23-11-2022

Ćwus 8

II.2 a) harmoniques

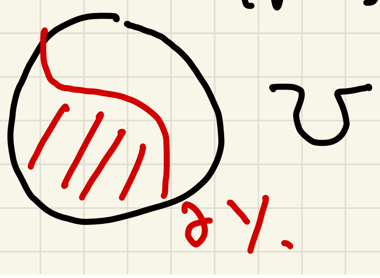
b) sous-harmonique

c) problème de Dirichlet sur une surface de Riemann.

X surface de Riemann connexe.

. $Y \subseteq X$ ouvert à bord lisse.

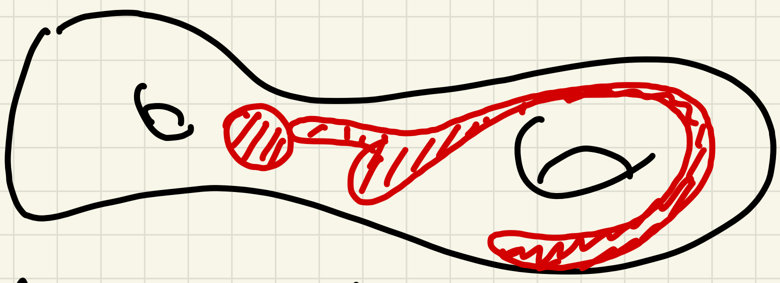
explication. $x \in \partial Y$. Il existe une carte holomorphe (U, φ) centrée en x tq $\varphi(\partial Y \cap U) = \{\gamma = 0\}$ avec $\gamma : U \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^\infty$ et $d\gamma|_{\{\gamma=0\}}$ non nulle en tout point



∂Y réel analytique : même définition avec γ réel analytique.

terminologie : un domaine $Y \subseteq X$ est un disque conforme (de X) si $\exists$ carte holomorphe (U, φ) tq $\underset{\text{ouvert}}{\varphi(U) \supseteq \overline{\mathbb{D}}(0,1)}$

et $Y = \varphi^{-1}(\mathbb{D}(0,1))$



problème de Dirichlet : construire des fonctions harmoniques avec données au bord prescrite. (OK si $X = \mathbb{D}(0,1)$ $f|_{\partial X}$ $\mathcal{C}^0$)

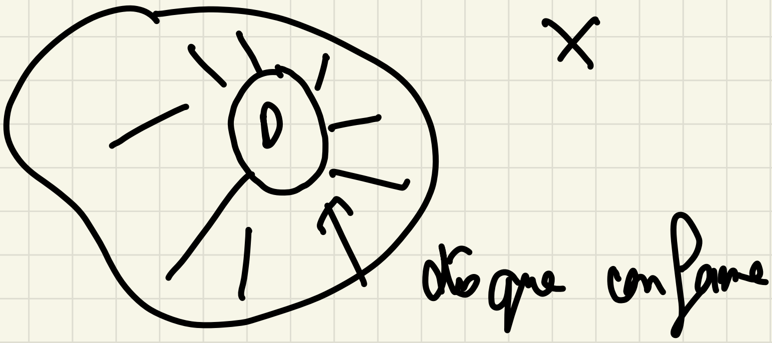
Théorème : $Y \subseteq X$ ∂Y lisse

. $f : \partial Y \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$ et bornée ($\sup_{\partial Y} |f| < \infty$)

Alors il existe une & une seule fonction

$u : \overline{Y} \to \mathbb{R}$ continue telle que

(i) $u|_{\partial Y} = f$ (ii) $u|_Y$ harmonique



$Y = X \setminus D$.

$\rightsquigarrow$ démonstration du thm s'appuie sur la technique dite de **balayage**.

idée : on part de fonctions sous-harmoniques $u|_{\partial Y} \leq f$ $u \in SH(Y)$ $\rightsquigarrow$ on les améliore !

démonstration.

$$\mathcal{F} = \left\{ u : \overline{Y} \to \mathbb{R} \ \mathcal{C}^0 \text{ tq } \begin{array}{l} u \in SH(Y) \quad u|_{\partial Y} \leq f \\ \sup_{\overline{Y}} u \leq \sup_{\partial Y} f \end{array} \right\}.$$

On va montrer que $\mathcal{F} \neq \emptyset$ et que la fonction $u_{\mathcal{F}} = \sup_{\mathcal{F}} u$ résout le problème de Dirichlet

