\mu\lambda_1 Z^{M_1}(1+\psi\circ f_1)\right) = \lambda_2(\Sigma^\varepsilon(\mu Z(1+\psi)))^{M_2},$$

or

$$(\mu\lambda_1)^{\Sigma^\varepsilon} Z^{M_1\Sigma^\varepsilon}(1+\psi\circ f_1)^{\Sigma^\varepsilon} = (\lambda_2 \mu^{\Sigma^\varepsilon M_2}) Z^{\Sigma^\varepsilon M_2}(1+\psi))^{\Sigma^\varepsilon M_2}.$$

Hence $M_1\Sigma^\varepsilon = \Sigma^\varepsilon M_2$, and $\mu\lambda_1 = \lambda_2^{\Sigma^\varepsilon}\mu^{M_1}$. Finally we get $(1+\psi\circ f_1) = (1+\psi)^{M_1^n}$ hence by Lemma C.2.2, we infer $\psi \equiv 0$. $\square$

Lemma C.2.3 proves that formal and analytic classification are equivalent, and shows the stated results about the uniqueness of normal forms in the case $1 \notin \mathrm{Spec} M_1 = \mathrm{Spec} M_2$, as in this case $f_i \cong Z^{M_i}$.

If now 1 belongs to $\mathrm{Spec}(M_i)$, we choose a vector $\kappa = {}^t(\kappa_1, \kappa_2) \in \mathbf{Z}^2$ with integer coefficients spanning $\ker(M_1 - \mathrm{Id})$. If we raise the relation $\lambda_1 = \lambda_2^{\Sigma^\varepsilon} \mu^{M_1 - \mathrm{Id}}$ to the power κ, we get

$$\lambda_1^\kappa = \lambda_2^{\Sigma^\varepsilon \kappa} \mu^{(M_1 - \mathrm{Id})\kappa} = \lambda_2^{\Sigma^\varepsilon \kappa} .$$

Conversely, assume that this last equation holds, $(\lambda_1 \lambda_2^{-\Sigma^\varepsilon})^\kappa = 1$. One can then find a $\mu \in (\mathbf{C}^*)^2$ so that $\mu^{M_1 - \mathrm{Id}} = \lambda_1 \lambda_2^{-\Sigma^\varepsilon}$, and $\phi(Z) = \mu Z$ satisfies $\phi \circ f_1 = f_2 \circ \phi$. We conclude that $f_1 \cong f_2$ if and only if $M_1 \Sigma^\varepsilon = \Sigma^\varepsilon M_2$ for some $\varepsilon \in \{0, 1\}$, and $\lambda_1^\kappa = \lambda_2^{\Sigma^\varepsilon \kappa}$ with κ spanning $\ker(M_1 - \mathrm{Id})$.

Let us now compute the automorphism group for a normal form of this class. Fix a normal form $f(Z) = \lambda Z^M$. By Lemma C.2.3, we have to characterize the group of linear transformation $\phi(Z) = \Sigma^\varepsilon(\mu Z)$ commuting with f.

The action f on the pair of lines $(\{z = 0\}, \{w = 0\})$ induces a natural exact sequence of groups:

$$0 \to \mathrm{Aut}^0(f) \to \mathrm{Aut}(f) \to G \to 0 \tag{C.23}$$

where $G \subset \mathfrak{S}(\{z = 0\}, \{w = 0\}) \cong \mathbf{Z}/2$, and $\mathrm{Aut}^0(f)$ is the normal subgroup of $\mathrm{Aut}(f)$ consisting of diffeomorphisms of the form $(\mu_1 z, \mu_2 w)$.

Let us compute first $\mathrm{Aut}^0(f)$. Note that $\mathrm{Aut}^0(f)$ can be naturally identified with $\{\mu^{M - \mathrm{Id}} = 1\} \subset (\mathbf{C}^*)^2$. One easily checks the following lemma.

Lemme C.2.4. *Let L be the closed subgroup of $\mathbf{C}^2$ defined by*

$$L = \{(x, y) \in \mathbf{C}^2 \text{ such that } (M - \mathrm{Id}).\, {}^t(x, y) \in \mathbf{Z}^2\} .$$

We have the isomorphism

$$\mathrm{Aut}^0(f) \cong L/\mathbf{Z}^2 .$$

If the rank of $M - \mathrm{Id}$ is 2, L is a lattice in $\mathbf{C}^2$. In this case, there exists a basis e_1, e_2 of L and two integers d_1, d_2 such that

$$\begin{aligned} L &= \mathbf{Z} e_1 \oplus \mathbf{Z} e_2 , \\ \mathbf{Z}^2 &= \mathbf{Z} d_1 e_1 \oplus \mathbf{Z} d_2 e_2 . \end{aligned}$$

Hence $\mathrm{Aut}^0(f) \cong \mathbf{Z}/d_1 \times \mathbf{Z}/d_2$ and $\#\mathrm{Aut}^0(f) = d_1 d_2 = |\det(M - \mathrm{Id})|$.

