Cours 16

21-12-2022

Rappel S surface de Riemann compacte connexe $g \geq 0$.

$$D \in \mathrm{Div}(S) \qquad D = \sum_{p \in S} n_p \, (p)$$

$n_p \in \mathbb{Z}$ $\{p,\ n_p \neq 0\}$ fini

$$H^0(D) = \{ f \in \mathcal{M}(S),\ \mathrm{div}(f) + D \geq 0 \}$$

ω 1-forme méromorphe sur S

$$K_\omega = \mathrm{div}(\omega) = \sum_{p \in S}{}' \, v_p(\omega) \, (p)$$

localement en p

$$\omega = f(z)\, dz \qquad k = v_p(\omega)$$

$$= z^k (a + o(1))\, dz$$

$$a \neq 0$$

Thm (Riemann-Roch)

$$\boxed{h^0(D) - h^0(K_\omega - D) = \deg(D) + 1 - g .}$$

$D = \sum n_p (p) \qquad \deg(D) = \sum n_p \in \mathbb{Z}$.

$D = K_\omega \qquad \deg(K_\omega) = 2g-2$.

- $H^0(D)$ est $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $\quad h^0(D) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(D)$
- $h^0(D) \geqslant \dots$ théorème d'existence de fonctions méromorphes

préliminaire :

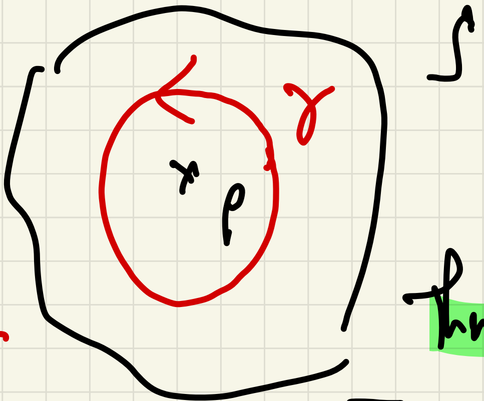
ω 1-forme méromorphe $\rightsquigarrow K_\omega$

$p \in S$ $\quad res_p(\omega) \in \mathbb{C}$

carte locale centrée en p

$\omega = f(z)\,dz$ $\qquad res_p(\omega) = res_p(f)$

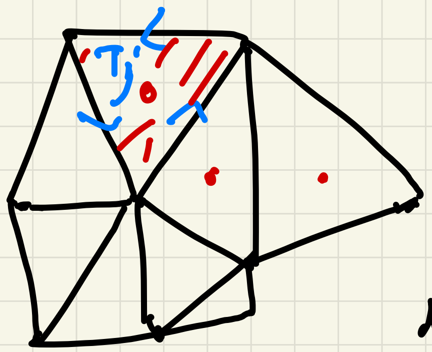
$f(z) = \sum a_k z^k$ $\qquad = a_{-1}$



$$res_p(\omega) = \int_\gamma \frac{\omega}{2i\pi}$$

Thm ω 1-forme méromorphe, $\displaystyle\sum_{p \in S} res_p(\omega) = 0$.

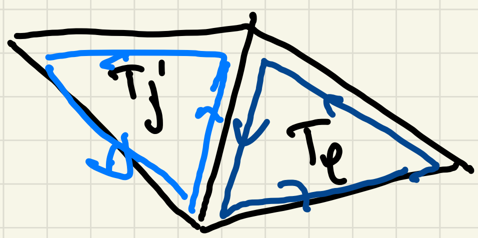
démonstration : on fixe une triangulation de S $\mathcal{T} = \{T_i\}$ telle



que aucun pôle de ω n'appartienne à une arête de $\mathcal{T}$.

$$\int_{T_j^\circ} \frac{\omega}{2i\pi} \underset{\text{Cauchy}}{=} \sum_{p \in T_j^\circ} \mathrm{res}_p(\omega)$$

$$\sum_j \int_{T_j^\circ} \frac{\omega}{2i\pi} = \underbrace{\sum_{p \in S} \mathrm{res}_p(\omega)}_{\displaystyle \begin{array}{c} \| \\ 0 \end{array}}$$



///

démonstration du thm de R-R :

étape 1 : $\boxed{h^0(D) \geq \deg(D) + 1 - g}$

. réduction : on se ramène au cas où $D \geq 0$.

