Tomo 5

14 / 11 / 2022

II. Construction d'objets holomorphes sur les surfaces de R.

II.1 Théorème d'uniformisation et applications.

Thm S une surface de R. simplement connexe. Alors S est biholomorphe à $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$, ou à $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

La théorie des revêtements "permet" de classer toutes les surfaces de R.

revêtement universel.

S une surface de R. admet un revêtement universel (car localement S est homéomorphe à un disque contractile).

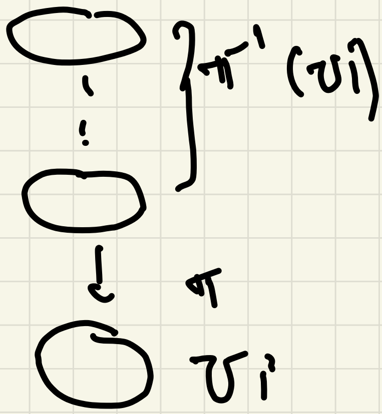
$\hat{S}$ = revêtement universel de S.

$\pi : \hat{S} \to S$ continue, revêtement

$\exists (U_i)_{i \in I}$ recouvrement ouvert de S, et un ensemble discret F, homéo

$\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times F$

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U_i) \arrow[rr, "\varphi_i", "\sim"'] \arrow[dr, "\pi"'] & & U_i \times F \arrow[dl, "pr_1"] \\
& U_i &
\end{tikzcd}$$



de plus $\hat{S}$ est simplement connexe.

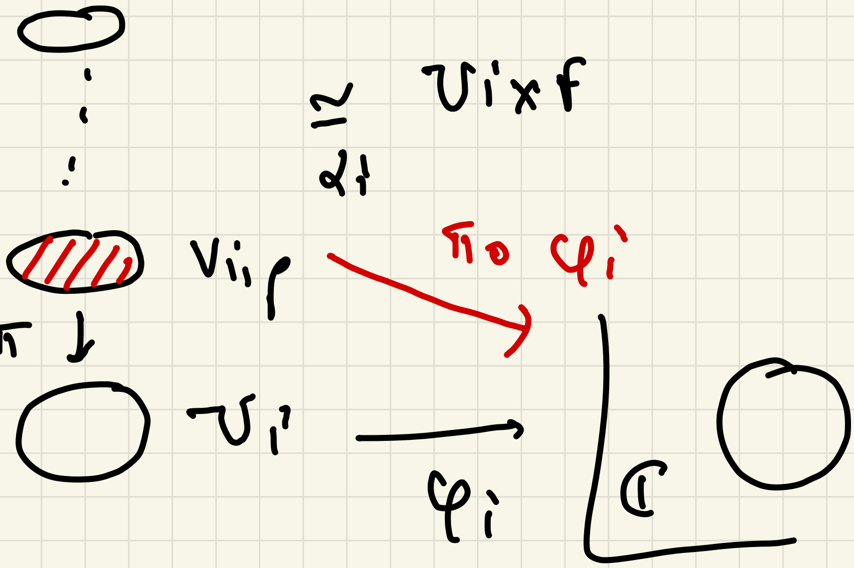
Prop. $\hat{S}$ est muni d'une unique structure de surface de R. telle que $\pi : \hat{S} \to S'$ est holomorphe.

démonstration quitte à réduire les U_i on peut supposer $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I} = \mathcal{A}$ est un atlas hol. sur S', et $\varphi_i(U_i) = \mathbb{D}$

On construit un atlas sur $\hat{S}$

$$\hat{\mathcal{A}} = \{(V_{i,p}, \psi_{i,p})\}_{\substack{i \in I \\ p \in F}}$$

$V_{i,p} = \alpha_i^{-1}(U_i \times \{p\})$ $\psi_{i,p} = \varphi_i \circ \pi$



$\psi_{i,p}$ homeo. on son ilmag !

$$\psi_{i,p} \circ \psi_{j,q}^{-1} = \varphi_i \circ \pi \circ \pi^{-1}\Big|_{V_{j,q}} \circ \varphi_j^{-1}$$

$$\pi : V_{j,q} \xrightarrow{\text{homeo}} U_j$$

$$\| $$

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$$

hol.

