

Espace des paramètres des polynômes cubiques

→ étude géo de cet espace

- top. B-H
- variété par Kinn
- invariants + on la rend. \mathbb{C} = constants
- Plan :
 - généralités = def constants
 - géo des constants (variétés)
 - lien $\mathbb{C} / \mathbb{C}(H)$

Plan

1. Généralités
 - géométrie \mathbb{C}
 - def. des sous-ensembles dynamiquement invariants
2. Constants
 - construction, support
 - thm de convergence

1. Espace des paramètres des polynômes cubiques.

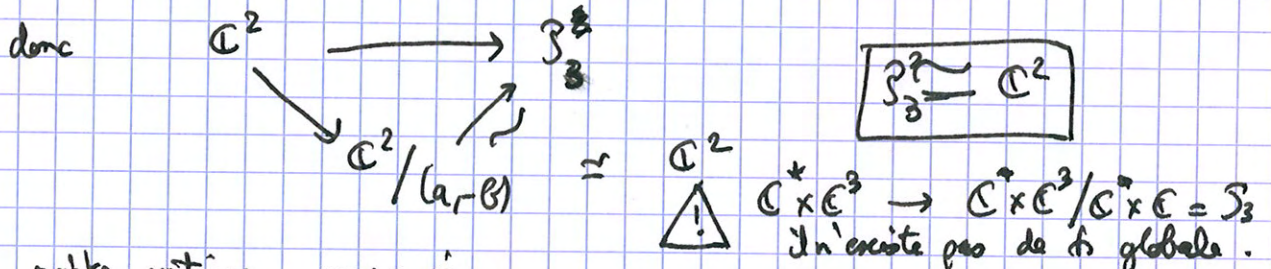
références Milnor Exp. Math (92)
Hirshman Duke (98)

- Poly (3) $P(z) = a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 \approx \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^3$
- $\mathcal{P}_3 = \text{Poly}(3) / \text{Aut}(\mathbb{C}) \quad \mathbb{P} \sim \phi \circ \mathbb{P} \circ \phi^{-1} \quad \phi = \alpha z + \beta \text{ Affine.}$

$$\mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathcal{P}_3^*$$

$$(a, b) \longmapsto z^3 + az + b \quad \text{unitaire, centré.}$$

$$\phi(a, b) = -3 \quad \phi \circ \mathbb{P}_{a,b} \circ \phi^{-1} = \mathbb{P}_{+a, -b}$$



- Avec points critiques marqués.
 $\mathcal{S}_3^{\text{PCM}} = \{ (P, c) \in \text{Poly}(3) \times \mathbb{C}, P'(c) = 0 \} / \text{Aut}(\mathbb{C}) \quad \phi \cdot (P, c) = (\phi \circ P \circ \phi^{-1}, \phi(c))$
 le second pt critique est $P'(c) = -c$.

$$\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{A}_3^{\text{cm}}$$

$$(a, b) \mapsto (z^3 - 3a^2z + b, a)$$

$$\phi(z) = -z \quad \phi \cdot (P_{3a^2, b}, a) = (P_{-3a^2, -b}, -a)$$

donc $\mathbb{A}_3^{\text{cm}} \cong \mathbb{C}^2 / (a, b) \sim (-a, -b)$. Cône $\{x^2 = yz\}$ dans \mathbb{C}^3 .

singularité en $(0,0)$ A₂. Déchq. = une courbe rat. d'ordre 2

~~Dans la suite~~ on a un revêtement à 2 feuilles

$$\sigma: \mathbb{C} \xrightarrow{2-1} \mathbb{P}_1 \xrightarrow{2-1} \mathbb{P}_3$$

ramifié le long de la courbe

$$(P, c) \mapsto P.$$

de polynômes unitaires $\{z^2 + z^3 + c\} = \text{Non}$.

σ : involution holomorphe qui permute les marqueurs de points critiques.

Dans la suite on travaille avec

$$\mathbb{C}^2 \cong \Lambda = \{z^3 - 3a^2z + 2a^3 + v\} \quad \begin{matrix} a \in \mathbb{C} \\ v \in \mathbb{C} \end{matrix}$$

$$\Lambda \xrightarrow{2-1} \mathbb{A}_3^{\text{cm}}$$

$$(a, v) \mapsto (z^3 - 3a^2z + 2a^3 + v, +a)$$

$$\text{Aut } P_{-3a^2, 2a^3+v} = \{+a, -a\}$$

$$P(+a) = v \quad P(-a) = 4a^3 + v$$

Notation: $f_{a,v} = z^3 - 3a^2z + 2a^3 + v$

Involution $(a, v) \xrightarrow{\sigma} (-a, v + 4a^3)$. $\tau \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$
échange les marqueurs.

2/

2. Géométrie dans Λ

On fixe $a, v \in \mathbb{C}^2$. On veut étudier $f_{a,v}$.