If the rank of $M - \mathrm{Id}$ is 1, one can still find e_1, e_2 in L and an integer d such that

$$\begin{aligned} L &= \mathbf{C} e_1 \oplus \mathbf{Z} e_2 , \\ \mathbf{Z}^2 &= \mathbf{Z} e_1 \oplus \mathbf{Z} d e_2 . \end{aligned}$$

Hence $\mathrm{Aut}^0(f) \cong \mathbf{C}^* \times \mathbf{Z}/d$ with $d = \mathrm{tr}(M - \mathrm{Id})$.

To conclude the proof, we have to understand the structure of the exact sequence (C.23), and compute the group G. Recall that $f(z,w) = (\lambda_1 z^a w^b, \lambda_2 z^c w^d)$. Note also that Σ and $(\mu_1 z, \mu_2 w)$ commute if and only if $\mu_1 = \mu_2$. This shows that $\mathrm{Aut}(f)$ can not be a direct product when G is non trivial.

Assume first that $\Sigma M \neq M\Sigma$. Then G is reduced to the identity and $\mathrm{Aut}(f) = \mathrm{Aut}^0(f)$.

If $\Sigma M = M\Sigma$ and $1 \notin \mathrm{Spec}(M)$, we can assume that $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. One checks that $\Sigma \circ f = f \circ \Sigma$, hence $G \cong \mathbf{Z}/2$ and $\mathrm{Aut}(f) \cong \mathrm{Aut}^0(f) \rtimes \mathbf{Z}/2$.

If $\Sigma M = M\Sigma$ and $1 \in \mathrm{Spec}(M)$, the matrix M can be written under the form

$$M = \begin{bmatrix} a & a-1 \\ a-1 & a \end{bmatrix} .$$

If $\phi = (\mu_1 w, \mu_2 z)$ commutes with f, then $\lambda_1/\lambda_2 = (\mu_1\mu_2)^{a-1} = \lambda_2/\lambda_1$, hence $\lambda_1^2/\lambda_2^2 = 1$.

If $\lambda_1^2/\lambda_2^2 \neq 1$, $\mathrm{Aut}(f) = \mathrm{Aut}^0(f)$.

If $\lambda_1/\lambda_2 = 1$, one has $\Sigma \in \mathrm{Aut}(f)$ and $\mathrm{Aut}(f) \cong \mathrm{Aut}^0(f) \rtimes \mathbf{Z}/2$.

If $\lambda_1/\lambda_2 = -1$ we define a morphism of group $\rho : \mathrm{Aut}(f) \to \mathbf{Z}/2(a-1)$ by $\rho(\mu_1 z, \mu_2 w) = \rho(\mu_2 w, \mu_1 z) = \mu_1\mu_2$. This is easily seen to be surjective and the kernel is exactly given by the set of maps of the form $(z,w) \to (\theta z, \theta^{-1} w)$ for $\theta \in \mathbf{C}^*$. We hence have the following exact sequence

$$0 \to \mathbf{C}^* \to \mathrm{Aut}(f) \xrightarrow{\pi} \mathbf{Z}/2(a-1) \to 0 .$$

The morphism π can be lifted to $\mathrm{Aut}(f)$ (consider $(z,w) \to (\zeta w, z)$ with $\zeta^{a-1} = -1$) hence $\mathrm{Aut}(f) \cong \mathbf{C}^* \rtimes \mathbf{Z}/2(a-1)$.

We leave to the reader to check that the action respectively of $\mathbf{Z}/2$ and $\mathbf{Z}/2(a-1)$ on $\mathrm{Aut}^0(f)$ are given by the ones defined in Automorphism group 6. One should be aware that we used additive notations in the proof and multiplicative ones in the statements.

• **Class 7.**

Let us take two normal forms for $i = 1, 2$,

$$\begin{aligned} f_i(z,w) &= (z^{a_i} w^{b_i}(1+\varepsilon_i(Z))^{-\beta_i/\delta_i}, z^{c_i} w^{d_i}(1+\varepsilon_i(Z))^{\alpha_i/\delta_i}) , && \text{(C.24)} \\ \varepsilon_i(Z) &= \lambda_i z^{\mu_i} w^{\nu_i} + P_i(z^{\alpha_i} w^{\beta_i}) , && \text{(C.25)} \end{aligned}$$

and a formal biholomorphism ϕ conjugating them $\phi \circ f_1 = f_2 \circ \phi$.

By Lemma C.2.2, there exists $\varepsilon \in \{0,1\}$, $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in (\mathbf{C}^*)^2$ and $\widetilde{\psi} = (\widetilde{\psi_1}, \widetilde{\psi_2})$ with $\widetilde{\psi}_i \in \mathfrak{M}[[z]]$ such that

$$\phi(z,w) = \Sigma^\varepsilon(\theta_1 z(1+\widetilde{\psi}_1(z,w)), \theta_2 w(1+\widetilde{\psi}_2(z,w))) . \qquad \text{(C.26)}$$

Hence $M_1 = \Sigma^\varepsilon M_2 \Sigma^\varepsilon$.