///

Thm S surface de R. connexe

$\pi : \hat{S} \to S$ revêtement universel (hol.)

On est dans l'un des trois cas suivants :

① $\hat{S} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ et π est un bihol.

② $\hat{S} = \mathbb{C}$, S est biholomorphe à $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^\times$, $\mathbb{C}/\Lambda$ (courbe elliptique)

③ $\hat{S} = \mathbb{H}$ (ou $\mathbb{D}$). Il existe un groupe G de $PSL(2, \mathbb{R})$ agissant proprement discontinûment sans point fixe sur $\mathbb{H}$, t.q.

$$S \simeq \mathbb{H} / G$$

terminologie

. une surface de R. S telle que $\hat{S} = \mathbb{H}$ est dite hyperbolique

. dans ce cas, G est un sous-groupe discret de $PSL(2,\mathbb{R})$

démonstration (du thm)

application directe de la théorie des revêtements.

$\pi : \hat{S} \to S$ revêtement universel, π hol.

$\hat{S} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ou $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$.

$$\mathrm{Aut}(\pi) = \{ g : \hat{S} \to \hat{S} \text{ homéomorphisme } \pi \circ g = \pi \}.$$

Lemme : $\mathrm{aut}(\pi)$ est un sous groupe du groupe des bihol. de $\hat{S}$ qui agit proprement discontinûment sur $\hat{S}$ sans point fixe et

$$\begin{tikzcd} \hat{S} \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\text{hol.}"'] & & S \\ & \hat{S}/\mathrm{aut}(\pi) \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

φ est un biholomorphisme.

$\underbrace{\hat{S}/\mathrm{aut}(\pi)}_{}$ surface de R.

$\rightsquigarrow$ si $\hat{S} = \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ $\pi : \hat{S} \to S$.

$$\mathrm{aut}(\pi) \subseteq \mathrm{Bihol.}(\hat{\mathbb{C}}) = PGL(2, \mathbb{C})$$
$$= \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d},\ \begin{array}{l} ad-bc \\ = \pm 1 \end{array} \right\}$$

on donne $g \in PGL(2, \mathbb{C})$

possède **toujours** un point fixe dans $\hat{\mathbb{C}}$.

$$z = \frac{az+b}{cz+d} \qquad c=0 \quad a=1$$

$$g(z) = z + \frac{b}{d}$$

$$g(\infty) = \infty \quad !$$

$\Rightarrow$ $\mathrm{aut}(\pi) = \{\mathrm{Id}\}$

$\Rightarrow$ $S \simeq \hat{S} / \{\mathrm{Id}\} \simeq \hat{\mathbb{C}}$ ///

$\leadsto$ si $\hat{S} = \mathbb{C}$ $\quad \mathrm{aut}(\pi) \subseteq \mathrm{Aff}(\mathbb{C})$

$$= \{ z \mapsto az + b \}.$$

$g(z) = az + b$ $\quad a \neq 1$, alors g possède un point fixe. $-\frac{b}{a-1}$.

$\mathrm{aut}(\pi) \subseteq \{ z \mapsto z + b \} \simeq (\mathbb{C}, +)$

agit proprement discontinûment $\Rightarrow$ discret aut (π) sous-groupe discret de $(\mathbb{C}, +)$

$= \{id\}$ $\quad S = \hat{S}/\{id\} \simeq \mathbb{C}$

$\simeq \mathbb{Z}$ rang 1 $\quad S = \hat{S}/\{z \to z+b\} \simeq \mathbb{C}^*$

$\exp\left(\frac{2i\pi}{b}\cdot\right)$

$\simeq \mathbb{Z}^2$ rang 2 $\quad S = \hat{S}/\Lambda$ réseau

courbe elliptique

////thm

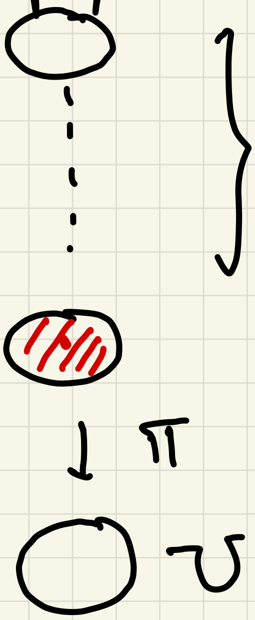
$\rightsquigarrow \hat{S} = \mathbb{H}$ $\quad$ aut $(\pi) \subseteq PSL(2, \mathbb{R})$

discret, sans point fixe dans $\mathbb{H}$.

