TD3 de Géométrie Différentielle du Septembre 2009
UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT

Exercice 1

On fixe une base $e_1, ..., e_n$ de V. Pour toute application linéaire, on a alors $\phi(e_1)\wedge...\wedge\phi(e_n) = \det(\phi)(e_1\wedge...\wedge e_n)$. Donc $[\lambda e_1-\varphi(e_1)]\wedge...\wedge[\lambda e_n-\varphi(e_n)] = \det(\lambda \mathrm{Id} - \varphi)(e_1 \wedge ... \wedge e_n)$. On conclut en développant le membre de gauche.

Exercice 2

$\dim \Lambda^k V = 1, 4, 6, 4, 1$ pour $k = 1, 2, 3, 4$ et 0 pour $k \geq 5$.

Si e_1, e_2, e_3, e_4 est une base de V, les 3 vecteurs $e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$, $e_1 \wedge e_3 + e_4 \wedge e_2$, $e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3$ sont orthogonaux et Q-positifs tandis que $e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4$, $e_1 \wedge e_3 - e_4 \wedge e_2$, $e_1 \wedge e_4 - e_2 \wedge e_3$ sont orthogonaux et Q-négatifs. Ces 6 vecteurs forment une base de $\bigwedge^2 V$.

Exercice 3

A une forme $\alpha \in \mathrm{Sym}^p V^*$, on associe la fonction polynomiale homogène de degré p $P(v) = \alpha(v, v, ..., v)$. On a la formule de symétrisation qui permet de récupérer α à partir de P:

$$\alpha(v_1, ..., v_p) = P(\sum_1^p v_i) - \sum_{I\subset\{1,...,p\},\, |I|=p-1} P(\sum_I v_i) + \sum_{I\subset\{1,...,p\},|I|=p-2} P(\sum_I v_i) - ... + (-1)^p \sum_1^p P(v_i)$$

Exercice 4

Soit $\Phi(x) = x^{\otimes d}$. Alors $\Phi(tx) = t^d\Phi(x)$ donc Φ induit une application de $\mathbb{P}(V)$ dans $\mathbb{P}(\mathrm{Sym}^d V)$. Soit $e_0, ..., e_n$ une base de V et $[x_0 : ... : x_n]$ les coordonnées homogènes associés. Pour tout $I = (i_1, ..., i_d)$, $0 \leq i_j \leq n$, note $\bar{e}_I$ le symétrisé de $e_{i_1} \otimes .. \otimes e_{i_d}$, et $[y_I]$ les coordonnées homogènes associés. On a alors $\Phi[x_i] = [y_I] = [\prod_{i\in I} x_i]$, ce qui montre que Φ est différentiable. La carte $(x_0 = 1)$ est envoyée par Φ dans la carte $y_{0..0} = 1$, et pour tout $1 \leq j \leq n$, on a $y_{I_j} = dx_j$ avec $I_j = (0, ..., 0, j)$. On en déduit que Φ est une immersion injective. Comme $\mathbb{P}(V)$ est compact, c'est un plongement.

Pour $n = 1$, $\nu_d[x_0 : x_1] = [x_0^d : x_0^{d-1}x_1 : ...x_1^d]$. Pour $n = 2$, $\nu_2[x_0 : x_1 : x_2] = [y_{00} : y_{11} : y_{22} : y_{01} : y_{02} : y_{12}] = [x_0^2 : x_1^2 : x_2^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1x_2] \in \mathbb{R}P^5$. Equations de $\nu_2(\mathbb{R}P^2)$: $y_{01}^2 = y_{00}y_{11}$, $y_{02}^2 = y_{00}y_{22}$, $y_{12}^2 = y_{11}y_{22}$.