Notations : $v : Y \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$ sous-harmonique

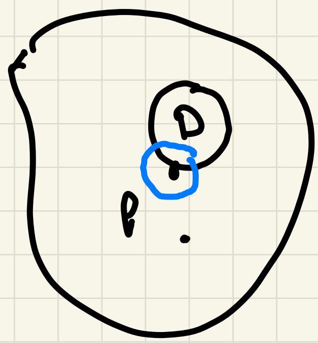
$D \subseteq Y$ disque conforme

$$v_D = \begin{cases} v & \text{sur } Y \setminus D \\ P_D v & \text{dans } D \end{cases}$$

$P_D v$ = unique fonction continue dans $\bar{D}$, harmonique dans D, tq $P_D v|_{\partial D} = v$

[noyau de Poisson]

<u>remarque</u> : v_D est sous-harmonique, C^0 dans Y (harmonique dans D)



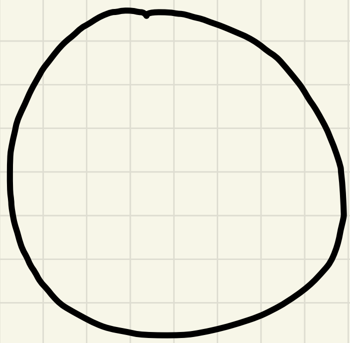
Y si $p \notin \partial D$, alors il est clair que v_D est sous-harmonique près de p.

si $p \in \partial D$. on calcule dans une carte locale centrée en p.

$$v_D(p) = \underset{\text{vsh}}{v(p)} \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(p + r e^{i\theta})\, d\theta$$

D

$$\underset{\text{sous-harmonique}}{\le} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v_D(p + r e^{i\theta})\, d\theta$$



$P_D v$ harmonique

v sous-harmonique

$v - P_D v \in SH(D)$

$v - P_D v \big|_{\partial D} = 0$

$\Rightarrow$ par définition des fonctions sous harmoniques $v - P_D v \le 0$ dans D

$\Rightarrow \quad v \le v_D$

conclusion v_D vérifie la propriété de sous-moyenne en p $\Rightarrow$ $v_D \in SH(Y)$.

définition une famille $\mathcal{G}$ de fonctions sous-harmoniques C^0 sur Y est dite de **Perron** si

(a) $u, v \in \mathcal{G} \Rightarrow \exists w \in \mathcal{G} \quad w \geq \max\{u, v\}$

(b) $u \in \mathcal{G} \Rightarrow \forall D$ disque conforme $u_D \in \mathcal{G}$

Proposition si $\mathcal{G}$ est une famille de Perron, non vide telle que pour tout $y \in Y$

$\sup_{u \in \mathcal{G}} u(y) < \infty$. Alors $u_{\mathcal{G}} = \sup_{\mathcal{G}} u$

est harmonique dans Y.

<u>remarque</u> proposition $\Rightarrow u_{\mathcal{F}}$ est harmonique dans Y.

$$\mathcal{F} = \{ u \in \mathcal{C}^0(\bar{Y}) \quad u|_{\partial Y} \leq f \quad \sup_Y u \leq \sup_{\partial Y} f \quad u \in SH(Y) \}$$

$\mathcal{F}$ est une famille non vide de Perron.

- $\mathcal{F} \neq \emptyset \qquad u = \inf_{\partial Y} f$
- $\mathcal{F}$ vérifie (a) : $u, v \in \mathcal{F}$ $\Rightarrow \max(u,v) \in \mathcal{F}$
- (b) $u \in \mathcal{F}$ D disque conforme $\Rightarrow u_D \in \mathcal{F}$

$(\bar{D} \subseteq Y)$

$$\left[\begin{array}{l} u \leq u_D \\ u = u_D \text{ sur } \partial Y \end{array} \right.$$