- 1. $K_{a,v} = \{z \mid |f_{a,v}^n(z)| = 0 \text{ (1)}\}$
- 2. $\mathcal{J}_{a,v} = \partial K_{a,v}$

def $\mathcal{S} =$ lieu d'échappement des deux pts critiques = lieu du décalage
 $a, v \quad t, \pm a \notin K_{a,v}$.

Prop $(a, v) \in \mathcal{S}$

- 1. $K_{a,v} = \mathcal{J}_{a,v}$ est un Cantor
- 2. $\phi: \mathcal{J}_{a,v} \rightarrow \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$ conjugaison au shift complet. Hyperbolique.

def $\mathcal{C} =$ lieu de connexité
 $a, v \quad t, \pm a \in K_{a,v}$

Prop

$K_{a,v}$ est connexe si $a, v \in \mathcal{C}$.
 (ou $\mathcal{J}_{a,v}$)

def $\mathcal{C}^+ = \{a, v, +a \in K_{a,v}\}$
 $\mathcal{C}^- = \{a, v, -a \in K_{a,v}\}$.

Prop $\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \cap \mathcal{C}^-$

Quelques idées grossières sur la topologie de ces ensembles.

Thm On regarde $\mathbb{C}^2 \subseteq \mathbb{P}^2$. $L_\infty =$ droite à l'infini.

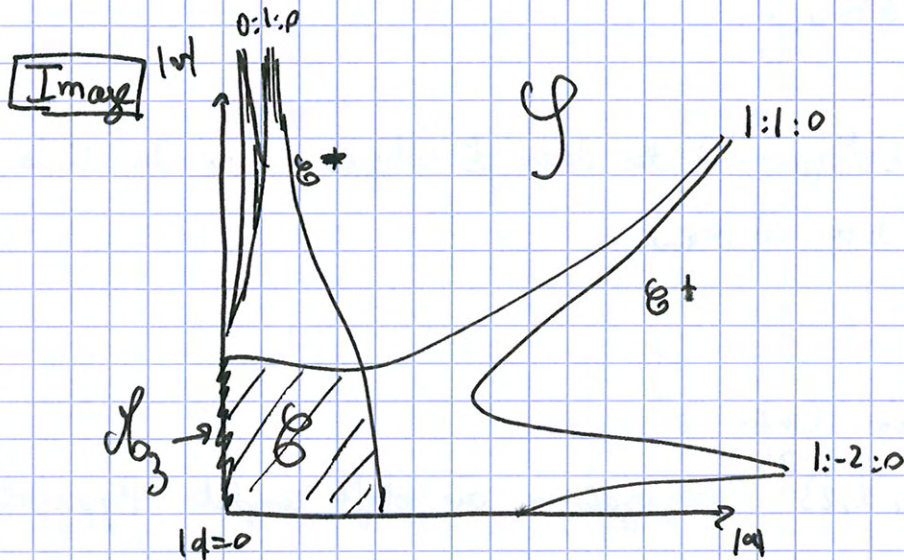
- 1. $\mathcal{C}^+ \cap L_\infty = \{[1:1:0], [1:-2:0]\}$.
- 2. $\mathcal{C}^- \cap L_\infty = \{[0:1:0]\}$.
- 3. \mathcal{C}^\pm sont ~~fermés~~ fermés, \mathcal{C} est compact, \mathcal{S} est ouvert

preuve x | Branched - Hubbard 1
Kiwi

on utilise on fait la
compacité de \mathcal{B} !

Romain donnera les arguments de Kiwi.

x deuxième point sera clarifié avec les courants \square



But dans la suite : décrire la géométrie de \mathcal{B}^+

- \mathcal{B}^+ = support d'un courant
- courant laminaire ?
- Kiwi = laminarité du courant à l'infini.

$\mathcal{B} \rightarrow H$: topologie de \mathcal{G}

check

Théorème $|\lambda| = cte \Rightarrow 1$

x on voit des copies de Mandelbrot \hookrightarrow réunion \mathcal{B}^+ (enormément)

x un nuage de points. \hookrightarrow réunion \mathcal{B}^+

Thm ① $\mathcal{B}^+ = \{ (a, \nu) \in \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \text{ qui admettent une renormalisation quadr.} \}$

[tableau critique périodique]
 $\mathcal{B}^+ \ni (a, \nu)$ c.c de \mathcal{B} est ~~est~~ périodique ; et dans les bons cas $f_{a, \nu}$ est
obtenue par dérivation ~~est~~.

② $\exists (a, \nu) \text{ tels } K_{a, \nu} = \mathcal{J}_{a, \nu}$ est un Cantor et ν n'est pas pré-périodique.
(de mesure nulle)

3. Courants dans Λ .

• on fixe $a, v \in \mathbb{C}^2$

$$g_{a,v}(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n} \log^+ |f_{a,v}^n(z)|$$

$$\geq 0 \quad \mathcal{B}^0 \text{ sur } \mathbb{C} \quad g_{a,v} \circ f_{a,v} = 3 g_{a,v}$$

$$K_{a,v} = \{ g_{a,v} = 0 \}$$

$\mu_{a,v} = \text{dd}^c g_{a,v} =$ mesure de proba support = $S_{a,v}$

• En famille

$$\tilde{g}: \Lambda \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

$$((a,v), z) \mapsto g_{a,v}(z)$$

Fait \tilde{g} est psh \mathcal{B}^0 , ≥ 0 sur $\Lambda \times \mathbb{C}$.