Exercice 5 L'application bilinéaire $V \times W \to V \otimes W$ induit une application $\phi : \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}(V \otimes W)$. e_i base de V, x_i coordonnées homogènes de $\mathbb{P}(V)$; f_j base de W et y_j coordonnées homogènes de $\mathbb{P}(W)$. Alors $e_i \otimes f_j$ base de $V \otimes W$ et w_{ij} coordonnées homogènes de $\mathbb{P}(V \otimes W)$. Dans ces coordonnées $\phi([x_i][y_j]) = [w_{ij}] = [x_iy_j]$. La carte $x_0 = 1, y_0 = 1$ est envoyée sur $w_{00} = 1$. Si deux points $p = [x_i][y_j]$, $p' = [x'_i][y'_j]$ ont même image dans la carte $w_{00} = 1$, alors p et p' sont dans la carte $x_0 = 1, y_0 = 1$ et on a facilement $x_i = x'_i$, $y_j = y'_j$ donc $p = p'$. Finalement l'image du champ $\frac{\partial}{\partial x_i}$ est $\frac{\partial}{\partial w_{i0}} + \sum_{j\geq 1} y_j \frac{\partial}{\partial w_{ij}}$ donc ϕ est une immersion.

Exercice 6

Pour la dimension 1 et 2 le résultat est trivial. En dimension 3, on regarde $A : V \to \Lambda^3 V$, $A(v) = \alpha \wedge v$. Comme $\dim \ker A \geq 2$, on peut trouver une base de V: v_1, v_2, v_3 avec $v_1, v_2 \in \ker A$. On écrit alors $\alpha = x_1 v_2 \wedge v_3 + x_2 v_3 \wedge v_1 + x_3 v_1 \wedge v_2$. Comme $\alpha \wedge v_1 = \alpha \wedge v_2 = 0$, $\alpha = x_3 v_1 \wedge v_2$.

Pour passer de la dimension $n-1$ à la dimension n, on prend α tel que $\alpha\wedge\alpha = 0$. On prend $v_1, ..., v_n$ une base de V. On écrit $\alpha = u\wedge v_n + \alpha'$, $u \in V$ et α' ne contenant que des termes $v_i \wedge v_j$ avec $i, j \leq n-1$. De $\alpha \wedge \alpha = 0$, on en déduit $\alpha' \wedge \alpha' = 0$ et $u \wedge \alpha' = 0$. Par récurrence $\alpha' = u_1 \wedge u_2$, et $u \wedge u_1 \wedge u_2 = 0$ donc $\lambda u + \mu_1 u1 + \mu_2 u_2 = 0$. Si $\lambda = 0$, $\alpha' = 0$. Sinon $\alpha \in \Lambda^2 \mathrm{Vect}(u_1, u_2, v_n)$ qui est de dimension 3.

On note e_1, e_2, e_3, e_4 la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On ne traite que la carte des plans P transverses à $\mathrm{Vect}(e_3, e_4)$. Un tel plan est uniquement déterminé par une matrice 2×4:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$$

L'image de $G(2, 4)$ dans $\mathbb{P}(\Lambda^2\mathbb{R}^4)$ est dans la carte $e_1 \wedge e_2 = 1$, et donnée par $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (e_1 + x_1 e_3 + x_3 e_4) \wedge (e_2 + x_2 e_3 + x_4 e_4) = e_1 \wedge e_2 + x_2 e_1 \wedge e_3 + x_4 e_1 \wedge e_4 - x_1 e_2 \wedge e_3 - x_3 e_2 \wedge e_4 + (x_1 x_4 - x_2 x_3) e_3 \wedge e_4 = [1 : x_2 : x_4 : -x_1 : -x_3 x_2 : (x_1 x_4 - x_2 x_3)]$.

Si $\alpha = x_1 e_1 \wedge e_2 + x_2 e_2 \wedge e_3 + x_3 e_3 \wedge e_4 + x_4 e_4 \wedge e_1 + x_5 e_1 \wedge e_3 + x_6 e_2 \wedge e_4$. Alors $\alpha \wedge \alpha = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 [x_1 x_3 - x_2 x_4 - x_5 x_6]$. Une équation de l'image de $G(2, 4)$ dans $\mathbb{R}P^5$ est donc $x_1 x_3 - x_2 x_4 - x_5 x_6 = 0$.

Exercice 8

Une preuve est donnée dans Gallot-Hulin-Lafontaine p.40.