Il reste à démontrer deux choses

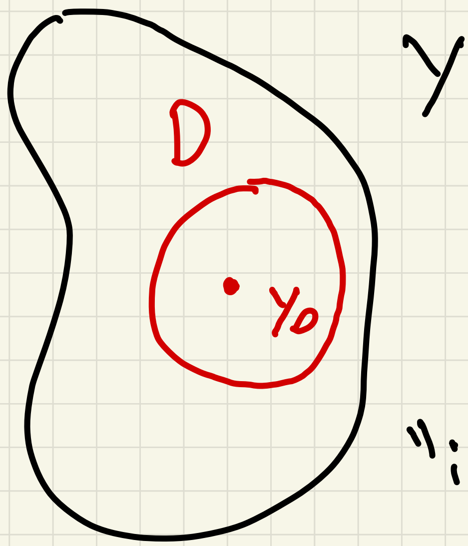
1. La proposition (famille de Perron)
2. $y \in \partial Y$ $\displaystyle\lim_{\substack{x \to y \\ \Uparrow \\ Y}} u_{\mathcal{F}}(x) = f(y)$

démonstration de la proposition.

Y ouvert de R. connexe $\mathcal{F}$ famille de Perron

$\mathcal{F} \neq \emptyset$. $u_{\mathcal{F}} = \sup_{\mathcal{F}} u$ est harmonique.

On fixe un point $y_0 \in Y$, et on montre que $u_{\mathcal{F}}$ est harmonique au voisinage de y_0.



D = disque conforme

$u_{\mathcal{G}} = \sup_{\mathcal{G}} u$

« idée = $u_{\mathcal{G}}|_D = \sup_{\mathcal{G}} u_D$ »

u_D harmonique

$u_{\mathcal{G}}(y_0) = \lim_n u_n(y_0) < \infty$, $u_n \uparrow$, $\mathcal{G}$

. on remplace u_n par $u'_n \in \mathcal{G}$ $u'_{n+1} \geq u'_n \geq u_n$

u_1 $\quad u_2$ $\quad u_3$

$\max(u_1, u_2)$ $\quad \max\{u'_2, u_3\}$ $\quad \dots$

$\wedge$ (a) $\quad \wedge$ (a)

u'_2 $\quad u'_3$

. par (b) on peut supposer que $u'_n|_D$ harmonique

$u'_n \rightsquigarrow (u'_n)_D$

pour résumer $\exists\, v_n \in \mathcal{G}$

- $v_n|_D$ harmonique
- $v_n \leq v_{n+1}$
- $v_n(y_0) \to u_{\mathcal{G}}(y_0)$

$u^+ = \lim v_n$. Par Harnack, elle est harmonique dans D.

on montre que $u^+ = u_{\mathcal{G}}$ dans D.

($\Rightarrow$ proposition).

$y \neq y_0$ $y \in D$ $\exists\, w_n \in \mathcal{G}$ $w_n|_D$ harmonique

$w_n \leq w_{n+1}$ $w_n(y) \to u_{\mathcal{G}}(y)$.

