Cours 3

7-11-2022

→ définition de Surface de Riemann

→ **exemples** : $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

: $\mathbb{C}/\Lambda$ Λ réseau

: $\{ f(x,y) = 0 \} \subseteq \mathbb{C}^2$

Théorème d'uniformisation.

def S espace topologique est simplement connexe si il est connexe et tout lacet dans S est homotopiquement trivial

$\forall \gamma : S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S$ C^0

$\exists H : S^1 \times [0,1] \to S$ C^0

$$H(t, 0) = \gamma(t)$$

$$H(t, 1) \equiv p \in \mathcal{S}.$$

exemple (surface de R. simplement connexe)

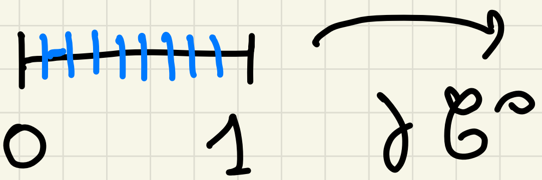
$\mathcal{S} = \mathbb{C}$ $\qquad H(t, s) = (1-s)\,\gamma(t)$

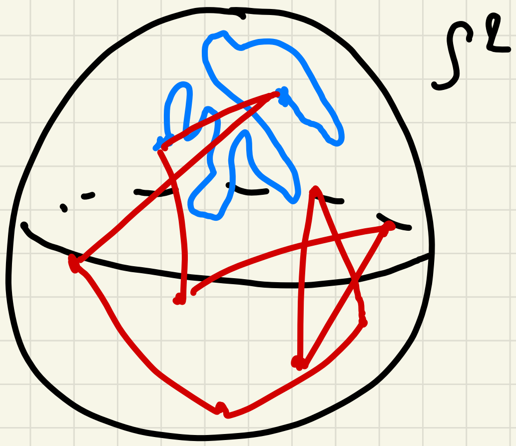
$\mathcal{S} = \mathbb{D} = \{ |z| < 1 \}$

$\mathcal{S} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \overset{\text{homéo.}}{\simeq} S^2$

- si $\gamma(S^1)$ évite un point, on peut homotoper γ à un lacet constant

- on montre que tout lacet continue est homotope à un lacet affine par morceaux





Thm (Koebe–Poincaré)

$\boxed{\text{Toute surface de R. simplement connexe est biholomorphe à } \mathbb{D} \text{ ou à } \mathbb{C} \text{ ou à } \hat{\mathbb{C}}}$

$S \xrightarrow{\varphi} \mathbb{D}$ Problème : comment

(?) construire des fonctions hol.

ou méromorphes sur une surface de R. quelconque.

Remarque :

- $\hat{\mathbb{C}}$ n'est pas bihol. à $\mathbb{D}$ ni à $\mathbb{C}$

  (pas homéomorphe ! $\hat{\mathbb{C}}$ est compacte)

- $\mathbb{C}$ n'est pas bihol. à $\mathbb{D}$

  car $\varphi : \mathbb{C} \xrightarrow[\text{hol.}]{} \mathbb{D}$ bornée, par

  Liouville, est constante.

- Le thm d'uniformisation implique

  qu'il n'existe qu'une seule structure

  de surface de R. sur S^2

I.4 Action holomorphe sur les surfaces de Riemann.

But : obtenir plus d'exemples (tous les exemples !)

déf. G un groupe X espace topologique. Une action de G sur X est un morphisme $G \to \text{Homéo}(X)$

$g \in G \qquad x \mapsto g \cdot x$ homéo

$e =$ neutre $\quad e \cdot x = x \quad \forall x$

$\forall g, g' \ \forall x \quad g \cdot (g' \cdot x) = (gg') \cdot x$

. Si S est une surface de R.,

G agit holomorphiquement sur S.

si le morphisme $G \to \text{Homéo}(S)$

est à valeurs dans le groupe des

biholomorphismes ($\text{Aut}(S)$) de S.

$\forall g \quad x \mapsto g.x$ est hol.

$G \curvearrowright X \quad x \sim x'$ ssi $\exists g \in G \; g.x = x'$

$X/G := X/\sim$ muni de la topologie

quotient $\quad \pi : X \to X/G$

$U \subseteq X/G$ est ouvert ssi $\pi^{-1}(U)$ est ouvert dans X.