Let us first assume that $\varepsilon = 0$. We let $M := M_1 = M_2$. As the coefficients a_i, b_i, c_i, d_i, α_i, β_i, p_i are all uniquely determined by M they are equal. In the sequel we will write them without indices. We also infer $\mu_1 = \mu_2 (:= \mu)$, $\nu_1 = \nu_2 (:= \nu)$, $\delta_1 = \delta_2 (:= \delta)$, and $q_1 = q_2 (:= q)$.

Lemme C.2.5.

Assume $\phi \circ f_1 = f_2 \circ \phi$ with $\phi(z,w) = (\theta_1 z(1 + \widetilde{\psi}_1(z,w)), \theta_2 w(1 + \widetilde{\psi}_2(z,w)))$. We let $x(z,w) := z^\alpha w^\beta$ and $y(z,w) := z^\mu w^\nu$.

- *If f_1 (or equivalently f_2) is not special, there exists $\theta \in (\mathbf{C}^*)^2$ such that*
$$\phi(Z) = \theta Z \ . \tag{C.27}$$
- *If f_1(or equivalently f_2) is special, there exists $\theta \in (\mathbf{C}^*)^2$ and $b \in \mathbf{C}^*$ such that*
$$\phi(Z) = (\theta_1 z(1 + by^{-1}x^\kappa)^{-\beta/\delta}, \theta_2 w(1 + by^{-1}x^\kappa)^{\alpha/\delta}) \ . \tag{C.28}$$

Conversely a biholomorphism of the form (C.27) or (C.28) conjugates f_1 to f_2 if and only if $\theta^M = \theta$, $P_1(x) = P_2(\zeta x)$, and $\lambda_1 = \zeta^q \lambda_2$ with $\zeta := \theta_1^\alpha \theta_2^\beta$.

Using Lemma C.2.5 we immediately obtain the stated results about the uniqueness of normal form.

For computing the automorphism group of a normal form $f(= f_1 = f_2)$ we use the exact sequence C.23. Lemma C.2.5 gives $\mathrm{Aut}^0(f) \cong \mathbf{U}_l$ for some $l \in \mathbf{N}$ if f is not special and $\mathrm{Aut}^0(f) \cong \mathbf{C} \rtimes \mathbf{U}_l$ otherwise (the details are left to the reader). Assume now that $\mathrm{Aut}(f) \neq \mathrm{Aut}^0(f)$. It implies both $M\Sigma = \Sigma M$ and $\mu = \nu$. But as the rank of M is 1, we can write M under the form
$$M(f) = a \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \ .$$
Hence $\alpha = \beta = 1$ and $\delta = \alpha\nu - \beta\mu = 0$ which gives a contradiction.

Proof. Lemma C.2.5.

Set $h(z,w) := -1 + (\phi_1/\theta_1 z)^\alpha (\phi_2/\theta_2 w)^\beta$. By equation (C.26) it defines a holomorphic map vanishing at the origin. We have $(1 + h \circ f_1) = (1+h)^p$, hence by Lemma C.2.2 $h \equiv 0$. We can therefore write ϕ under the form
$$\phi(z,w) = \Big(\theta_1 z(1 + \varphi(z,w))^{-\beta/\delta}, \theta_2 w(1 + \varphi(z,w))^{\alpha/\delta}\Big) \ , \tag{C.29}$$
with $\varphi \in \mathfrak{M}[[z]]$.

We will denote by $x = x(z,w) := z^\alpha w^\beta$ and $y = y(z,w) := z^\mu w^\nu$. We define $\zeta := x(\theta)$ and $\chi := y(\theta)$. Note that we can rewrite equation (C.25) under the form
$$\varepsilon_i(z,w) = \lambda_i y + P_i(x) \ ,$$
for $i = 1, 2$.

The equation $\phi \circ f_1 = f_2 \circ \phi$ combined with (C.29) yields

$$\theta^M = \theta \,, \tag{C.30}$$
$$1 + \lambda_2 \chi y(1+\varphi) + P_2(\zeta x) = 1 + \lambda_1 y + P_1(x) + (1+\varepsilon_1)\varphi \circ f_1 \tag{C.31}$$

Equation (C.30) implies that $\zeta = x(\theta) \in \mathbf{U}_{p-1}$ and $\chi = y(\theta) = \zeta^q$.

Recall we defined the vector field $\xi(z,w) := (\beta z, \alpha w)$ or given as an operator of derivation $D_\xi := \alpha w \partial/\partial w - \beta z \partial/\partial z$. We proved (see equation C.17)

$$D_\xi\,(\varphi \circ f_1) = \frac{D_\xi \varepsilon_1}{\delta(1+\varepsilon_1)}\,(D_\xi \varphi) \circ f_1 = \frac{\lambda y}{1+\varepsilon_1}\,(D_\xi \varphi) \circ f_1 \ .$$

If we apply D_ξ to equation (C.31) we obtain

$$\lambda_2 \zeta^q \delta y + \lambda_2 \zeta^q y(\delta\varphi + D_\xi \varphi) = \lambda_1 \delta y + \lambda_1 y(\delta \varphi \circ f_1 + (D_\xi \varphi) \circ f_1) \ .$$