obs : plein d'exemples !!!

démonstration du lemme

. $\mathrm{aut}(\pi) = \{ g : \hat{S} \to \hat{S},\ \pi \circ g = \pi \}$ agit proprement discontinûment sans point fixe.



connexe

$\pi^{-1}(U) \overset{\sim}{=} U \times F \qquad g \in \mathrm{aut}(\pi)$

- $g(\pi^{-1}(U)) = \pi^{-1}(U)$
- $g|_{\pi^{-1}(U)}$

$$g(\underset{\substack{\uparrow \\ U}}{z}, \underset{\substack{\uparrow \\ F}}{p}) = (z, \sigma(p)) \qquad \sigma : F \to F \text{ bijection}$$

$\{ x \in \hat{S},\ g(x) = x \}$ = fermé

= ouvert !

par connexité $\{g = id\} = \emptyset$ ou $= \hat{S}$

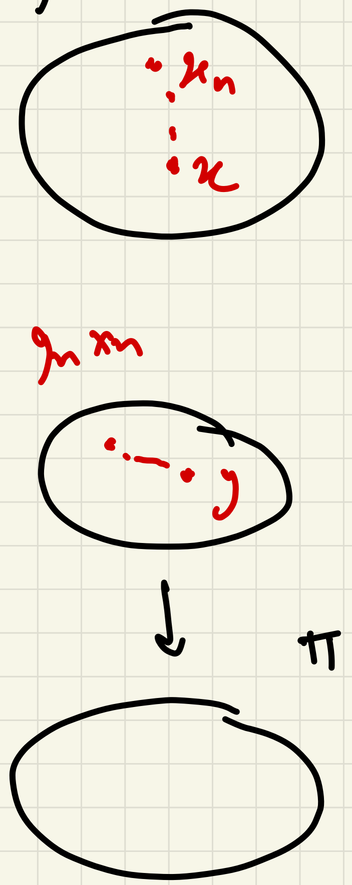
et (π_1) agit proprement discontinûment.

par contradiction $\{g,\ g.K \cap K \neq \emptyset\}$ est infini

$x_n \in \pi^{-1}(U)$ $\quad x_n \to x \in \pi^{-1}(U)$

$g_n \cdot x_n \in K$ $\quad g_n . x_n \to y$.

$g_n \neq g_m$



$\varphi^{-1}(U \times \{p\})$

$\varphi^{-1}(U \times \{q\})$

pour $n \gg 0$

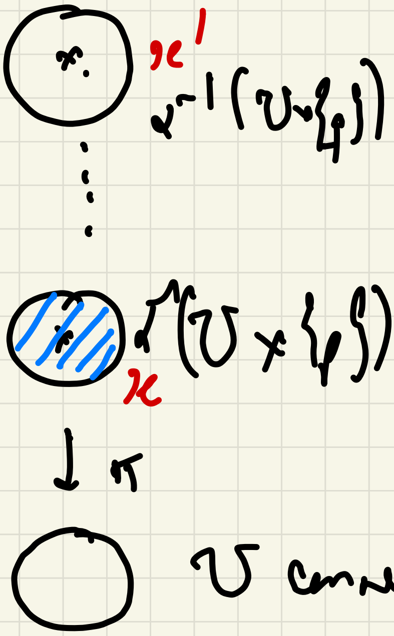
U

$g_m^{-1} \circ g_n x_n = x_m$

$\Rightarrow g_m = g_n$.

• $\mathrm{aut}(\pi)$ agit transitivement sur $\pi^{-1}(p)$.