⚠ X/G n'est pas Hausdorff / séparé

<u>exemple</u> $\mathbb{Z}^2 \circlearrowright \mathbb{C}$ $\quad \omega \in \mathbb{C}$

$\underset{\mathbb{Z}^2}{(n,m)} \cdot z = z + n + m\omega$

- $\operatorname{Im}(\omega) \neq 0$ alors $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega$ est un réseau, et on a vu que $\mathbb{C}/\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\omega$ était une surface de R.

- $\operatorname{Im}(\omega) = 0$ $\quad \omega \notin \mathbb{Q}$

le quotient $\mathbb{C}/\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\omega$ n'est pas séparé.

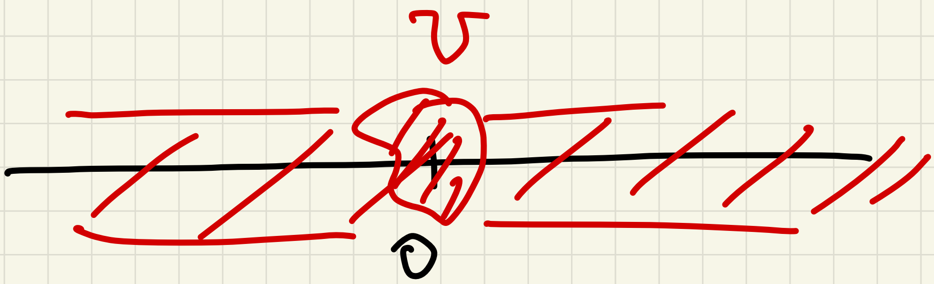
$\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C} / \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega$

U ouvert contenant $\pi(0)$

$\pi^{-1}(U)$ ouvert contient 0, invariant par translations $z \mapsto z + n + m\omega$

$\forall n, m \in \mathbb{Z}$

$\{n + m\omega\}$ dense dans $\mathbb{R}$.



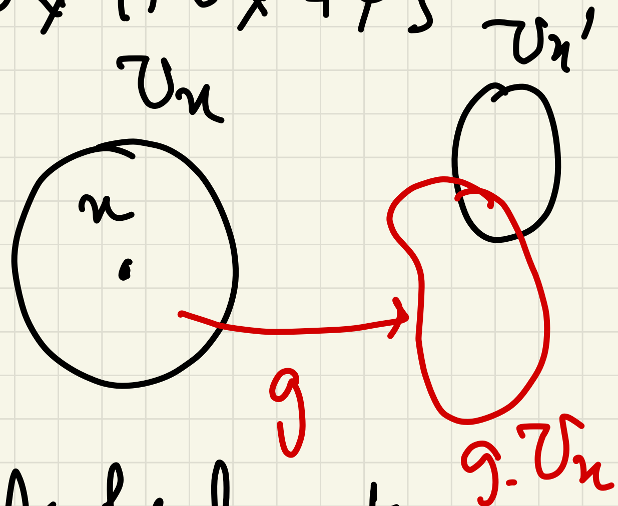
donc $\pi^{-1}(U) \supseteq$ ouvert $\supseteq \mathbb{R}$.

$x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega$ $\quad \pi(x) \neq \pi(0)$

$\pi(x) \in U$!

def. $G \curvearrowright X$ est une action proprement discontinue si

(P) $\forall x, x' \in X$ $\exists U_x, U_{x'}$ ouverts tq $x \in U_x$, $x' \in U_{x'}$ et $\{g \in G,\ g\cdot U_x \cap U_{x'} \neq \emptyset\}$ est fini



Exercice : si X est localement compact, (P) $\Leftrightarrow$ $\forall K$ compact

$$\{g,\ g\cdot K \cap K \neq \emptyset\} \text{ est fini.}$$

Théorème $G \curvearrowright S'$ action holomorphe proprement discontinue sur une surface de R.

Alors il existe une unique structure de surface de R. sur S/G telle que $\pi : S \to S/G$ est holomorphe.

① $V \subseteq S/G$ ouvert $f : V \to S'$ est hol. ssi $f \circ \pi : \pi^{-1}(V) \to S'$ est hol.
$\pi^{-1}(V) \subseteq S$

② $h : S \to S'$ hol. telle que $\forall x \in S \ \forall g \ h(g.x) = h(x)$. Alors $\exists \bar{h} : S/G \to S'$ est hol. $(\bar{h} \circ \pi = h)$

démonstration : on fixe des cartes hol.
centrées $\{\mathcal{U}_p\}_{p \in S}$ $\phi_p : \mathcal{U}_p \to \mathbb{C}$

$\phi_p(p) = 0$

1) S/G est séparé

$p, p' \in S$

$q = \pi(p) \neq q' = \pi(p')$ $q, q' \in S/G$

$n \gg 0$ $\overline{\mathbb{D}(0, \frac{1}{n})} \subseteq \phi_p(\mathcal{U}_p)$

$\mathcal{U}_{p,n} = \phi_p^{-1}(\mathbb{D}(0, \frac{1}{n}))$ base de voisinage de p (dans S).