The functions φ and $D_\xi \varphi$ vanish at the origin hence $\lambda_2 \zeta^q = \lambda_1$. Note that $y^{-1} D_\xi(y\varphi) = \delta\varphi + D_\xi \varphi$. So that we also have $D_\xi(y\varphi) = D_\xi(y\varphi) \circ f_1$, and $D_\xi(y\varphi) \equiv 0$. We can hence find $\psi \in \mathfrak{M}[[x]]$ such that $\varphi(z,w) = y^{-1}\psi(x) = (z^\mu w^\nu)^{-1}\psi(z^\alpha w^\beta)$. Recall we defined r to be the minimal integer such that $\alpha r \geq \mu$ and $\beta r \geq \nu$. We have $\psi \in \mathfrak{M}^r[[x]]$. Finally equation C.29 can be rewritten

$$P_1(x) - P_2(\zeta x) = \lambda_1 \psi(x) - x^{-q}\psi(x^p) = \widetilde{T}^q_{\lambda_1,p}\psi(x) \ ,$$

in the notations of Lemma C.1.12. We now discuss as in the case of class 4. Remark first that f_1 is special ($p-1$ divides q and $\lambda = 1$) if and only if f_2 is. Suppose first that none of them are special. By lemma C.1.12, we deduce that $\psi \equiv 0$, and $\phi(Z) = \theta Z$ is linear. When f_1 is special, lemma C.1.12 yields $\psi(x) = bx^\kappa$ for some $b \in \mathbf{C}$, hence $\phi(Z) = (\theta_1 z(1+by^{-1}x^\kappa)^{-\beta/\delta}, \theta_2 w(1+by^{-1}x^\kappa)^{\alpha/\delta})$. This concludes the proof. $\square$

C.3 Computation of the topological degree

The only non obvious cases are the fourth, sixth, and seventh ones.

• **Class 4.**

Recall $f(z,w) = (z^p, \lambda w z^q + P(z))$, with $P(z) = \sum_{k \le q} a_k z^k$. We are going to prove the following.

Lemme C.3.1. *For any $r > 0$ small enough, there exists a small constant $0 < \varepsilon \le r$ such that for all $Z_0 = (z_0, w_0)$ with $|Z_0| \le \varepsilon$ and $z_0 \neq 0$, the set of preimages of $f(Z_0)$ inside the polydisk of radius r has cardinality*

$$\#(f^{-1}\{f(Z_0)\} \cap \Delta_r^2) = d,$$

with $d = \gcd\{p, k \le q$ such that $a_k \neq 0\}$.

Proof. Note $Z_0 = (z_0, w_0)$ and pick a $Z = (z,w) \in \Delta_r^2$ such that $f(Z) = f(Z_0)$. We first infer $z = \zeta z_0$ with $\zeta^p = 1$. The second coordinate is then uniquely determined by the formula

$$\lambda(w_0 - \zeta^q w) z_0^q = P(\zeta z_0) - P(z_0). \tag{C.32}$$

For any $\zeta \in \mathbf{U}_p$, we can find a constant $C(\zeta)$, and an integer $r(\zeta) := \min\{k \in \mathbf{N}, a_k(\zeta^k - 1) \neq 0\}$ such that for all $|x| \le \varepsilon$ sufficiently small,

$$C(\zeta)^{-1}|x|^{r(\zeta)} \le |P(\zeta x) - P(x)| \le C(\zeta)|x|^{r(\zeta)}\ .$$

If $P(\zeta x) - P(x) \equiv 0$, we define $r(\zeta)$ to be ∞. We have then

$$|z_0|^{r(\zeta)} \le C(\zeta) \times |P(\zeta z_0) - P(z_0)| \le (2r|\lambda| C(\zeta))|z_0|^q. \tag{C.33}$$

Take $r > 0$ small enough so that $2r \min\{C(\zeta), \zeta \in \mathbf{U}_p\} < 1$, and a positive $\varepsilon > 0$ with $\varepsilon(1 + |\lambda|^{-1} \max\{C(\zeta), \zeta \in \mathbf{U}_p\}) \le r$.

We claim, if $|Z_0| \le \varepsilon$, the set $\{|Z| \le r,$ such that $f(Z) = f(Z_0)\}$ is in natural bijection with $E := \{\zeta \in \mathbf{U}_p,$ such that $r(\zeta) \ge q+1\}$.

In fact, $Z = (\zeta z_0, w)$ for some $\zeta \in \mathbf{U}_p$, and $w \in \mathbf{C}$ given by C.32. Equation C.33 yields $r(\zeta) \ge q+1$. Conversely, pick $\zeta \in \mathbf{U}_p$ such that $r(\zeta) \ge q+1$, and find $w \in \mathbf{C}$ satisfying C.32. Then $|w| \le |\lambda|^{-1}(C(\zeta)+1)|z_0| \le r$, which concludes the proof of our claim.