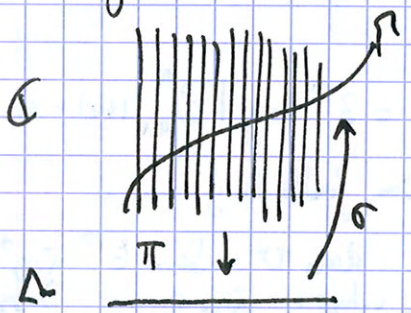
preuve. psh ≥ 0 car lim de fcts psh sur $\Lambda \times \mathbb{C}$

• \mathcal{B}^0 de base sur $\left| \frac{1}{3} \log^+ |f| - \log^+ |f| \right| \leq C$
uniformément sur $g \in \mathbb{C}$ et (a,v) dans un petit ouvert \square .

Def $T^+ = \text{dd}^c \underset{g^+}{\mathcal{G}_{a,v}(+a)}$ $T^- = \text{dd}^c \underset{g^-}{\mathcal{G}_{a,v}(-a)}$

Thm T^+ courant ≥ 0 fermé (1.1) de masse $\frac{1}{3}$ sur \mathbb{P}^2 .
• $\text{Supp } T^+ = \partial \mathcal{B}^+$ (T^- de masse 1)

géométriquement



$$\tilde{T} = \text{dd}^c \tilde{g} \quad \tilde{T}|_{\text{ fibre de } \pi} = \text{mesure d'équilibre}$$

$$\sigma(a,v) = (a,v, +a) = T^+ \text{ var. de dim } 2 \text{ sur } \mathbb{C}$$

$$\pi: T^+ \rightarrow \Lambda \text{ isomorphisme}$$

$$T^+ = \pi_* \left(\tilde{T}|_{T^+} \right)$$

1. compactification

la problématique = on veut compactifier \mathbb{P}_3^{cm} de manière naturelle
 i.e. $\mathbb{P}_3^{cm} \hookrightarrow \overline{\mathbb{P}_3^{cm}}$ espace topologique compact
 $\forall f \in \partial \mathbb{P}_3^{cm}$ définit une dynamique \mathbb{C}
 $\mathbb{P}^1 \rightarrow f$ dans $\overline{\mathbb{P}_3^{cm}}$ " \Rightarrow " $\text{dyn}(\mathbb{P}^1)$ vs $\text{dyn}(f)$.

approche naïve = $\mathbb{P}_3^{cm} \hookrightarrow \mathbb{C}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2$
 on homogénéise

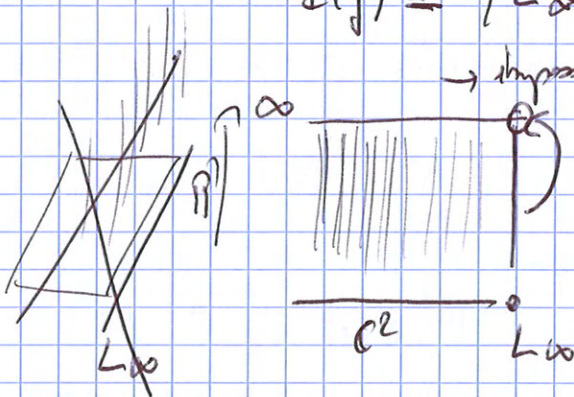
$$[a:b:c] \times [z:w] \longrightarrow [z^3 : 3a^2c^2zw + 3a^3w^3 + 3b^2c^2w^3 : c^3w^3]$$

$$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \longleftarrow \mathbb{P}^1$$

$$L_\infty = (c=0) \quad [a:b:c] [z:w] \longrightarrow [4a^3w^3 : 0] = [1:0]$$

$$\mathbb{P}^1 \cong \{L_\infty \times [1=0]\}$$

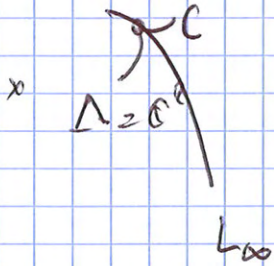
\rightarrow impossible d'être.



idée = on éclate tous les indéterminations dans $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$
 \rightarrow pas forcément géométrique

2. dégénérescence le Com de courbes

\times idée de Base = ^{pour trouver} un point "à l'infini" ie de $\mathbb{P}_3^{\text{Com}}$, on prend une courbe dans $\mathbb{P}_3^{\text{Com}}$ et pour trouver la dynamique on regarde comment dégénère \mathbb{P}_t sur la courbe quand on part à l'infini.