$V_{p,n} = \bigcup_{g \in G} g \cdot \mathcal{U}_{p,n}$ ouvert G-invariant

donc $\pi(V_{p,n})$ est ouvert

$[\pi^{-1}\pi(V_{p,n}) = V_{p,n}]$.

On montre $\pi(V_{p,n}) \cap \pi(V_{p',n}) = \emptyset$

$n \gg 0$

Par l'absurde

$\forall n \quad \pi(V_{p,n}) \cap \pi(V_{p',n}) \neq \emptyset$

$\exists p_n \in V_{p,n} \cap V_{p',n}$

$\Leftrightarrow \exists p_n \in V_{p,n} \ \exists g_n \in G$

$g_n \cdot p_n \in V_{p',n}$

$g_n \in \{ g \in G,\ g(V_{p,n}) \cap V_{p',n} \neq \emptyset \}$

ensemble fini.

pour $n \gg 0 \quad g_n = g \in G$

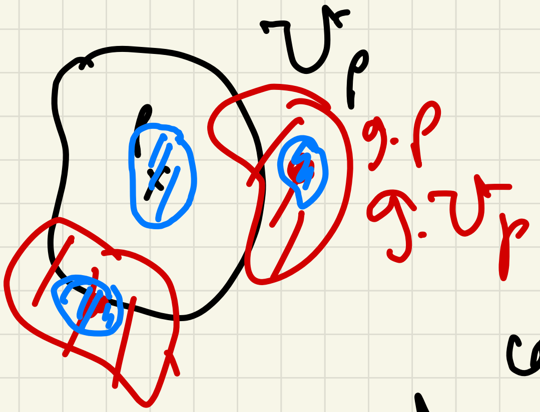
$n \to \infty \quad p_n \to p \quad g_n \cdot p_n \to p'$

$\Rightarrow \quad g \cdot p = p'$ ///

2. Construction de cartes hol. (action libre)

on suppose que $g.x = x \Rightarrow g = e$
(G agit sans point fixe).

- on remplace U_p par U'_p telle que
$U'_p \cap g.U'_p = \emptyset$ pour tout $g \neq e$



Pour simplifier, on note encore les cartes $U_p \xrightarrow{\phi_p} \mathbb{C}$
$\phi_p(p) = 0$ pour $g \neq e$
$g.U_p \cap U_p = \emptyset$.