Finally, we easily check $E = \{\zeta \in \mathbf{U}_p,$ such that $\forall k \le q,\ a_k \neq 0 \Rightarrow \zeta^k = 1\}$, hence $\#E = \gcd\{p, k \le q$ such that $a_k \neq 0\} = d$. □

• **Class 6.**

Our map is given by $f(Z) = Z^M$ where $\det M \neq 0$. Its restriction induces a finite-to-one covering g on $(S^1)^2$. For any points p outside $\{zw = 0\}$ the number of preimages $f^{-1}\{p\}$ is the same equal to $f^{-1}\{(1,1)\}$, hence we $\deg(f) = \deg(g)$. Note $\pi : \mathbf{R}^2 \to (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^2 = (S^1)^2$ the natural projection, and (x_1, x_2) coordinates on $\mathbf{R}^2$, and define the volume form $\omega := \pi_*(dx_1 \wedge dx_2)$ on the torus. Then we have

$$\begin{aligned} \deg(g) &= (\int_{(S^1)^2} \omega)^{-1}(\int_{(S^1)^2} f^*\omega) \\ &= \int_{(S^1)^2} f^*\omega = |\det(M)| \end{aligned}$$

which concludes the proof.

• **Class 7.**

Set $\Pi(z,w) = (z^\alpha w^\beta, z^\mu w^\nu)$, and let us prove first the inequality $\deg(f) \geq \deg(\Pi)$. The matrix M can be written in the following form

$$M(f) = \begin{bmatrix} k\alpha & l\alpha \\ k\beta & l\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix},$$

for some $k, l \in \mathbf{N}$. So that we have the commutative diagram with $h(x,y) = \big(x^k(1+\lambda y + P(x))^{-\beta/\delta}, x^l(1+\lambda y+P(x))^{\alpha/\delta}\big)$. We deduce from this the inequality $\deg(f) \geq \deg(\Pi)$.

Let us assume now that $\deg(\Pi) = 1$. By what preceeds, it is equivalent to $|\delta| = 1$, and without loss of generality, we can assume that $\delta = 1$.

Lemme C.3.2. *For four given non-negative integers satisfying $\alpha\nu - \beta\mu = 1$, then either $(\alpha-\mu)(\beta-\nu) \geq 0$, or $\alpha = \nu = 1$, and $\beta = \mu = 0$, or $\alpha = \nu = 0$, and $\beta = \mu = 1$.*

Proof. If $(\alpha - \mu)(\beta - \nu) < 0$, we can assume $\alpha \geq \mu + 1$, and $\nu \geq \beta + 1$. We infer $1 = \alpha\nu - \beta\mu \geq 1 + \beta + \mu$. Hence $\beta = \mu = 0$, and this implies $\alpha = \nu = 1$. □

Note in our case, only the first possibility can occur, because if $(\alpha, \beta) = (1,0)$ this forces $b = d = 0$, and we have seen that $b+d+\nu$ should be greater or equal than 2, hence $\nu \geq 2$.

Let k be the greatest non-negative integer such that $\mu_0 := \mu - k\alpha \geq 0$, and $\nu_0 := \nu - k\beta \geq 0$. By the very definition of r, we have $k < r$. By the preceding lemma applied to (α, β) and (μ_0, ν_0), and maximality of k, we get $(\mu_0, \nu_0) < (\alpha, \beta)$. But this means that $k + 1 \geq r$. Hence $r = k + 1$. We thus get

$$\begin{aligned} &(\mu, \nu) \qquad r(\alpha, \beta); \\ &(\mu, \nu) \qquad (r-1)(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Hence $q < rp$, and $q > (r-1)p$, which gives that q/p can not be an integer, and that $r = [q/p] + 1$.

One checks that $\Pi(\Delta^2_\varepsilon) - \{(0,0)\} = \{|x|^\nu < \varepsilon |y|^\beta,\ |y|^\alpha < \varepsilon |x|^\mu\}$. As Π is a modification, to compute the degree of f is sufficient to compute the degree of the composition $g \circ \Pi$, where $g(x,y) = (x^p, x^q(1 + \lambda y + P(x)))$.

Lemme C.3.3.

For any $r > 0$ small enough, there exists a positive real $0 < \varepsilon \leq r$ such that for all $Z_0 \in \Pi(\Delta_\varepsilon^2) - \{(0,0)\}$,

$$\#g^{-1}\{g(Z_0)\} \cap \Pi((\Delta_\varepsilon^2) - \{(0,0)\} = d,$$

with $d := \gcd\{p,\ q,\ k < r \text{ such that } a_k \neq 0\}$. In particular $\deg(f) = d$.

Proof. Fix $r > 0$ small enough so that $\sup_{\Delta_r} |P| + |\lambda| r \leq 1/4$. Pick $Z_0 = (x_0, y_0) \in \Pi((\Delta_\varepsilon^2) - \{(0,0)\}$ (the size of the constant ε will be given later), and $Z = (x, y) \in \Pi((\Delta_r^2) - \{(0,0)\}$ such that $g(Z_0) = g(Z)$. Then $x = \zeta x_0$ for some $\zeta \in \mathbf{U}_p$, and $\zeta^q x_0^q(1 + \lambda y + P(\zeta x_0)) = x_0^q(1 + \lambda y_0 + P(x_0))$. We get $|\zeta^q - 1| \leq 1/2$, hence $\zeta^q = 1$ too. The second coordinate y is then determined by the equation

$$\lambda(y - y_0) = P(x_0) - P(\zeta x_0). \tag{C.34}$$

As before, introduce for any $\zeta \in \mathbf{U}_p \cap \mathbf{U}_q$, the integer $r(\zeta) := \min\{k \in \mathbf{N}, a_k(\zeta^k - 1) \neq 0\}$, such that for all $|x_0| \leq \varepsilon$ sufficiently small, there exists a constant $C(\zeta) > 1$ with

$$C(\zeta)^{-1}|x|^{r(\zeta)} \leq |P(x_0) - P(\zeta x_0)| \leq C(\zeta)|x_0|^{r(\zeta)}\ .$$