On peut supposer que $w_n \geq u_n$

on regarde $w^+ = \lim w_n$ dans D

harmonique $u_\varphi \geq w^+ \geq u^+$

$$w^+(y) = u_\varphi(y)$$

$$u_\varphi(y_0) \geq w^+(y_0) \geq u^+(y_0) = u_\varphi(y_0)$$

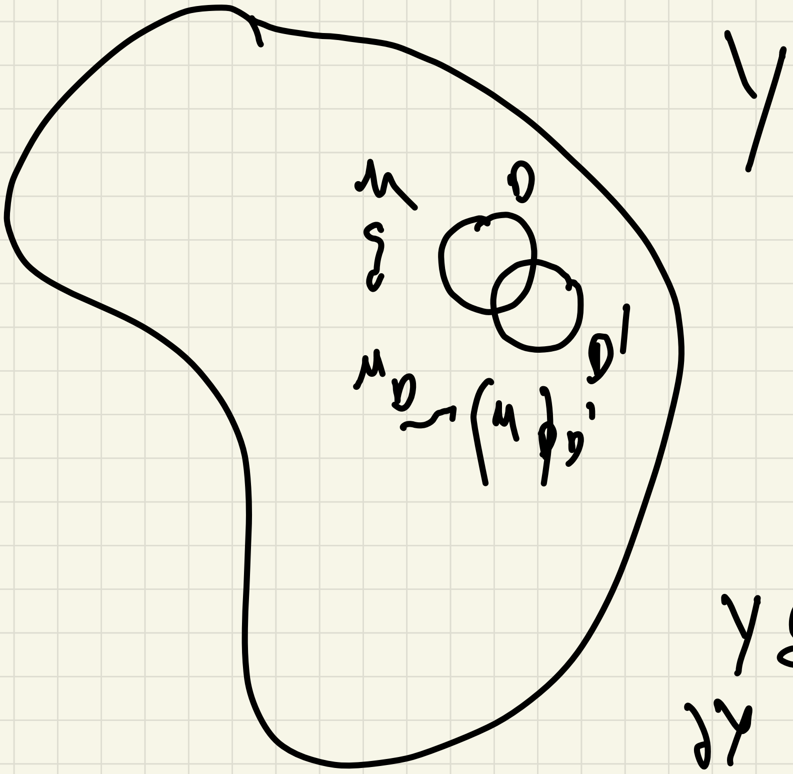
$$w^+ - u^+ (y_0) = 0$$

principe du maximum $\Rightarrow$ $w^+ = u^+$.

$$u_\varphi(y) = u^+(y) \quad \forall y \in D$$

donc u_φ est harmonique dans D

///



$Y \subseteq X$

∂Y lisse

$f : \partial Y \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$

borné

$$\mathcal{F} = \left\{ u \in \mathcal{C}^0(\bar{Y}) \cap SH(Y),\ \sup u \leq \sup f,\ u|_{\partial Y} \leq f \right\}$$

$u_f = \sup_{\mathcal{F}} u$ est harmonique dans Y

$\Rightarrow$ Analyser le comportement de u_f au bord de Y

Proposition

$$\lim_{\substack{x \to y \in \partial Y \\ \uparrow \\ Y}} u_{\bar{f}}(x) = f(y)$$

Lemme clef : Pour $m \leq c$

$\exists\, v \in \mathcal{C}^0(\bar{Y}) \cap SH(Y)$,

$v(y) = c$, $v\big|_{\bar{Y} \setminus V} \equiv m$

$v\big|_{V \cap \bar{Y}} \leq c$

Lemme-clef $\Rightarrow$ proposition.

On fixe $k \leq f \leq K$

$\varepsilon > 0$ et V un voisinage de y (disque conforme)

$$f(y) - \varepsilon \leq f \leq f(y) + \varepsilon \quad \text{sur } V.$$

. lemme clé avec $c = f(y) - \varepsilon$ $m = h - \varepsilon$

$v \in \mathcal{C}^0(\bar{Y}) \cap SH(Y)$ $v(y) = f(y) - \varepsilon$

$v|_{\partial Y} \leq f$ $\rightsquigarrow$ $\partial Y \setminus \bar{V}$ $f \geq h \geq h - \varepsilon \geq v$

$\rightsquigarrow$ $\partial Y \cap \bar{V}$ $v \leq c = f(y) - \varepsilon \leq f$

dans $\bar{V}$

$$\sup_{Y} v \leq \sup_{\partial Y} f \Rightarrow v \in \mathcal{F}$$

$$u_{\mathcal{F}}|_{\bar{V}} \geq v|_{\bar{V}}$$

$$\varliminf_{x \to y} u_{\mathcal{F}}(x) \geq \varliminf_{x \to y} v = f(y) - \varepsilon .$$

. lemme - def avec $m = -K$ $c = \cdot f(y)$

$w \in \mathcal{C}^0(\bar{Y}) \cap SH(Y)$

on prend $u \in \tilde{\mathcal{F}}$, on regarde la fonction $u+w$

$V \cap \partial Y$ $(u+w) \leq f - f(y) \leq \varepsilon$

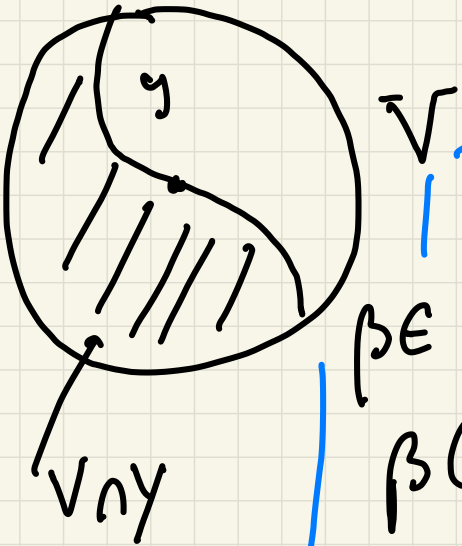
∂V $(u+w) \leq \sup f - K \leq 0$

principe du maximum

$\Rightarrow u+w \Big|_V \leq \varepsilon \Rightarrow u_{\mathcal{F}} \underset{V}{\leq} \varepsilon - w \Big|_V$