On pose $V_p = \pi(U_p)$

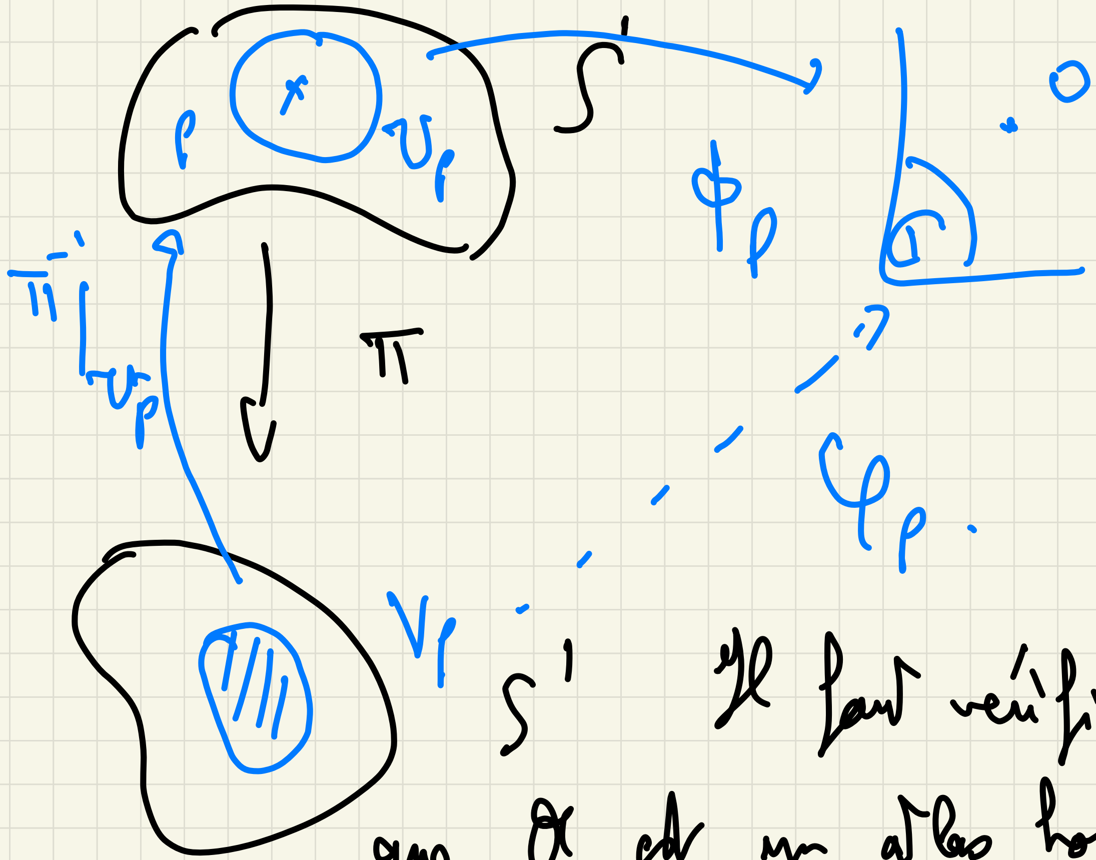
Lemme V_p est ouvert dans S/G, et $\pi : U_p \to V_p$ est un homéomorphisme

<u>démo</u>. $\pi^{-1}(V_p) = \pi^{-1}\pi(U_p) = \bigcup_{g \in G} g \cdot U_p$

$$= \bigsqcup_{g \in G} g \cdot U_p \quad \text{ouvert}$$

injectif, surjectif !, homéo car U_p est localement compact ///

$$\mathcal{A} = \Big\{ \big(\underset{\underset{S/G}{\cap}}{V_p}, \underbrace{\phi_p \circ \pi^{-1}|_{U_p}}_{\varphi_p} \big) \Big\}_{p \in S'}$$



Il faut vérifier que $\mathfrak{A}$ est un atlas hol.

$p, p' \in S'$ tq $V_p \cap V_{p'} \neq \emptyset$ dans S'/G

On veut montrer que $\varphi_{p'} \circ \varphi_p^{-1}$ est hol.

$$\varphi_{p'} \circ \varphi_p^{-1} : \underbrace{\varphi_p(V_p \cap V_{p'})}_{= \, \phi_p\left(U_p \cap \bigsqcup_{g \in G} g \cdot U_{p'}\right)} \to \mathbb{C}$$

$$\varphi_{p'} \circ \varphi_p^{-1} : \phi_p\Big(U_p \cap \underbrace{\bigsqcup_{g \in G} g.U_{p'}}_{\text{2 à 2 disjoints}}\Big) \to \mathbb{C}$$

sur $\phi_p(U_p \cap g.U_{p'})$?

$$\pi^{-1}\big|_{U_{p'}} \circ \pi(z) = g^{-1}.z$$

$$\varphi_{p'} \circ \varphi_p^{-1} = \phi_{p'} \circ \pi^{-1}\big|_{U_{p'}} \circ \pi \circ \phi_p^{-1}(z)$$

$$= \underbrace{\phi_{p'}\left(g \cdot \phi_p^{-1}(z)\right)}_{\text{hol. par composition.}}$$

On veut construire des cartes loc.

en $p_0 \notin F$ $\rightsquigarrow$ comme en 1 !

en $p_0 \in F$ (!)

$$G_{p_0} = \{ g \in G, \ g \cdot p_0 = p_0 \}$$

est un groupe fini (action proprement discontinue).

On réduit U_{p_0} de telle sorte que

- $g \, U_{p_0} \cap U_{p_0} \neq \emptyset \Rightarrow g \in G_{p_0}$
- $G_{p_0} \cdot (U_{p_0}) = U_{p_0}$.

$$\Big(\bigcap_{g \in G_{p_0}} g \cdot U_{p_0} \Big).$$

$$\underset{\text{fini}}{G_{p_0}} \underset{\text{hol}}{\curvearrowright} \Omega = \Phi_{p_0}(V_{p_0})$$

ouvert de $\mathbb{C}$ qui contient 0.