In the sequel, we will make a constant use of the following inequality: for any $\alpha > 0$, there exists a constant $C_\alpha > 0$ such that for any real numbers $1 > x, y > 0$, $x^\alpha + y^\alpha \leq (x + y)^\alpha \leq C_\alpha(x^\alpha + y^\alpha)$.

Assume $r(\zeta) \geq r$. We have therefore $\beta r(\zeta) \geq \nu$, and $\alpha r(\zeta) \geq \mu$. Then

$$\begin{aligned} |x|^\nu \leq \varepsilon|y_0|^\beta &\leq \varepsilon(|y| + C(\zeta)|x_0|^{r(\zeta)})^\beta \\ &\leq \varepsilon C_\beta|y|^\beta + \varepsilon C_\beta C(\zeta)^\beta|x|^{\beta r(\zeta)} \end{aligned}$$

Hence

$$|x|^\nu \leq (1 - \varepsilon C_\beta C(\zeta))^{-1}\varepsilon C_\beta|y|^\beta. \tag{C.35}$$

For y, we get in a similar way

$$\begin{aligned} |y|^\alpha &\leq (|y_0| + C(\zeta)|x_0|^{r(\zeta)})^\alpha \\ &\leq C_\alpha\varepsilon|x|^\mu(1 + C(\zeta)^\alpha C_\alpha|x|^{\alpha r(\zeta) - \mu}) \end{aligned}$$

$$|y|^\alpha \leq C_\alpha\varepsilon|x|^\mu(1 + C(\zeta)^\alpha C_\alpha). \tag{C.36}$$

Conversely, assume $r(\zeta) < r$. Then by C.34 and C.34, $r(\zeta)\beta < \mu$, and $r(\zeta)\alpha < \nu$. And

$$\begin{aligned} |y|^\alpha &\geq C_\alpha^{-1}C(\zeta)^{-\alpha}|x_0|^{r(\zeta)\alpha} - |y_0|^\alpha \\ &\geq ((C(\zeta)^\alpha\varepsilon C_\alpha)^{-1} - \varepsilon)|x|^\mu. \end{aligned}$$

Hence if we impose ε to be small enough, for any $\zeta \in \mathbf{U}_p$, we get that $Z = (\zeta x_0, y)$ defined by C.34 belongs to $\Pi(\Delta_r^2) - \{(0,0)\}$ if and only if $r(\zeta) \geq r$. The lemma follows immediately from this. $\square$

Références

[BPV84] W. BARTH & C. PETERS & A. VAN de VEN, Compact complex surfaces, Ergebn. der Math., n.4, 1984.

[BLS93] E. BEDFORD & M. LYUBICH & J. SMILLIE, Polynomial diffeomorphisms of $\mathbf{C}^2$. IV: the measure of maximal entropy and laminar currents. Invent. math., vol. 112, 1993.

[BS91] E.BEDFORD & J.SMILLIE, Polynomial diffeomorphisms of $\mathbf{C}^2$: Currents, equilibrium measure and hyperbolicity. Invent. Math., vol. 103, 1991.

[BS97] E. BEDFORD & J. SMILLIE, External rays in the dynamics of polynomial automorphisms of $\mathbf{C}^2$, Complex geometric analysis in Pohang, Cont. Math., n. 222, 1997.

[BT82] E. BEDFORD & B.-A. TAYLOR, A new capacity for plurisubharmonic functions, Acta Math., vol. 149, 1982.

[Br97] J.-Y. BRIEND, Exposants de Lyapunov et points périodiques d'endomorphismes holomorphes de $\mathbf{CP}^k$, Thése, Université de Toulouse, 1997.

[BD99] J.-Y. BRIEND & D. DUVAL, Exposants de Liapunoff et distribution des points périodiques d'un endomorphisme de $\mathbf{P}^k$, Acta Math., vol. 182, 1999.

[Bn97] M. BRUNELLA, Feuilletages holomorphes sur les surfaces complexes compactes, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., t.30, 1997.

[Ca99] S. CANTAT, Dynamiques des automorphismes de surfaces projectives complexes, CRAS, t. 328, pp. 901-906, 1999.

[C93] M. CHAPERON, Varits stables et formes normales, CRAS, t. 317, pp. 87-92, 1993.

[CC97] M. CHAPERON & F. COUDRAY, Invariant manifold, conjugacies and blow-up, Ergod.Th. and Dynam. Sys., vol. 17, 1997.

[De85] J.-P. DEMAILLY, Mesures de Monge-Ampère et caractérisation géométrique des variétés algébriques affines, Mem. de la S.M.F., n. 19, 1985.