$(\hat{S} / \mathrm{aut}(\pi) \simeq S)$

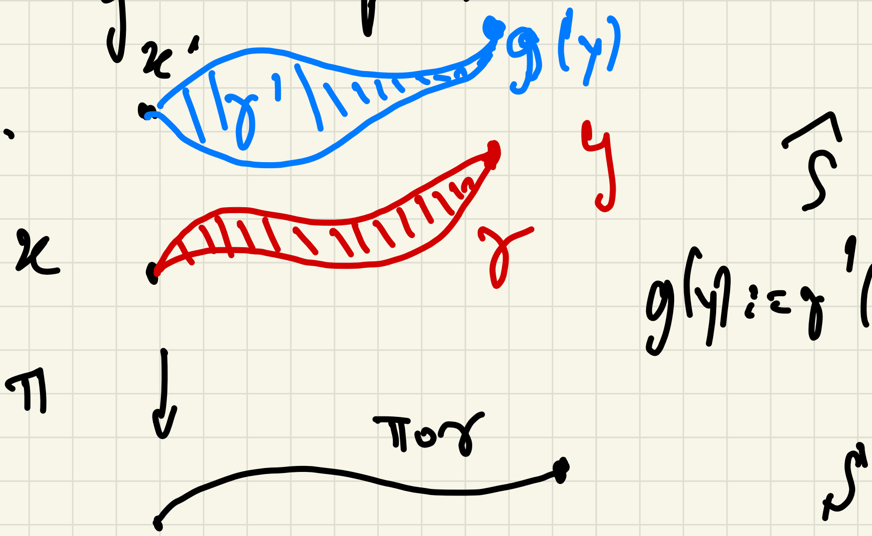


on cherche $g \in \mathrm{aut}(\pi)$ tq $g(x) = x'$

on pose $g|_{\alpha^{-1}(U \times \{p\})}$

$g(t,p) = (t,q)$

On étend g à $\hat{S}$ par relèvement des chemins.



$g(y) := \gamma'(1)$

$\exists!\ \gamma' : [0,1] \to \hat{S}$ tq

$$\left|\begin{array}{l} \gamma'(0) = x' \qquad \gamma' \ C^0 \\ \pi \circ \gamma' = \pi \circ \gamma . \end{array}\right.$$

(thm de relèvements)

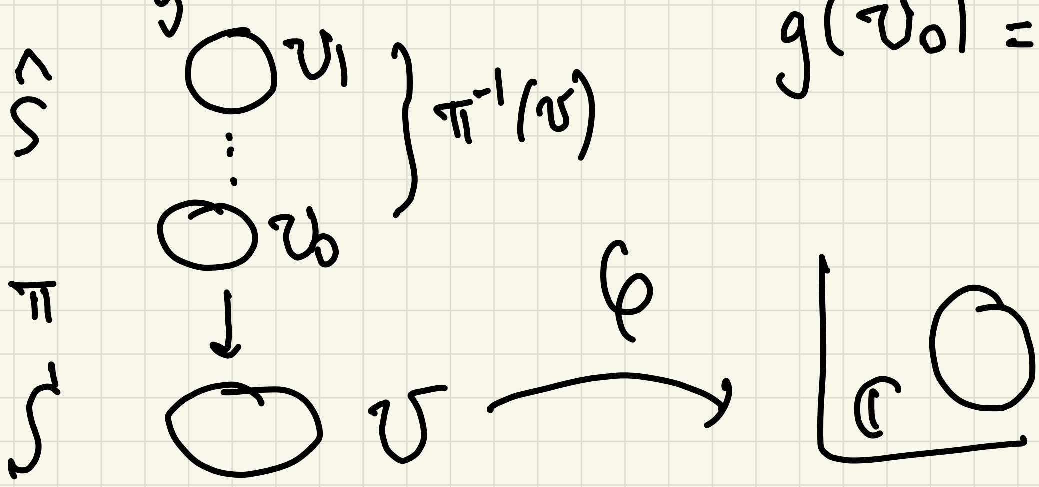
On étend $g : \hat{S} \to \hat{S}$ homéomorphisme

$\pi \circ g = \pi \qquad g(x) = x'$.

- $\mathrm{aut}(\pi)$ agit holomorphiquement sur $\hat{S}$.