$C =$ genre de courbe hol. dans \mathbb{P}^2
 (irred)
 centré en un point de L_∞ .

\times paramétrisation $\phi: \Delta \rightarrow C$.

donne $\phi: \Delta^* \rightarrow \Lambda$
 $t \mapsto z^3 - 3a^2(t)z + ha^3(t) + v(t)$

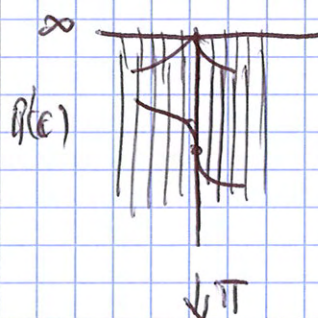
a, v sont méromorphes et $\min\{ord_a, ord_v\} < 0$.

\times à une telle application $\phi: \Delta^* \rightarrow \Lambda$, centrée en P_∞
 on associe une dynamique.

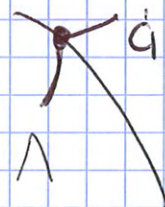
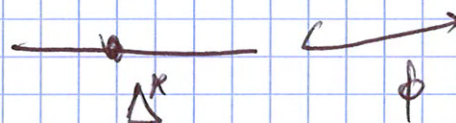
$P_{\phi, \infty}: \mathbb{P}^1(\mathbb{C}(t)) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}(t))$
 $\zeta(t) \mapsto \zeta(t)^3 - 3a^2(t)\zeta(t) + ha^3(t) + v(t)$

topol. $d(\zeta_1, \zeta_2) = \exp(-ord_0(\zeta_1 - \zeta_2))$
 $\mathbb{A}^1(\mathbb{C}(t))$

géo.



pt de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}(t)) =$ courbe au-dessus de Δ .



Conclusion

$\left\{ \phi: \Delta^{\infty} \rightarrow \Lambda \text{ o'endant en appli. hol. dans } \mathbb{P}^2 \right\}$

Module 1) germes = ce qui compte sont les jets formels $a(t), r(t)$
 2) reparamétrisation $t \mapsto t^2$ ne change rien, $t \mapsto t(1-t) \rightarrow$ non plus

$\mathcal{P}_3^{\text{Cm}}$ $\ni \mathcal{P}_{\infty}$ dynamique sur $\mathbb{P}^1 \mathbb{C}(t)$
 non-archimédienne.

de manière plus intrinsèque

$\left\{ v \text{ val sur anneau des fonctions algébriques sur } \mathcal{P}_3^{\text{Cm}} \right\}$
 centrée à l'infini

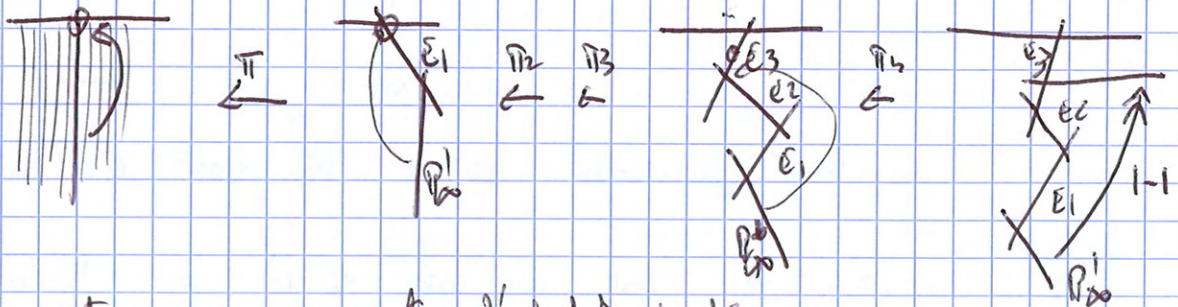
\parallel
 $\mathcal{P}_3^{\text{Cm}}$

- val. de courbe = dyn à l'as cloche
- val. à l'inf = idem
- val. arbitraire = en fait le cas pas un polynôme cubique sur $\mathbb{C}(t)$

3. Espace de Bakovich

on reprend la même situation $\phi: \Delta^{\infty} \rightarrow \Lambda$

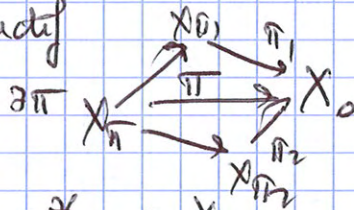
① $t \rightarrow (\alpha t, \beta t) \quad z \rightarrow z^3 - 3\alpha^2 t^2 z^2 + 4\alpha^3 t^3 + \beta t$



pbm on trouve nouveaux pts d'indétermination
 nouvelles courbes contractées

\Rightarrow on éclate tout le monde!