$\overline{\lim_{x \to y}}\, u_{\mathcal{F}} \leq \varepsilon + f(y)$ ///

démonstration du lemme :



on construit une barrière

$$\boxed{\begin{array}{l} \beta : \overline{Y\cap V} \to \mathbb{R} \\ \beta \in \mathcal{C}^0(\overline{Y\cap V}) \cap SH(Y\cap V) \\ \beta(y) = 0 \quad \beta < 0 \text{ sur } \overline{Y\cap V}\setminus\{y\} \end{array}}$$

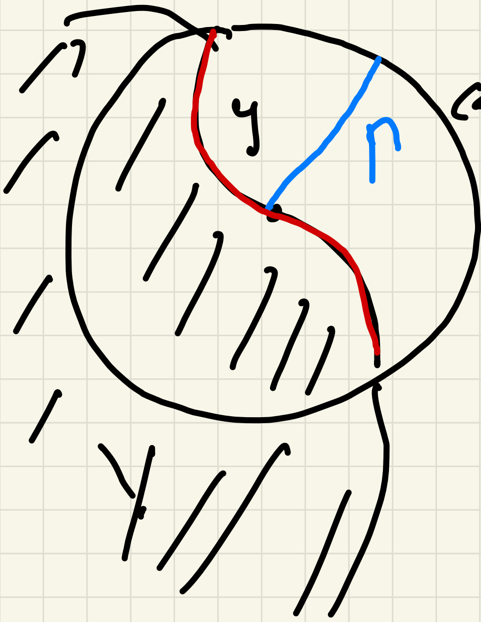
barrière $\Rightarrow$ lemme $\qquad m \leq c$

on peut supposer $\beta < m - c$ sur $\partial V \cap \overline{Y}$

$$\boxed{v = \begin{cases} \max\{m, \beta + c\} & \text{dans } \overline{V\cap Y} \\ m & \text{dans } \overline{Y}\setminus V \end{cases}}$$

on vérifie que $v \in \mathcal{C}^0(\overline{Y}) \cap SH(Y)$.

Construction de la barrière :

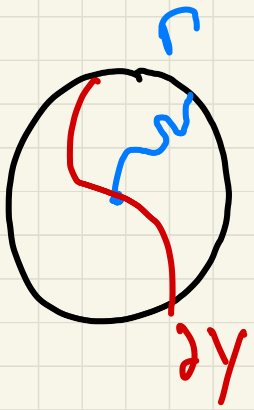


$\leftarrow$ V disque conforme

on choisit un chemin continu dans ${}^c Y$ qui relie y au bord de V, $\Gamma \cap \partial Y = \{y\}$.

on identifie $V \simeq \mathbb{D}(0,1) \ni z$

$y \mapsto 0$



on choisit une détermination du $\log$ sur $V \setminus \Gamma$

$\varphi(z)$ "$=$ $\log z$".

$$\beta(z) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\varphi(z)}\right)$$

si $z = r e^{i\theta}$ en coordenades polars

$$\mathrm{Log}\, z = \mathrm{Log}\, r + i\theta \leftarrow \text{definit mòdul } 2\pi$$

$$= A + iB$$

$$|z| = r < 1 \qquad \mathrm{Re}(\mathrm{Log}\, z) = A < 0$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\mathrm{Log}\, z}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{A+iB}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{A+iB}{A^2+B^2}\right)$$

$$= \frac{A}{A^2+B^2} < 0 \qquad (z \neq 0)$$

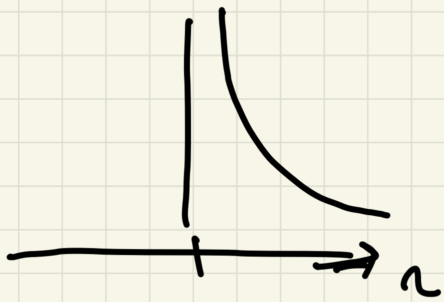
///

Exercice 14

$u : \mathbb{D}(0,1) - \{0\} \to [-\infty, +\infty[$

u sous-harmonique et bornée supérieurement.
$$\sup_{\mathbb{D}(0,1)-\{0\}} u = A < +\infty$$

[**NON-exemple** : $u = -\mathrm{Log}|z|$.