. $D = D_+ - D_-$ $\qquad \{p_i\} \cap \{q_j\} = \emptyset$

$= \sum n_i (p_i) - \sum m_j (q_j) \quad n_i, m_j \in \mathbb{N}^*$

$f \in H^0(D_+) \overset{\Phi}{\longmapsto} \bigcup_j \{$ développement de Taylor en q_j à l'ordre $m_j - 1 \}$.

$f \in H^0(D_+)$, $\mathbb{C}^{m_j}$

$\times q_j$, z $\quad f$ hol. en q_j

$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{m_j - 1} z^{m_j - 1} + O(z^{m_j})$

Φ est $\mathbb{C}$-linéaire de $H^0(D_+)$ dans $\mathbb{C}^{\sum m_j}$

$$\phi : H^0(D_+) \longrightarrow \mathbb{C}^{\sum m_j} \qquad \sum m_j = \deg(D_-)$$

$\ker(\phi) = \{ f \in \mathcal{M}(S)$ $\operatorname{div}(f) + D_+ \geq 0$

et série Taylor de f en q_j

est nulle jusqu'à l'ordre $m_j - 1 \}$

$= \{ f \, , \operatorname{div}(f) + D_+ \geq 0$ $\operatorname{ord}_{q_j}(f) \geq m_j \}$

$= \{ f \, , \operatorname{div}(f) + D_+ \geq D_- \}$.

$= H^0(D)$.

On a vu que $h^0(D_+) \geq \deg(D_+) + 1 - g$.

$$h^0(D_+) \leq h^0(D) + \sum m_j$$

$$h^0(D) \geq 1 - g + \deg(D_+) - \deg(D_-) = \deg(D) + 1 - g$$

///

On suppose $D \geq 0$ $\quad D = \sum n_j (p_j)$

- $f \in H^0(D)$ au voisinage de p_j : z_j

$$f(z_j) = a\, z_j^{k} (1 + o(1))$$
$$a \neq 0 \qquad k \geq -n_j .$$

- $\mathcal{H} = \{$ fonctions harmoniques sur $S - \cup\{p_j\}$, telles que $|h(z_j)| \leq C\, |z_j|^{-n_j}$ $\forall j$ (z carte centrée en p_j) $\}$

$\mathbb{R}$-espace vectoriel

Thm existence de fonctions harmoniques.

$\Rightarrow$ $1 \leq k \leq n_j$ $\exists\, h^{\pm}_{j,k}$ harmonique sur $S - \{p_j\}$

$h^{+}_{j,k} - \mathrm{Re}(z_j^{-k}) = o(1)$, $h^{-}_{j,k} - \mathrm{Im}(z_j^{-k}) = o(1)$

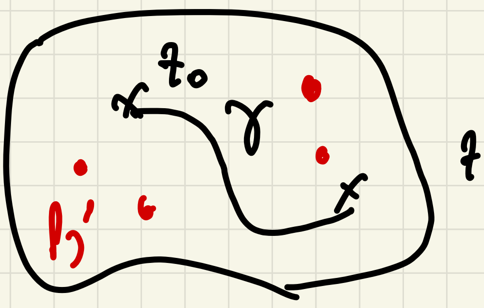
obs : $h^{+/-}_{j,k} \in \mathcal{H}$

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{H} \geqslant \underbrace{1}_{\text{fonctions constantes}} + \underbrace{2 \sum_j n_j}_{\sum h^{\pm}_{j,k}}$$

lemme : $u \in \mathcal{H}$, si pour tout 1-cycle γ dans $S - \cup\{p_j\}$, $\int_\gamma du + i\, {}^* du = 0$ $\quad (*)$

alors $\exists f \in H^0(D)$ $\quad u = \mathrm{Re}(f)$

démonstration : $\omega_u = du + i\, {}^* du$ 1-forme méromorphe sur S.