$\ni g$

$g(V_0) = V_1$

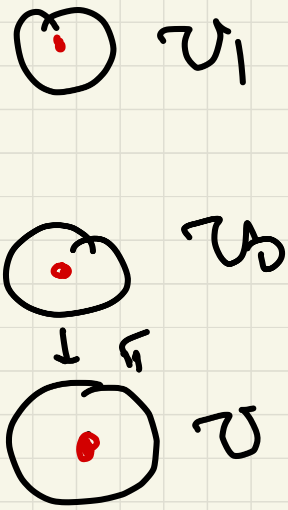


(U_0, φ_0) $\quad \varphi_0 = \varphi \circ \pi$

(U_1, φ_1) $\quad \varphi_1 = \varphi \circ \pi$

on regarde $g : U_0 \to U_1$ à travers ces deux cartes

$$\varphi_1 \circ g \circ \varphi_0^{-1} = \varphi \circ \pi \circ g \circ \pi^{-1}|_{U_0} \circ \varphi^{-1}$$



$\pi \circ g = \pi$

$$= \varphi \circ \pi \circ \pi^{-1}|_{U_0} \circ \varphi^{-1}$$

$$= \varphi \circ \varphi^{-1} = id \ !$$

lol.

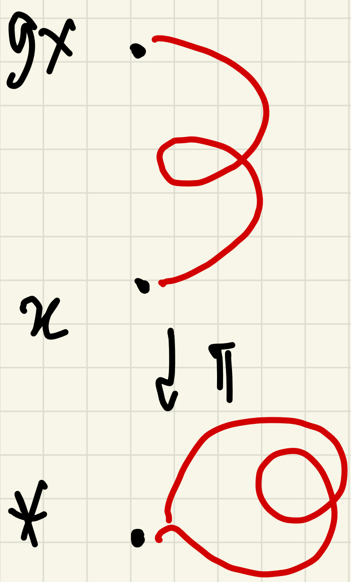
///

Remarque finale.

- $\operatorname{aut}(\pi) \underset{\text{groupe}}{\simeq} \pi_1(\tilde{S}, s_0) \quad s_0 \in \tilde{S}$.

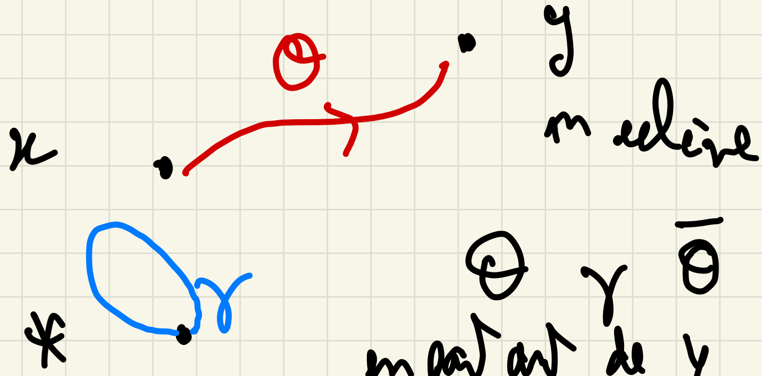
+ $x \in \pi^{-1}(*) \quad g \in \operatorname{aut}(\pi) \quad \gamma(0) = x$
$\gamma(1) = g.x$

$$g \mapsto [\pi \circ \gamma] \in \pi_1(S, s_0)$$



+ $\gamma : [0,1] \to S$
$\gamma(0) = \gamma(1) = *$

$y \in \hat{S}$



$\theta \, \gamma \, \bar{\theta}$ en partant de y

on pose $[\gamma] \cdot y =$ relevé de $\theta \gamma \bar{\theta}$ en S.

///

Road map to uniformization.

S simplement connexe non compacte

$S \simeq \mathbb{C}$ ou $\mathbb{D}$

on cherche une fonction hol. $\varphi : S \to \mathbb{C}$ (rigide) injective.

- on construit des fonctions harmoniques

ex $h = \mathrm{Re}(f)$ f hol.

