TD de Géométrie Différentielle du Septembre 2009
UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT
14 OCTOBRE 2009

Connexion

Exercice 1

La relation $\nabla(T \otimes S) = T \otimes \nabla S + \nabla T \otimes S$ force l'unicité sur les tenseurs $(q, 0)$. Pour l'existence on pose localement $\nabla(e_{i_1} \otimes ...e_{i_k}) = (\nabla e_{i_1}) \otimes ...e_{i_k} + ...e_{i_1} \otimes ...(\nabla_{e_{i_k}})$.

Ensuite la relation $c(\nabla(X \otimes \omega)) = \nabla c(X \otimes \omega)$ donc $(\nabla\omega)(X) = d(\omega(X)) - \omega(\nabla X)$ sur les tenseurs ω de type $(0, q)$. A nouveau celà force l'unicité et l'existence est démontré localement.

Enfin pour un tenseur quelconque de type (p, q), on l'écrit localement comme somme de tenseurs de type $(p, 0)$ et $(0, q)$.

Exercice 2

On utilise les propriétés de commutation entre les contractions et ∇. On trouve $\nabla_X(T(Y)) = (\nabla_X T)(Y) + T(\nabla_X Y)$. La valeur dépend donc de $X(p)$, $T(p)$ et sa première dérivée, $Y(p)$ et sa première dérivée. On prends une base e_i de trivialisation locale, avec $\nabla = d + \Gamma$: $\mathrm{Tr}(\nabla_X T) = d\mathrm{Tr}(T) \cdot X - T(\mathrm{Tr}(\Gamma(X)))$. Si $T = f\,\mathrm{id}$, alors $\mathrm{Tr}(\nabla_X T) = ndf(X) - f\,\mathrm{Tr}\Gamma(X)$.

Exercice 3

- On vérifie que $T(fX, Y) = f\,T(X, Y)$ pour tout fonction lisse. L'anti-symétrie est facile.
- Si $\nabla_{\partial_{x_i}}\partial_{x_j} = 0$ au point p, comme T est un tenseur on a $T(p) = 0$. Pour la réciproque, on fixe un point p et une base $e_1, ..., e_n$ de T_pM. On définit $c_1 : I \subset \mathbb{R} \to M$ la géodésique partant de p à la vitesse e_1. On note $e_i(t)$ le vecteur e_i transportée parallèlement le long de c_1. On définit ensuite $c_2 : I^2 \subset \mathbb{R}^2 \to M$ de telle sorte que $c_2(t_1, .)$ soit la géosdésique partant de $c_1(t_1)$ à la vitesse $e_2(t_1)$. On note $e_i(t_1, t_2)$ le vecteur $e_i(t_1)$ transporté parallèlement le long de cette géodésique. En continuant ainsi on obtient une appli différentiable c de $\mathbb{R}^n$ sur M. C'est un difféo local car sa différentielle est l'identité. On identifie $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ à son image dans M. On utilise maintenant la condition de torsion nulle. Pour tout k, le long de c_1 on a $\nabla_{\partial_1}\partial_k = 0$ donc $\nabla_{\partial_k}\partial_1 = 0$ en p. Ensuite $\nabla_{\partial_2}\partial_k = 0$ pour $k \geq 2$ le long de $c_2(0, \cdot)$. Donc à nouveau $\nabla_{\partial_k}\partial_2 = 0$ en p. Etc.
- On procède comme suit. On fixe des coordonnées. On transporte parallèlement v le long de $(t, 0)$, puis le long de $(x_1, t, 0)$. On vérifie alors que l'on obtient le même champ X si on transporte tout d'abord de long de $(0, t, 0)$ puis $(t, x_2, 0)$. Ce qui montre $\nabla_{\partial_{x_i}} X = 0$ sur

$(x_1, x_2, 0)$. On procède ainsi par récurrence pour l'étendre à un voisinage de p. Ensuite on part d'une base orthonormée de T_pM et on lui applique l'extension précédente.

Connexion de Levi-Civita

Exercice 4

- Il suffit de montrer que ∇' est de torsion nulle et vérifie $X \cdot g'(X, Z) = g'(\nabla'_X Y, Z) + g'(Y, \nabla'_X Z)$.
- On a $T(M \times M') = TM \oplus TM'$. $\nabla_{M \times M'} = \nabla_M \oplus \nabla_{M'}$.

Exercice 5

- $g = d\varphi^2 + \cos^2 \varphi d\theta^2$. Ensuite si X, Y, Z commutent, alors $2\,(\nabla_X Y, Z) = X \cdot (Y, Z) + Y \cdot (Z, X) - Z \cdot (X, Y)$. Donc $\nabla_{\partial_\theta} \partial_\theta = \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \partial_\theta$, $\nabla_{\partial_\varphi} \partial_\varphi = 0$, $\nabla_{\partial_\varphi} \partial_\theta = \frac{\sin(2\varphi)}{2\cos^2(\varphi)} \partial_\theta$.
- La connexion de la métrique produit est triviale. Dans le second cas, $g = d\theta^2 + (2 + \cos\theta)^2 d\varphi^2$. $\nabla_{\partial_\theta} \partial_\theta = 0$, $\nabla_{\partial_\varphi} \partial_\varphi = \frac{1}{2} \sin(2\theta) \partial_\varphi$, $\nabla_{\partial_\varphi} \partial_\theta = -\frac{\sin(2\theta)}{2(2+\cos\theta)^2} \partial_\varphi$.
- laissé au lecteur.