$\Delta \times P' = X_0$ $B = \{ \pi: X_\pi \rightarrow X_0 \text{ entre sur } P'_\infty \subseteq X_0 \}$
 système inductif

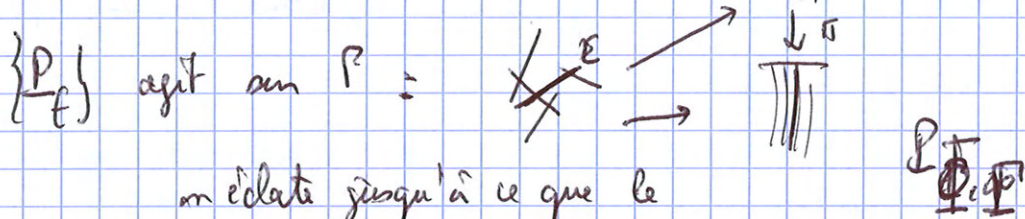


• on peut faire $\varprojlim_{\pi} X_\pi = X \rightarrow X_0$

• π fixe \rightarrow on associe $P_\pi =$ couple dual
 m le même (P_π, d_π)

$$\pi' \geq \pi \quad (P_\pi, d_\pi) \hookrightarrow (P_{\pi'}, d_{\pi'})$$

$$(P, d_P) = \varinjlim (P_\pi, d_\pi) \quad \text{arbre réel}$$

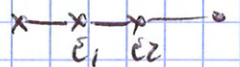
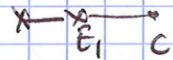
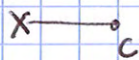
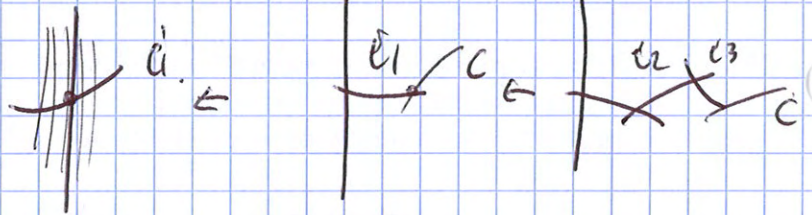


on éclate jusqu'à ce que le
 relevé de E ne soit pas contracté

~~l'arbre réel est la réalisation d'un \mathbb{R} -arbre~~

lien entre P et P' $\mathcal{O}(H)$

si G combe arboré.



{combes} apparaissent comme des bouts de l'arbre.

① Complétion en tant qu'arbre de $P = P'_{B_2}(\mathcal{O}(H))$

$$P'(\mathcal{O}(H)) \hookrightarrow P'_{B_2}(\mathcal{O}(H))$$

et sont des bouts



ceux différentes métriques /obj.

② \exists topol. compacte sur $P'_{B_2}(\mathcal{O}(H))$

③ d'apr. inverse $P'(\mathcal{O}(H))$ à P'

Thm

$\mathbb{P}_{\phi, P} : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ s'étend uniquement continûment à $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{H})$
 $\mathbb{P}_{\phi, P} |_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{H})} = \mathbb{P}_{\phi, \infty}$

on entend = dyn. d'un polynôme non archimédien induit une action sur un arbre.

4. dégénérescence $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}(\mathbb{H})$

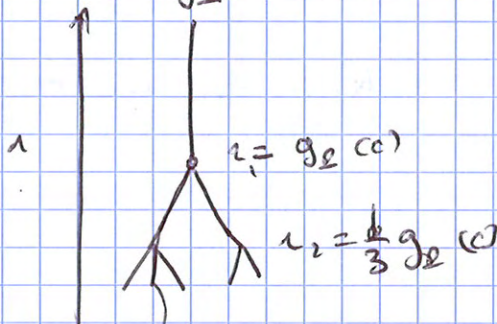
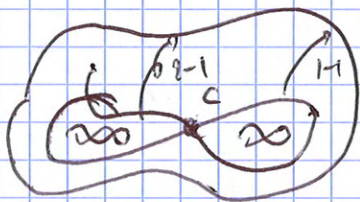
dans les bons cas dyn/ \mathbb{C} dégénère en dyn/ $\mathbb{C}(\mathbb{H})$.

cadre: On fixe $\lambda \in \mathbb{C}^+$, on regarde $u \in \mathbb{H} \xrightarrow{\phi} \mathbb{P}_u \in \mathbb{B}^+$

on appelle que $\phi(\mathbb{H})$ germe de comb ^{wulfgang} à l'oo dans \mathbb{P}^2 .

- (a) on va construire pour chaque u un arbre A_u métrique d_u
 $\xi \mathbb{P}_u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ $A_u =$ code la combinatoire de \mathbb{P}_u .
- (b) plaque de wulfgang \Rightarrow ts les d_u isomorphes
 $(A_u, \frac{d_u}{\text{Relu}}) \cong (A, d_A)$
- (c) $(A, d_A) \hookrightarrow (\mathbb{P}, d_P) \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{H})$
 $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ plongement isométrique \mathbb{P}_u

(d) $\alpha \in \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ -convexe de $g_{\mathbb{Z}} \leq 2$.