- pour cela on manipule les fonctions sous-harmoniques (souples)

ex $\max(\log|f_1|, \log|f_2|)$ f_1, f_2 hol.

procédé qui permet de construire des fonctions harmoniques à partir de fonctions sous-harmoniques = principe de balayage de Perron pour résoudre le problème de Dirichlet.

plan

- harmonique
- sous harmonique
- problème de Dirichlet
- fonctions de Green
- thm clef construction de fonctions harmoniques
- démo du thm uniformisation

Exercice

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[r, "f"', "e^{2i\pi z}"] \arrow[d, "\pi_1"'] & \mathbb{C}^\times \arrow[d, "\pi_2"] \\
\mathbb{C}/_{\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\omega} \arrow[r, dashed, "?\ \phi"] & \mathbb{C}^\times/\langle q\rangle
\end{tikzcd}$$

$n, m \in \mathbb{Z}$

$e^{2i\pi\omega} = q$

ω quelconque

$$\pi_2 f\left(z + n + m\,\omega\right)$$

$$= \pi_2 \exp\left(2i\pi\,(z + m\omega)\right)$$

$$= \pi_2\,\left(\exp 2i\pi z \times q\right) = \pi_2 f(z)$$

$\pi_2 \circ f$ est $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\omega$-equivariante

$\Rightarrow \exists\ \phi$ hol. injective surjective !

///

exercice 6.

$f \in \mathbb{C}[x]$ degré $d \geqslant 1$

pas de racine multiple

- $X = \{ z^2 = P(w) \} \subseteq \mathbb{C}^2$

surface de R. pour laquelle

$\pi_1(z,w) = z \qquad \pi_2(z,w) = w$

$\pi_1, \pi_2 : X \to \mathbb{C}$ sont hol.

$Q(z,w) = z^2 - P(w)$

par le cours, il faut vérifier que

$\{ Q = \frac{\partial Q}{\partial w} = \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \} = \phi$.

$$Q = z^\ell - P(w)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \ell z \qquad \frac{\partial Q}{\partial w} = -P'(w)$$

$$\left\{ Q = \frac{\partial Q}{\partial w} = \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \right\} \ni (z, w)$$

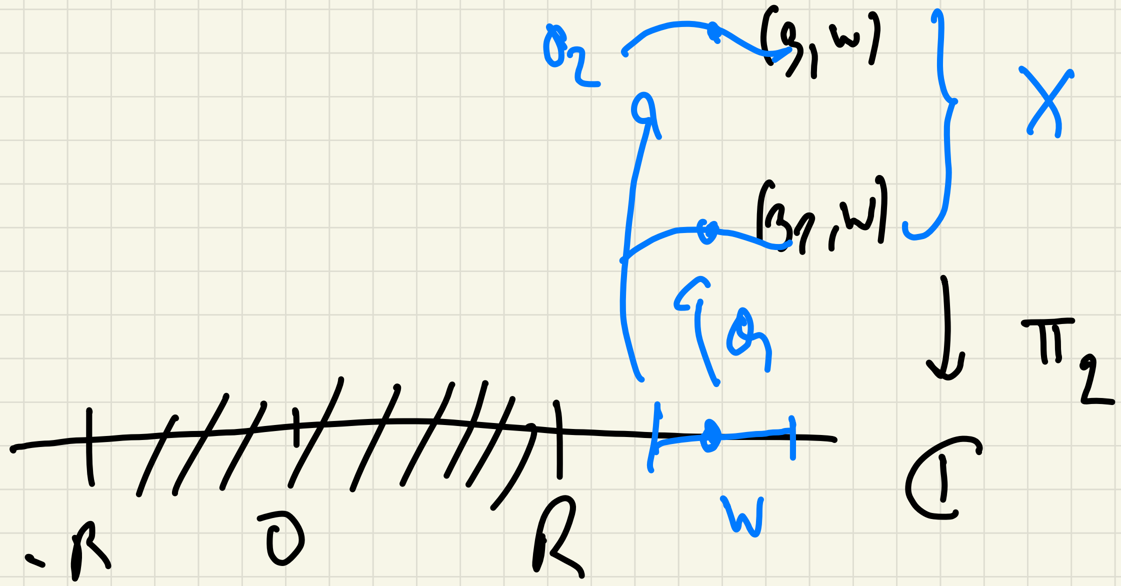
$$\begin{cases} P(w) = z^\ell \\ \ell z = 0 \\ P'(w) = 0 \end{cases} \Rightarrow P(w) = 0 = P'(w)$$

impossible.