Exercice 6

- On vérifie que $\nabla^N_X Y$ est de torsion nulle et est compatible avec $g|N$. Pour celà, on étend localement X et Y dans M. On projette $\nabla^M_X Y - \nabla^M_Y X = [X, Y]$ sur TN ce qui nous donne la condition de torsion nulle. Ensuite on note que $g(\nabla^M_X Y, Z) = g(p_N(\nabla^M_X Y), Z)$ où $p_N(\nabla^M_X Y)$ est le projeté sur TN dès que Z est tangent à TN.
- La symétrie de II provient de la torsion nulle.
- $X \cdot \langle Y, \vec{n} \rangle = 0$.
- Il suffit de calculer en un point p donné $K^M - K^N(X \wedge Y)$ ce qui ne dépend que de $X(p)$ et de $Y(p)$. On peut donc supposer que X, et Y commutent. On trouve alors
$$K^M - K^N = \frac{\mathrm{II}(X, Y)^2 - \mathrm{II}(X, X)\mathrm{II}(Y, Y)}{\|X\|^2 \|Y\|^2 - (X, Y)^2}$$
- C'est une conséquence directe de la première question, et du fait que la connexion de la métrique standard dans $\mathbb{R}^3$ est l'opérateur d.
- L'application de Gauss est $\vec{n} : N \to S^2$. Donc $\mathrm{II}(X, Y) = -\langle X, d\vec{n}(Y) \rangle$. On choisit ensuite X, Y une base orthonormée et on applique la formule précénte en utilisant la symétrie de II.
- On se ramène après tranformation orthogonale sur $c(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $c'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$, et $c''(t) = (-\cos t, -\sin t, 0) \in (TS^2)^\perp$.

Exercice 7

- Pour tout X, Y, Z on a:

$$(L_X g)(X,Y) = X \cdot g(Y,Z) - g([X,Y],Z) - g(Y,[X,Z]) =$$
$$g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) - g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z) - g(Y, \nabla_X Z - \nabla_Z X) =$$
$$g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X).$$

- Si ϕ_t est le flot de X et est une isométrie, on a $L_X g = \frac{d}{dt}|_{t=0}\phi_t^* g = \frac{d}{dt} g = 0$. Si X est un champ de Killing, on a $\frac{d}{dt}|_t \phi_t^* g = \phi_t^* L_X g = 0$. Donc $\phi_t^* g = \phi_0^* g = g$.
- Le plus facile est de montrer que $L_{[X,Y]} = L_X L_Y - L_Y L_X$ en utilisant la caractérisation de L_X en termes algébriques.
- Il suffit de faire le cas $n = 2$. Le flot est alors

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

qui est isométrique.

Exercice 8

(1) On se place dans des coordonnées telles que $\nabla_{\partial_i}\partial_j(p) = 0$. Il suffit de montrer que pour choix de 5 indices $i_1, ..., i_5$ on a en un point p fixé:

$$\nabla R(\partial_{i_1}, \partial_{i_2}, \partial_{i_3}, \partial_{i_4}, \partial_{i_5}) + \nabla R(\partial_{i_2}, \partial_{i_3}, \partial_{i_1}, \partial_{i_4}, \partial_{i_5}) + \nabla R(\partial_{i_3}, \partial_{i_1}, \partial_{i_2}, \partial_{i_4}, \partial_{i_5}) = 0$$

On traite $(i_1, ..., i_5) = (1, 2, 3, 4, 5)$. Tout d'abord

$$\begin{aligned} &\partial_5 \cdot R(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4)(p) = \\ &\quad (\nabla_{\partial_5} R)(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4) + R(\nabla_{\partial_5}\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4) + ... + R(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \nabla_{\partial_5}\partial_4) \\ &\qquad = (\nabla_{\partial_5} R)(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4)(p) \end{aligned}$$

On note $(*)$ la quantité dont on veut démontrer qu'elle s'annulle. Alors

$$(*) = \partial_1 \cdot R(\partial_2, \partial_3, \partial_4, \partial_5) + \partial_2 \cdot R(\partial_3, \partial_1, \partial_4, \partial_5) + \partial_3 \cdot R(\partial_1, \partial_2, \partial_4, \partial_5)$$

On développe:

$$\begin{aligned} (*) &= \partial_1 \cdot \langle R(\partial_2, \partial_3)\partial_4, \partial_5\rangle + ... \\ &= \langle \nabla_{\partial_1}(\nabla_{\partial_2}\nabla_{\partial_3} - \nabla_{\partial_3}\nabla_{\partial_2})\partial_4, \partial_5\rangle + ... \\ &= \langle [\partial_1, [\partial_2, \partial_3]] + [\partial_2, [\partial_3, \partial_1]] + [\partial_3, [\partial_1, \partial_2]]\partial_4, \partial_5\rangle = 0 \end{aligned}$$

par l'identité de Jacobi.