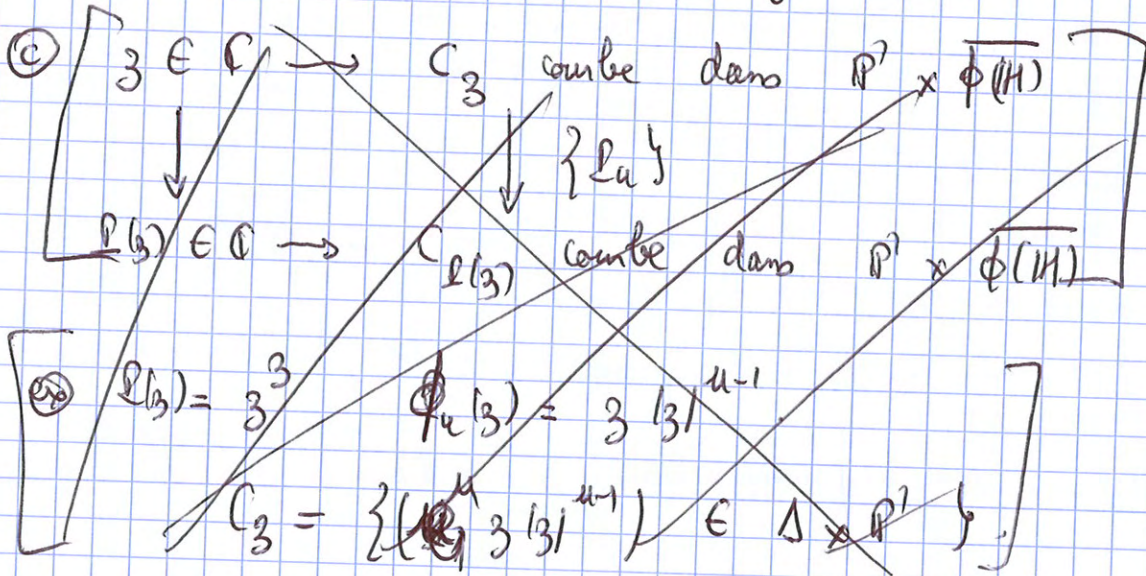
$d_A(\alpha_1, \alpha_2) = \text{mod}(\alpha_1, \alpha_2)$
 \mathbb{P} agit naturellement sur \mathbb{C} (affine par morceaux)

branche biquen $\Rightarrow \mathbb{P} \cap (g_{\mathbb{Z}}^2 \mathbb{C}) = 4 \text{ pt}$
 α_6

② on trouve $u \rightarrow \mathcal{L}_u = \phi_u \circ \mathcal{L} \circ \phi_u^{-1}$ ϕ_u qc.

ϕ_u induisent un mvt hol sur \mathbb{C} qui préserve $\{g_{\mathcal{L}} = \text{cte}\}$. $g_{\mathcal{L}_u} = \mathcal{L}(\mu)(g_{\mathcal{L}} \circ \phi_u^{-1})$ donc ϕ_u homéo.

$\phi_u = (t, d_t) \rightarrow (t|_u, d_t|_u)$ ϕ_u hol = on regarde au ∞ modélisé à l' ∞



$\alpha \in \mathcal{A} \mapsto v_\alpha(\mathcal{Q}(t, z))$ $\overline{\phi(H)}$ courbe $\phi(u+it) \circ \phi(u)$
 $\log t$ défini mod $i\mathbb{Z}$.

~~$\mathcal{Q}(t, z)$~~

$\min_{J \in \mathcal{A}} \text{ord } \mathcal{Q}(t, \phi_{\log t}(z))$

on calcule ça pour α grand, on utilise ~~invariance~~
 pour la dynamique. $P_\alpha \phi_\alpha(z) = \phi_\alpha P(z)$.

lem. $g(z) \in \mathbb{Q} \Rightarrow v_\alpha$ rationnelle
 $\in \mathbb{R}(\mathbb{Q}) \Rightarrow v_\alpha$ irrationnelle

Convergence géométrique

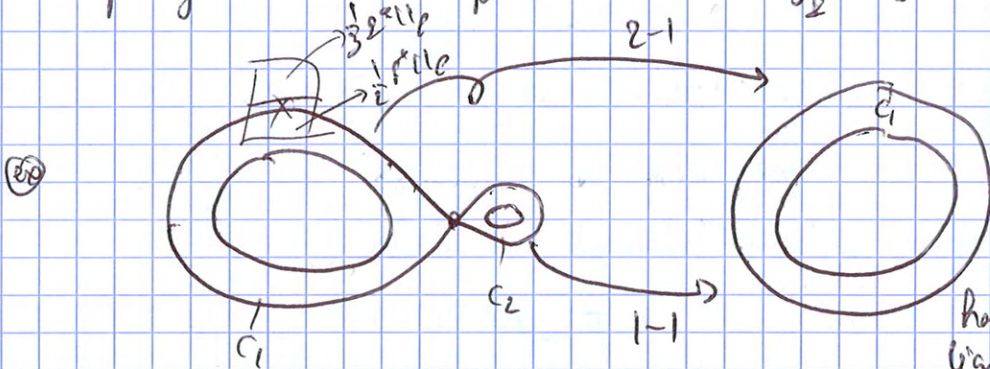
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbb{C} \setminus K_{\rho^n}, d_n) = (\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}}) \quad (\in \mathbb{R}^1 \subset \mathbb{C}(H))$$