$R \gg 1$

$$X \cap \{|w| > R\} \xrightarrow{\pi_2} \{|w| > R\}$$

revêtement de degré ℓ connexe ssi d est pair.



$\{f'(w) = 0\} \cup \{f(w) = 0\} \subseteq \mathbb{D}(0, R)$

$\begin{cases} z_1^\ell = f(w) \\ z_2^\ell = f(w) \end{cases}$ $\quad |w| > R \quad f(w) \neq 0$

$z_1 = -z_2$

au voisinage de (z_1, w), TFI analytique nous dit que $X \cap \mathcal{V}(z_1, w) =$ graphe au dessus de $\mathbb{C}$ car $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial w}(z_1, w) \neq 0\right)$

TF I analytique si

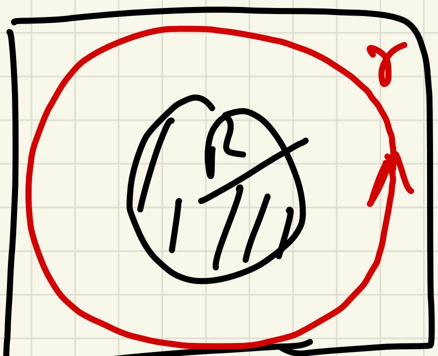
$\pi_2^{-1}(D(w,r)) = \{(\theta_1(w), w)\} \cup \{(\theta_2(w), w)\}$

avec θ_1 θ_2 analytiques..

$\Rightarrow$ $\pi_2 : X \cap \{|w| > R\} \to \{|w| > R\}$

revêtement d'ordre 2.

Connexité :



$\gamma(t) = R' e^{2i\pi t}$

$R' > R$ $\qquad t \in [0,1]$

on relève à X

$\hat{\gamma}$ $\mathcal{C}^0$ $: [0,1] \to X$

$\pi_2(\hat{\gamma}) = \gamma$

$$\hat{\gamma}(t) = (z(t), w(t))$$

$$\pi_2 \circ \hat{\gamma} = \gamma \qquad w(t) = R' e^{2i\pi t}$$

$$z(t)^{\ell} = P(w(t))$$

$$z(t)^{\ell} = a \left(R' e^{2i\pi t}\right)^{d} \left(1 + o\left(\frac{1}{R'}\right)\right)$$

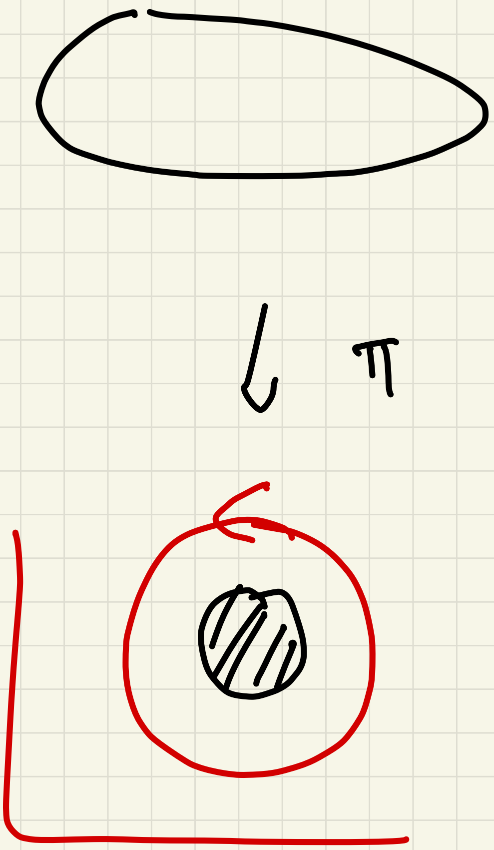
$$P = a w^{d} (1 + o(1)) \qquad \begin{array}{c} \cap \\ D(1,1) \end{array}$$

$z(t)$ est C^0

$$\Rightarrow z(t) = a^{1/\ell} (R')^{d/\ell} e^{\frac{2i\pi t d}{\ell}} \sqrt{1 + o\left(\frac{1}{R'}\right)} \nearrow C^0$$

$z(1) = z(0) \iff$ relèvement non connexe.

$\iff d$ est pair.

π