(2) Prendre la trace en W et Y puis en X et Z dans l'identité précédente.

(3) Si $\mathrm{Ric} = f\, g$, alors $\delta(\mathrm{Ric}) + \frac{1}{2} d(\mathrm{Scal}) = -f \mathrm{Tr}_{12}(\nabla g) - \mathrm{Tr}_{12}(df\, g) + n df$. Or dans une BON ∂_i, $\mathrm{Tr}_{12}(df\, g) = \sum_i df(\partial_i) g(\partial_i, \cdot) = df$. Par la question précédente $0 = (1 + \frac{n}{2}) df$.

(4) - Comme dans le cours, le tenseur R' vérifie l'identité algébrique de Bianchi. Comme $R - KR'$ est nul sur les 4-vecteurs du type (X, Y, X, Y), il est nul.

- Appliquer Bianchi différentielle à la bonne permutation des vecteurs!
- Prendre $W = X$ et $Z = Y$. On obtient alors $-T \cdot K = 0$.

Exercice 9

- C'est un calcul patient et long. Ecrire $\langle \nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_k \rangle = \frac{1}{F^2} \Gamma_{ij}^k$.

- idem pour la courbure. Cette fois-ci, on a $R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \sum_l R_{ijk}^l \partial_l$.

- En dimension 2, seul un terme de courbure est non nul $K = R_{212}^1/F^2 = \partial_1^2 f + \partial_2^2 f/F^2$.

- Même raisonnement qu'à l'exercice précédent.

- En déduire que g est à courbure constante ssi $F = \sum(a_i + b_i x_i + c x_i^2)$ avec $K = \sum(4ca_i - b_i^2)$.

- Dans le cas de $\mathbb{H}^n$, on a $F = \frac{1}{2}(1 - |x|^2)$ ie $c = -1/2, b_i = 0, a_i = \frac{1}{2n}$, donc $K = -1$. Dans le cas de S^n, on a $F = \frac{1}{2}(1 + |x|^2)$. ie $c = \frac{1}{2}, b_i = 0, a_i = \frac{1}{2n}$ donc $K = 1$.

Exercice 10

- Comme g, Y, Z sont invariant à gauche, il est clair que $g(Y, Z)$ est constant sur G donc $X \cdot g(Y, Z) = 0$, ce qui donne $g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2} g([X, Y], Z) - \frac{1}{2} g(X, [Y, Z]) - \frac{1}{2} g(Y, [X, Z])$. Note ϕ_t le flot du champs Z,et $\psi_t(p) = \phi_t(e) \times p \times \phi_t^{-1}(e)$. Comme $\psi_t^* g = g$ on a $0 = \frac{d}{dt}|_0(\psi_t^* g(X, Y)) = g([Z, X], Y) - g(X, [Z, Y])$.
- Calcul direct $R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[Y,X]} Z$ plus identité de jacobi.
- $K(\sigma) = \frac{1}{4} g([[Y, X], X], Y)$ plus identité ci-dessus avec $Z = [X, Y]$.

Exercice 11

- L'antisymétrie $(XYZT) = -(YXZT)$ résulte de la définition. L'antisymétrie $(XYZT) = -(YXTZ)$ s'obtient en remarquant que $X \cdot Y \cdot (Z, T) - Y \cdot X \cdot (Z, T) = [X, Y](Z, T)$. La symétrie $(XYZT) = (ZTXY)$
- e_i BON ssi $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ ce qui implique e_i^* BON.
- PLus généralement on a un accouplement non-dégénéré $\Lambda^p V \times \Lambda^q V \to \Lambda^{p+q} V$ si $p + q = \dim(V)$.
- $e_1 \wedge e_2 \mapsto e_3^*$, $e_2 \wedge e_3 \mapsto e_1^*$, $e_3 \wedge e_1 \mapsto e_2^*$.
- On définit l'opérateur symétrique S sur T^*M par $g^*(S(x), y) = \beta^*(x, y)$. On sait qu'il existe e_i^* une BON qui diagonalise S: $S(e_i^*) = \lambda_i e_i^*$.
- On obtient $\mathrm{Ric}(e_1, e_1) = \beta(e_1 \wedge e_2) + \beta(e_1 \wedge e_3) = -\lambda_2 + \lambda_3$. ie

$$\begin{bmatrix} \mathrm{Ric}(e_1, e_1) \\ \mathrm{Ric}(e_2, e_2) \\ \mathrm{Ric}(e_3, e_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$$