Lemme de Cartan : il existe un biholomorphisme local $h : (\Omega, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ et un morphisme de groupe $\lambda : G_{p_0} \to \mathbb{U} = \{ |z| = 1 \}$

$$h(g \cdot h^{-1}(z)) = \lambda(g) \cdot z$$

remarque : en particulier G_{p_0} est cyclique

$$G_{p_0} \underset{\lambda}{\simeq} \mathbb{U}_k = \{ \zeta ,\ \zeta^k = 1 \}.$$

carte hol. en p_0.

$$\phi_{p_0} : U_{p_0} \to \mathbb{C}$$

$$\hat{\phi}_{p_0} : U_{p_0} \to \mathbb{C}$$

$$\hat{\phi}_{p_0} = h_0 \circ \phi_{p_0} .$$

$$V_{p_0} = \pi(U_{p_0})$$

$$\begin{tikzcd}
G_{p_0} \curvearrowright U_{p_0} \arrow[r, "\hat{\phi}_{p_0}"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circ"] & \mathbb{C} \curvearrowleft \times J \ (J^4 = 1) \arrow[d, "z^4"] \\
V_{p_0} \arrow[r, "\psi_{p_0}"'] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

$$\psi_{p_0}(\pi(p)) = \hat{\phi}_{p_0}(p)^4$$

φ_0 est bien défini et injectif.

$$\pi(\rho) = \pi(\rho') \iff \rho = g \cdot \rho'$$

$$g \in G_{\rho_0}$$

$$\iff \hat{\phi}_{\rho_0}(\rho) = \hat{\phi}_{\rho_0}(g \cdot \rho') = \jmath^{\eta} \cdot \hat{\phi}_{\rho_0}(\rho')$$

$$\iff \hat{\phi}_{\rho_0}(\rho)^{4} = \hat{\phi}_{\rho_0}(\rho')^{4}$$

Exercice 9

$$\varphi^2(z) = z - a$$

φ est ouverte $\Rightarrow$ $\varphi(\Omega) \supseteq$ ouvert

$\Rightarrow \varphi(\Omega) \supseteq D(a, r)$

$\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ injective.

$$\varphi(\Omega) \cap D(-a, r) = \emptyset$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \Omega}}{\varphi(z)} \in \underset{\substack{\| \\ w}}{D(-a, r)}$$

$$\varphi(z)^2 = w^2 = \underset{\substack{\uparrow \\ \varphi(\Omega)}}{(-w)}^2$$

$///$

$\psi : \Omega \to \mathbb{D}(0,1)$ hol.
injective

$\varphi : \Omega \to \mathbb{C} \setminus D(-a, r)$

$$\psi(z) = \frac{r}{a + \varphi(z)} \qquad |.| > r$$

2. $\alpha \in \mathbb{D} \setminus \psi(\Omega)$

$$\boxed{\varphi_\alpha(z) = \frac{z + \alpha}{1 + \bar{\alpha} z}}$$

$\psi : \Omega \to \mathbb{D}$ hol. injective.

$\underline{\varphi_\alpha \circ \psi(\Omega) \not\ni 0}$

si $\varphi_\alpha \circ \psi(\Omega) \ni 0$ $\qquad \underset{\alpha}{\underset{\shortparallel}{\varphi_\alpha(0)}} \in \psi(\Omega)$.

absurde.

comme en 1

$\exists\, g$ hol. injective : $\Omega \to \mathbb{D}$

tq $\quad g^2(z) = \underset{\mathbb{D}}{\underset{\cap}{\varphi_\alpha \circ \psi}}(z).$

On choisit $\beta \in \mathbb{D}$

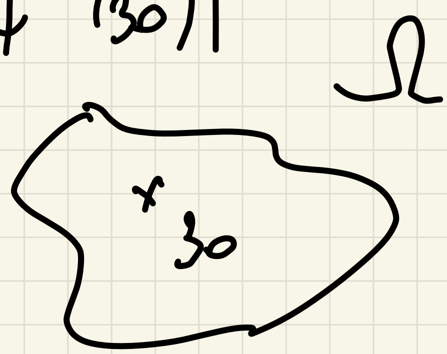
$$\varphi_\beta \circ g = \psi_1 : \Omega \to \mathbb{D}$$

hol. injectif.

On peut choisir β tq.

$$|\psi_1'(z_0)| > |\psi'(z_0)|$$

$z_0 \in \Omega$ fixé



$\varphi : \Omega \to \mathbb{D}$ hol. inj.