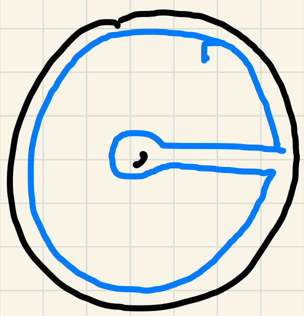


$|z| = r$]

Alors u est sous-harmonique dans $\mathbb{D}$.

rappel : $f : \mathbb{D} - \{0\} \to \mathbb{C}$ hol.

Si $\sup_{\mathbb{D}} |f| < \infty \Rightarrow f$ hol en 0.



$$\overset{\mathbb{D}}{2i\pi}\, f(z) = \int \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

$$+ \int_{\bigcirc_r} \frac{f(\zeta)}{z-\zeta}\, d\zeta \underset{r \to 0}{\longrightarrow} 0 \qquad z \neq 0$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta . \quad \text{donc hol dans } \mathbb{D}$$

Harmonique $\Rightarrow$ idem !

$h : \mathbb{D} - \{0\} \to \mathbb{R}$ harmonique borné

elle s'étend à travers 0.

$$\mathbb{H} \xrightarrow{\pi} \mathbb{D} - \{0\}$$
$$z \longmapsto \exp(2i\pi z)$$

$$h \circ \pi = \mathrm{Re}(g) \qquad g : \mathbb{H} \to \mathbb{C} \text{ hol.}$$

$$\mathrm{Re}\Big(\underbrace{g(z+1) - g(z)}_{\text{hol.}}\Big) = 0 \qquad \Rightarrow g(z+1) = g(z) + i\underset{\underset{\mathbb{R}}{\uparrow}}{\alpha}$$

. $\exists\, \tilde{g} : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ hol $\tilde{g}(z+1) = \tilde{g}(z)$

et $\mathrm{Re}(\tilde{g}) = h \circ \pi$

. $\exists\, f : \underset{\text{hol.}}{\mathbb{D} - \{0\} \to \mathbb{C}}$ $\qquad h = \mathrm{Re}(f)$

si f est bornée $\Rightarrow$ h harmonique en 0

si f n'est pas bornée

méromorphe

$f(z) = a z^{-k}(1 + o(1))$

$k \geq 1 \quad a \neq 0$

$t \to \alpha t \qquad a \alpha^{-k} = 1$

$\mathrm{Re}(f(\alpha t)) \to +\infty$

contradiction !

singularité essentielle

$f(\mathbb{D}(0,r) - \{0\})$

est dense

dans $\mathbb{C}$

$\Rightarrow$ absurde

car $h = \mathrm{Re}(f)$

est bornée

$u : \mathbb{D} - \{0\} \to [-\infty, +\infty[$

sous-harmonique $\quad u \leq 0$

$u + \frac{1}{n} \log(z) = u_n(z)$

u_n sous-harmonique dans $\mathbb{D} - \{0\}$

$u_n(0) = -\infty$

u_n est scs en 0

$z_k \to 0 \qquad u_n(z_k) \leq \frac{1}{n} \log|z_k| \to -\infty$

u_n vérifie l'inégalité de sous-moyenne !

$$u_n(0) = -\infty \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_n(r e^{i\theta})\, d\theta$$

$$u_n(z) = u(z) + \frac{1}{n} \operatorname{Log}|z|$$

$$u_n \leq u_{n+1}.$$

$$u^+ = \lim u_n$$

$(u^+)^*$ est sous-harmonique.

$$u^+(z) = u(z)$$

$$z \neq 0$$

$\leadsto$ $u \in SH(\mathbb{D} - \{0\})$ $\quad u \leq 0$

si on pose $u(0) = \limsup_{z \to 0} u(z)$

alors $u : \mathbb{D} \to [-\infty, +\infty[$ est sous-harmonique.

(b) $u : \mathbb{C} \to [-\infty, +\infty[$

sous-harmonique bornée (supérieurement)

on regarde $v(z) = u(1/z)$

sous-harmonique dans $\mathbb{D} - \{0\}$, bornée.

$\Rightarrow$ v s'étend.

$\Rightarrow$ $u : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to [-\infty, +\infty[$

est sous-harmonique

$\Rightarrow$ u est constante

principe du max.

(Thm de Liouville sous-harmonique)