• on fixe $\mathbb{R} \rightarrow$ construction de $d_{\mathbb{R}}$

$$\begin{array}{ccc}
 \times \text{ à l'ab} & \varphi = \{g \in \mathbb{R}\} & \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C} \setminus D(0, \rho^n) \\
 & \downarrow & \downarrow \\
 & \rho = \varphi^{-1} \circ \sigma & \sigma = \frac{|dz|}{|z|^3}
 \end{array}$$

ρ conforme $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\rho} \mathbb{C}$
 hauteur ρ [Anneau $\{r_1 \leq |z| \leq r_2\}$] = mod (Anneau)

• il existe une unique extension de ρ à $\mathbb{C} \setminus K_{\rho}$ $\bar{\rho}$
 ρ conforme hauteur ρ (Anneau $\{r_1 \leq |z| \leq r_2\}$) = mod (Anneau)



dans C_1 on pose $\rho = \frac{1}{z}$ $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\rho} C_1$
 $C_2 \xrightarrow{\rho} C_2$ $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\rho} C_2$

subtilité = ρ def. hors des images des lignes verticales et la distance s'étend sur le bord et coincide de chaque côté.
 (pas vraiment!)
 conforme.

• en famille $d_n =$ métrique $\frac{d_{\mathbb{R}}}{\rho^n}$

$$\mathbb{C} \setminus K_{\rho^n} \xrightarrow{\omega} U_n$$

$\mathbb{S} \mapsto$ cc de $g_{\rho^n}^{-1}(\mathbb{S})$ contenant \mathbb{S}

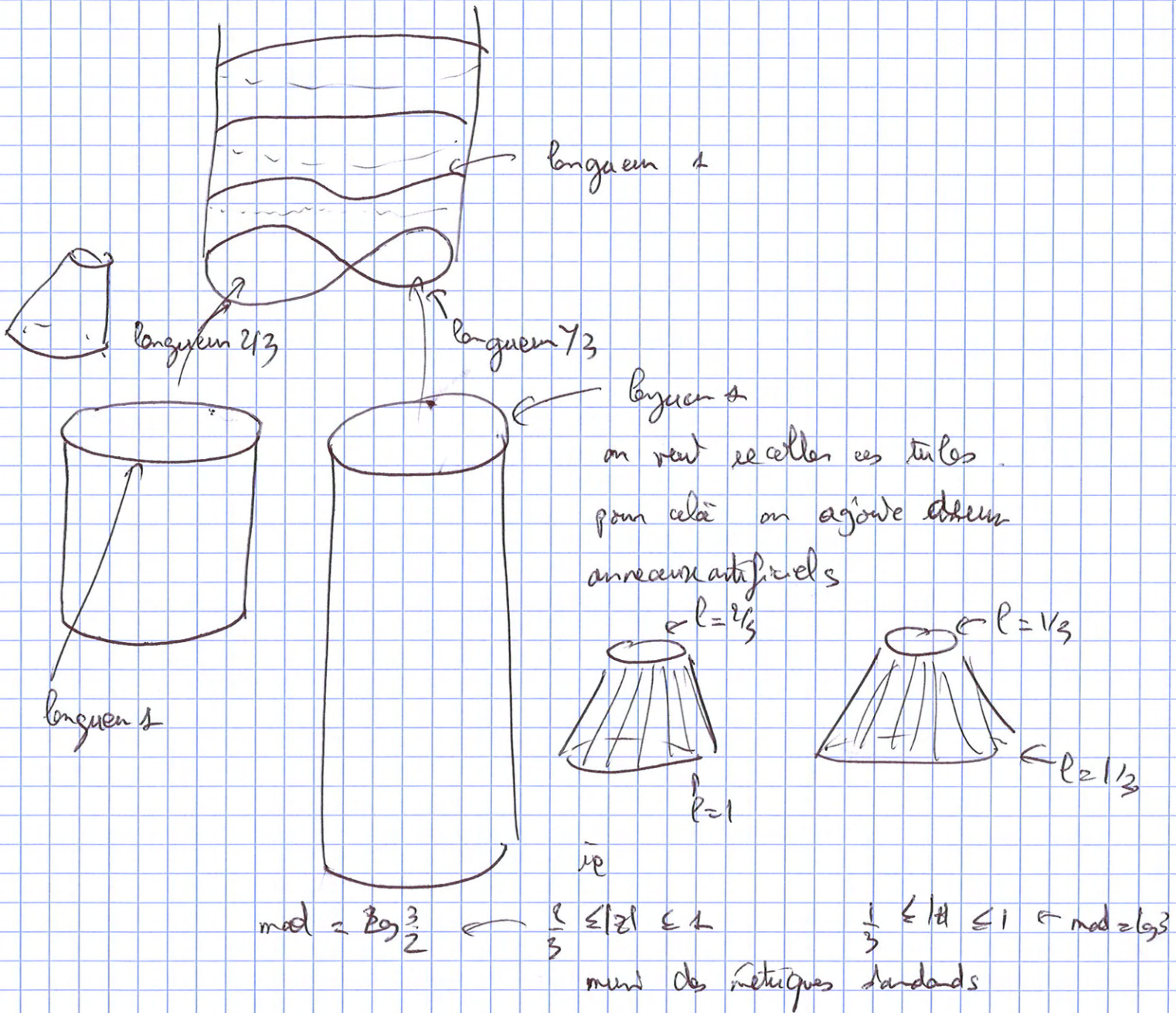
$\omega^{-1}(\alpha) = \mathbb{S}'$ ou bouquet de cercle.