$g^2 = \varphi_\alpha \circ \varphi \qquad \alpha \in \mathbb{D} \setminus \varphi(\Omega)$

$\varphi_1 = \varphi_\beta \circ g \qquad \boxed{-\ \beta = g(z_0)}\ .$

$\varphi_1(z_0) = \varphi_\beta(g(z_0)) = 0$

$\varphi = \varphi_\alpha^{-1} \circ \mathrm{sq} \circ g$

$\mathrm{sq}(z) = z^2 \qquad = \underbrace{\varphi_\alpha^{-1} \circ \mathrm{sq} \circ \varphi_\beta^{-1}}_{F} \circ \varphi_1$

$F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ hol. non injective

$$\boxed{\varphi'(z_0) = F'(0) \times \varphi_1'(z_0)}$$

Lemme de Schwartz : $F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ hol.

$F(0) = 0 \Rightarrow |F'(0)| < 1$ sauf si F est une rotation.

Lemme de Schwartz$^+$ $F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ hol. non injective alors $|F'(0)| < 1$.

$$|\varphi'(z_0)| = |F'(0)| \times |\varphi_1'(z_0)|$$
$$< |\varphi_1'(z_0)|$$

$$\varphi_\alpha \circ F(0) = 0 \qquad \alpha = F(0)$$

$$|(\varphi_\alpha \circ F)'(0)| < 1$$
$$\overset{\shortparallel}{|F'(0)|} \times \frac{1}{1 - |\alpha|^2}$$

$/!/$

Ω simplement connexe $\underset{\ni z_0}{\Omega} \neq \mathbb{C}$

$\Sigma = \{ f : \Omega \to \mathbb{D}$ hol. injective$\}$

$\Sigma \neq \emptyset$

$f \in \Sigma$ et $f(\Omega) \subsetneq \mathbb{D}$

$\Rightarrow \exists f_1 \in \Sigma \quad |f_1'(z_0)| > |f'(z_0)|$

But : on cherche $f \in \Sigma$ tq $f(\Omega) = \mathbb{D}$

On note $\eta = \sup \{ |f'(z_0)|, f \in \Sigma \}$

$f_n \in \Sigma \quad |f_n'(z_0)| \to \eta$.

$$\boxed{\text{Alors } f_{n_j} \to f \in \Sigma \text{ et } f(\Omega) = \mathbb{D}}$$

Théorème de Montel $\Omega \subseteq \mathbb{C}$

$f_n : \Omega \to D(0,R)$ hol.

Alors $\exists n_j$ f_{n_j} converge localement uniformément vers une fonction hol.

[thm d'Ascoli-Arzelà]

estimées de Cauchy $\Rightarrow$ $\{f_n\}$ équicontinue

$f_n = \varphi_n$ $\varphi_{n_j} \to \varphi : \Omega \to \mathbb{D}$ hol.

$\varphi'_{n_j}(z_0) \to \varphi'(z_0)$ (en particulier $\eta < \infty$)

$|\varphi'(z_0)| = \eta > 0$

φ est injective ? car φ_{n_j} injectif

3. Action avec point fixe

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr] & \mathrm{Aut}(\mathcal{S}) \\ & G/\ker(\rho) \arrow[u, "\bar\rho"'] \end{tikzcd}$$

$\bar\rho$ injectif.

Quitte à remplacer G par $G/\ker(\rho)$, on peut supposer que l'action est fidèle.

__Lemme__ $F = \{ p \in \mathcal{S},\ \exists g \neq e\ \ g \cdot p = p \}$ est discret.

__dém__ : $p_n \to p$ $\quad g_n \cdot p_n = p_n$

$p_n \in F$ $\quad g_n = g$ pour $n \gg 0$

$\Rightarrow g \cdot p = p$. Zéro isolé $\Rightarrow g = e$ ///

Thm (Hurwitz)

$$\boxed{\begin{array}{l} f_n : \Omega \to \mathbb{C} \text{ injectif hol.} \\ f_n \to f \text{ localement uniformément.} \\ \text{Alors } f \text{ est injective ou constante.} \end{array}}$$

$\Rightarrow \varphi : \Omega \to \mathbb{D}$ hol. injective

$$|\varphi'(z_0)| = \eta$$

par E. $\Rightarrow \varphi(\Omega) = \mathbb{D}$!

Thm d'uniformisation pour les ouverts de $\mathbb{C}$.