Si la condition 1 est satisfaite P est une section de $(TM^{\otimes p} \otimes TM^{*\otimes q})^* \otimes (TM^{\otimes r} \otimes TM^{*\otimes s})$ donc un tenseur de type $q + r, p + s$.

Ces applications ne sont pas des tenseurs car elles ne sont pas linéaires au sens où $[fX, Y] = fX \cdot Y - Y \cdot (fX) = f[X, Y] - df(Y)\, X \neq f[X, Y]$ en général. Idem pour $L_X(fY) = df(X)Y + fL_X Y \neq fL_X Y$.

Exercice 9

$F^*(u\, du + v\, dv) = (2x^3 + 3xy^2)\, dx + (3x^2 y + 2y^3)\, dy$
$c^*\omega = dt$

Exercice 10

$\alpha \wedge \beta = (x^2 + xy^3) dx \wedge dy \wedge dz$; $d\alpha = dx \wedge dy \wedge dz$; $\beta(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}) = x^2 + zy^2$.

$\omega \wedge \omega = [(x^2+t)(y^2+z) - 1] dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt$. Si $f = (x^2+t)(y^2+z) - 1$, alors $df = (2x(y^2+z), 2y(x^2+t), x^2+t, y^2+z)$ non nul sur $f = 0$. Donc $\{p, \omega \wedge \omega(p) = 0\}$ est une hypersurface de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 11

$M = f^{-1}\{0\}$. Alors $df|M = 0$ donc $f_x dx + f_y dy = 0$ sur M. On pose $\omega = dx/f_y = -dy/f_x$. Cette forme est partout définie car f est une submersion.

En dimension quelconque on procède de la même manière $df = \sum f_{x_i} dx_i = 0$ en restriction à $M = f^{-1}\{0\}$. En prenant le produit extérieur avec $dx_1 \wedge ... \widehat{dx_i} \wedge \widehat{dx_j} ... \wedge dx_n$ on obtient $(-1)^i dx_1 \wedge ... \widehat{dx_i} ... \wedge dx_n / f_{x_i} = (-1)^j dx_1 \wedge ... \widehat{dx_j} ... \wedge dx_n / f_{x_i}$ sur M. On peut donc définir la forme $\omega = (-1)^i dx_1 \wedge ... \widehat{dx_i} ... \wedge dx_n / f_{x_i}$ qui sera partout non nulle.

Exercice 12

Soit $\omega \in \Lambda^2 V^*$ non-dégénérée. On prends $v_1 \in V$. Comme $\omega(v_1, \cdot)$ est une forme non-nulle, on peut trouver $v_2 \in V$ tel que $\omega(v_1, v_2) = +1$. Étant alternée, $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ est un plan. Soit Q l'orthogonal à ce plan. On a la décomposition $V = \mathrm{Vect}(v_1, v_2) \oplus Q$ et on peut donc répéter le même argument. On arrive alors à une base $v_1, ..., v_{2n}$ tel que $\omega = v_1^* \wedge v_2^* + v_3^* \wedge v_4^* + ...$

L'existence de λ est une conséquence du lemme de Poincaré et du fait que $d\omega_t = 0$. L'existence de X_t résulte du fait que ω_t est non-dégénéré pour tout t. Ensuite le thm de Cauchy-Lipshitz fournit l'existence d'un flot Ψ_t pour un temps arbitrairement long si on réduit assez le voisinage de départ. Ensuite on a:

$$\frac{d}{dt} \Psi_t^* \omega_t = \Psi_t^*(\omega - \omega_0) + \Psi_t^*(L_{X_t} \omega_t) =$$
$$\Psi_t^*(\omega - \omega_0) + \Psi_t^* X_t \lrcorner d\omega_t + \Psi_t^* d(X_t \lrcorner \omega_t) =$$
$$\Psi_t^*(\omega - \omega_0) + 0 + \Psi_t^* d\lambda = 0$$

Le fait que $\frac{d}{dt} \Psi_t^* \omega = \Psi_t^*(L_{X_t} \omega)$ alors que le champs Ψ_t est le flot d'un champ dépendant du temps se montre à l'aide de la caractérisation algébrique de la dérivée de Lie. Il suffit de montrer celà pour ω une fonction.