[De93] J.-P. DEMAILLY, Monge-Ampère operators, Lelong numbers and intersection theory, complex analysis and geometry, Univ. Ser. Math., Plenum Press, p.115-193, 1993.

[Di96] J. DILLER, Dynamics of birational maps of $\mathbf{P}^2$. Indiana Univ. Math. J., vol. 45, 1996.

[Di98] J. DILLER, Birational maps, positive currents and dynamics, preprint, 1998.

[D84] G. DLOUSSKY, Structure des surfaces de Kato, Mem. de la SMF, vol. 14, 1984.

[D88-1] G. DLOUSSKY, Sur la classification des germes d'applications holomorphes contractantes, Math. Ann., vol. 280, pp. 649-661, 1988.

[D88-2] G. DLOUSSKY, Une construction lmentaire des surfaces d'Inoue-Hirzebruch, Math. Ann., vol. 280, pp 663-682, 1988.

[DK96] G. DLOUSSKY & F. KOHLER, Classification of singular germs of mappings and deformations of compact surfaces of the VII_0 class, preprint, 1996.

[DO98] G. DLOUSSKY & K. OELJEKLAUS, vector fields and foliations on compact surfaces of class VII_0, preprint, 1998.

[DO99] G. DLOUSSKY & K. OELJEKLAUS, Surface de la classe VII_0 et automorphismes de Hénon, vol. 328, pp. 609-612, CRAS, 1999.

[E80] I. ENOKI, On surfaces of class VII_0 with curves, Proc. of the Japan Acad., n 56, series A, 1980.

[E81] I. ENOKI, Surfaces of class VII_0 with curves, Thoku Math. J., vol. 33, 1981.

[E82] I. ENOKI, deformations of surfaces containing global spherical shells. Classification of algebraic and analytic manifolds (Katata 1982). Progress in math., Birkhuser, 1983.

[F98] C. FAVRE, Dynamique des applications birationnelles de $\mathbf{P}^2$, Ann. de l'Inst. Fourier, 1998.

[F99-1] C. FAVRE, Note on pull-back and Lelonf number of currents, BSMF, 1999.

[F99-2] C. FAVRE, Multiplicity of holomorphic functions, Math. Ann., 1999.

[F99-3] C. FAVRE, Classification of 2-dimensional contracting rigid germs and Kato surfaces: I, preprint, 1999.

[FG99] C. FAVRE & V. GUEDJ, Dynamique des applications des espaces multiprojectifs, Preprint, 1999.

[Fi76] G. FISCHER, Complex analytic geometry, Lect. notes in math., n. 538, Springer Verlag, 1976.

[FS92] J.-E. FORNAESS & N. SIBONY, Complex Hnon mappings in $\mathbf{C}^2$ and Fatou-Bieberbach domains, Duke Math. Jour., vol. 65, 1992.

[FS92-2] J.-E. FORNAESS & N. SIBONY, Complex dynamics in higher dimension II, dans Modern methods in complex analysis, Ann. of math. studies, n. 137, Princ. univ. press, 1992.

[FS95] J.-E. FORNAESS & N. SIBONY, Oka's inequality for currents and applications, Math. Ann., vol. 301, 1995.

[Fr95] S. FRIEDLAND, Entropy of algebraic maps, the journal of Fourier Analysis and applications, Kahane Special Issue, 1995.

[FM89] S.FRIEDLAND & J.MILNOR, Dynamical properties of plane automorphisms, Erg. Th. and Dynam. Syst, vol. 9, 1989.

[G62] H. GRAUERT, Über Modifikationen und exzeptionnelle analytischen Mengen, Math. Annalen, 146, 1962.

[Gu97] V. GUEDJ, Representation theorems for positive closed $(1,1)$-currents on flag manifolds of $GL_m(\mathbf{C})$, preprint (1997).

[Gu99] V. GUEDJ, Dynamics of polynomial self-mappings of $\mathbf{C}^2$, preprint, 1999.

[Ha77] R. HARTSHORNE, Algebraic geometry, GTM n. 52, Springer Verlag, 1977.

[He96] S.-M. HEINEMANN, Julia sets for holomorphic endomorphisms of $\mathbf{C}^n$, Ergodic Theory Dyn. Syst., vol. 16, 1996.

[H73] H. HIRONAKA, Introduction to real analytic sets and real analytic maps, Instituto Matematico "L.Tonelli" dell' Univ. di Pisa, 1973.

[HLT73] H. HIRONAKA & M. LEJEUNE-JALABERT & B. TEISSIER, Platificateur local en gomtrie analytique et aplatissement local, in Singularits Cargese, Astrisque n. 7 and 8, 1973.

[H66] L. HÖRMANDER, An introduction to complex analysis in several complex variables, Van Nostrand, 1966.

[Ho83] L. HÖRMANDER, The analysis of linear partial differential operators I., Springer Verlag, 1983.

[HO94] J.-H. HUBBARD & R.-W. OBERSTE-VORTH, Hnon mappings in the complex domain I, Publ. de l'IHES, n.79, 1994.

[HP94] J.-H. HUBBARD & P. PAPADOPOL, Superattractive fixed points in $\mathbf{C}^n$, Indiana Math. J., vol. 43, 1994.