$$C_n = \phi_n(C) \quad \text{mod}(C_n) = \text{Re}(u) \text{ mod}(C) \quad \text{hauteur}(C_n) = \text{mod}(C)$$

$C =$ c.c. de $\{r_1 \leq |z| \leq r_2\}$ qui est un anneau

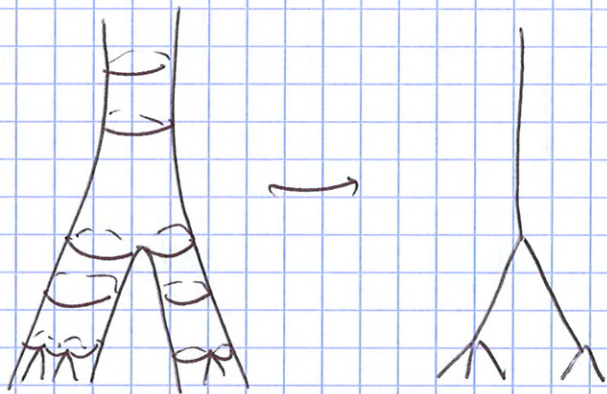
chc. $[C_n] \rightarrow 0$

subtilité de la construction de ρ



on étend la dynamique qui contracte chaque rayon vertical

image



Remarque si $L \in \mathcal{B}^+$

est plaque de wiring diagram combe
est est un solénoïde

dans ce dernier cas tout marche mais il faut travailler avec
les pts quasi-périodiques.

Remarque Kimi prouve aussi que la combinatoire de L_n est
la même que L_∞ .

1) pour éléments de $Per^+(n, 0)$

2) approx. de $\#L_{\infty}$ par des elts de $Per^+(n, 0)$ ou $\mathcal{B}(n)$
au sens métrique.

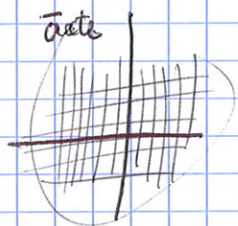
3) conclut en passant à la limite.

Que fait Kimi?

x géométrie de \mathbb{B}^+ en $(1,0)$

paramétrage $(\bar{a}, \bar{v}) = (\frac{1}{a}, \frac{v}{a}) \quad \bar{z} = \frac{z}{a}$

$$L(\bar{z}) = \frac{1}{a^2} (\bar{z}-1)^2 (\bar{z}+2) + \bar{v} \quad \bar{a} \rightarrow 0 \quad \bar{v} \rightarrow 0$$



plaque de voisinage " " graphique au dessus de $\bar{v} = 0$

$$(\bar{a}, \sum a_k \bar{a}^{2k})$$

Polynôme archimédien associé

$$P_{\bar{z}}(z) = \frac{1}{z^2} (z-1)^2 (z+2) + v(z)$$

↑ dot-alg de $\mathcal{C}(H)$
d'annulat en 0

$$\text{crit}(d_{\bar{z}}) = \{+1, -1\}$$

x Thm

$\exists \rho \in \mathbb{R}$, combinatoire de $(d_{\bar{z}}) = \mathcal{A} \bar{z} = \mathbb{R} \mathcal{A}$

et un métrique compact de \mathbb{R}

• $(\mathcal{A}, d_{\mathcal{A}}) =$ cube dont aucun bord n'est à distance finie

• combinatoire = $\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{Q}_S^{-n} [\mathcal{Q}_2, +\infty[\quad n \gg 1$

ces ~~cas~~ archimédiens
correspond à \mathcal{A} associée
à \mathbb{R} sous son métrique
quadratique.

x $\mathbb{H} \times \mathbb{R} \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{U}$

$u, v \mapsto (\exp(tu), v(\exp(tu)))$

surjectif sur $\{z \in \mathcal{U}, \text{Im } z = 1\}$

$(u, v) \sim (u + i, \sigma^t v)$

$\mathbb{R} \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{U}$

homéo sur son image.