[Hu94] A. HUCKELBERRY, Subvarieties of homogeneous and almost homogeneous manifolds, dans Contributions to complex analysis and analytic geometry dedicated to P. Dolbeault, Skoda & Trépreau ed., 1994.

[J1-99] M. JONSSON, Dynamics of polynomial skew products on $\mathbf{C}^2$, Math. Ann., n. 314, 1999.

[J2-99] M. JONSSON, Ergodic properties of fibered rational maps, preprint, 1999.

[K77] M. KATO, Compact complex manifolds containing "global spherical shells". Proc. of the Int. Symp. on Alg. Geometry, Kyoto, 1977.

[KS86] A. KATOK & J.-M. STELCYN, Invariant manifolds, entropy and billiards, smooth maps with singularities, L.N.M n. 1222, Springer Verlag, 1986.

[KH95] A. KATOK & HASSELBLATT, Introduction to the modern theory of dynamical systems, Cambridge Univ. Press, 1995.

[Ki87] C. KISELMAN, Un nombre de Lelong raffiné, Séminaire d'Analyse complexe et Géométrie 1985-87, Faculté des science de Tunis, 1987.

[Ki99] C. KISELMAN, Le nombre de Lelong des images inverses des fonctions plurisousharmoniques, to appear in Bull. Sci. Math., 1999.

[L11] M.-S. LATTES, Sur les formes rduites des transformations ponctuelles deux variables, CRAS, vol. 152, pp. 1566-1569, 1911.

[La71] H.-B. LAUFER, Normal two-dimensional singularities, Ann. Math. Studies, n. 71, 1971.

[LG86] P. LELONG & L. GRUMAN, Entire functions of several complex variables, Grundlehren der math. Wiss., n. 282, Springer Verlag, 1986.

[Li82] J. LIPMAN, Equimultiplicity, reduction and blowing-up, in commutative algebra edited by R. N. Draper, lect. notes in pure and applied math. , vol. 68, 1982.

[Ly83] M. LYUBICH, Entropy properties of rational endomorphisms of the Riemann sphere, Ergodic Theory Dynamical Systems, n. 3, 1983.

[MM80] J.-F. MATTEI & R. MOUSSU, Holonomie et intgrales premires, Ann. Scient. de l'E.N.S., 1980.

[M94] J. MILNOR, holomorphic dynamics, monograph, 1994.

[M96] M. MEO, Image inverse d'un courant positif fermé par une application analytique surjective, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 322, Serie I, p 1141-1144, 1996.

[N84] I. NAKAMURA, On surfaces of class VII_0 with curves I, Invent. Math., vol.78, 1984.

[N90] I. NAKAMURA, On surfaces of class VII_0 with curves II, Thoku Math. J., vol 42, 1990.

[NA74] M. NAMBA, Automorphism group of Hopf surfaces, Thoku Math. Jour., vol. 26, 1974.

[P69] W. PARRY, Entropy and generators in ergodic theory, Benjamin, 1969.

[P85] F. PRZYTYCKI, Hausdorff dimension of harmonic measure on the boundary of an attractive basin for a holomorphic map, Invent. Math., vol. 80, 1985.

[Ro67] V.-A. ROHLIN, Lectures on the entropy theory of transformations with invariant measure, Uspehi Mat. Nauk, vol 22, 1967

[RR88] J.-P. ROSAY & W. RUDIN, Holomorphic maps from $\mathbf{C}^n$ to $\mathbf{C}^n$, trans. amer. math. soc., vol. 310, 1988.

[RS97] A.RUSSAKOVSKII & B.SHIFFMAN, Value distribution for sequences of rational mappings and complex dynamics, Indiana Univ. Math. J., vol. 46, 1997.

[S65] J.P SERRE, Algèbre locale et multiplicités, chapitre 4, lectures notes in math. n. 11, Springer Verlag, 1965.

[Se97] O. SESTER,Etude dynamique des polynmes fibrs, Thse de doctorat, Universit Paris-sud, 1997.

[Si85] N. SIBONY, Quelques problèmes de prolongement de courants en Analyse Complexe, Duke Math. J., vol. 52, 1985.

[Si99] N. SIBONY: Dynamique des applications rationnelles de $\mathbf{P}^k$, a paraitre dans Panoramas et Synthèses, publ. de la SMF, 1999.

[Sp66] E. H. SPANIER, Algebraic topology, Mcgraw-hill, 1966.

[S57] S. STERNBERG, Local contractions and a theorem of Poincar, Amer. J. Math., vol. 79, pp. 809-823, 1957.

[T73] B. TEISSIER, cycles evanescents, sections planes et conditions de Whitney, Singularités à Cargèse, Astérisque vol 7 et 8, 1973.

[W82] P. WALTERS, An introduction to ergodic theory, GTM n. 79, Springer Verlag, 1982.

[Wh72] H. WHITNEY, Complex analytic varieties, Addison-Wesley, 1972.

[Y95] L.-S. YOUNG, Ergodic theory of differentiable dynamical systems, In B. Branner, P.Hjorth ed., Real and complex dynamical systems. Kluwer Academic Publishers, 1995.