$$f(z) = h(z_0) + \int_{\gamma_{z_0 \to z}} \omega_u$$

est bien définie par $(*)$

///

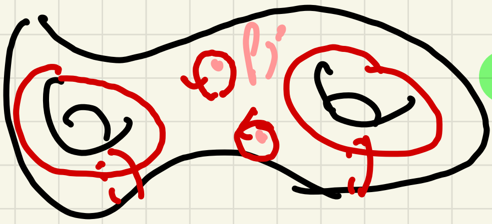
$u \in \mathcal{H} \quad \omega_u = du + i * du$

$\int_\gamma \omega_u$ = ne dépend que de la classe d'homologie de γ.

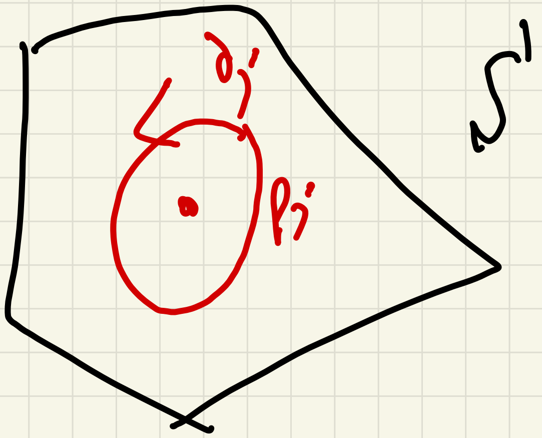
$$H_1(S^1 - \cup\{p_j\}) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\gamma \longmapsto \int_\gamma \omega_u$$

. Fait (topologie algébrique)

$H_1(S^1 - \cup \{p_j\})$ = groupe abélien libre de rang $2g + \#\{p_j\}$



Lemme : γ_j petit lacet autour de p_j $\int_{\gamma_j} \omega_u = 0$



$$\int_{\gamma_j} \omega_u = 0 \qquad u \in \mathcal{H}$$

$\mathcal{H} = \mathbb{R}$-ev $\dim \geq 1 + 2 d_g(D)$

$$\mathcal{H} \xrightarrow{\varphi} H_1(S', \mathbb{Z})^*$$

$$u \longmapsto \left([\gamma] \mapsto \int_\gamma \omega_u \right)$$

$u \in \ker(\varphi) \Rightarrow \exists f \in H^0(D) \quad u = \mathrm{Re}(f)$

$$H^0(D) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{H} \qquad \boxed{\alpha(H^0(D)) \supseteq \ker(\varphi)}$$

$$f \longmapsto \mathrm{Re}(f)$$

$\ker \alpha = \mathbb{R}$.

$\dim_{\mathbb{R}} \ker \alpha \leq 1 \qquad \dim_{\mathbb{R}}\left(\alpha\, H^0(D)\right) \geq \dim \ker(\varphi)$

$\varphi : \mathcal{H} \to H_1(S,\mathbb{R})^* \simeq \mathbb{R}^{2g}$

$\dim \ker \varphi \geq \dim \mathcal{H} - 2g$

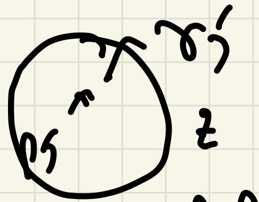
$\geq 1 + 2\, d_g(D) - 2g$

$\dim_{\mathbb{R}}\left(H^0(D)\right) \geq 1 + \left(1 + 2\, d_g(D)\right) - 2g$.

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} H^0(D) \geq 1 - g + d_g(D)$

///

==lemme 1:== $p_j \quad u \in \mathcal{H}$



soit u est harmonique en $p_j \to \omega_u$ hol.

$\int_{\gamma_j} \omega_u = 0$.

alors $\underset{h \geq 1}{u} = \mathrm{Re}(z^{-h}) + \mathrm{harm} \qquad \omega_u = z^{-h-1}\, dz + \mathrm{hol}$.

$\Rightarrow \mathrm{Res}(\omega_u) = 0$

///

étape 2 $\quad \forall p \in S$

$$h^0(D) \leq h^0(D+(p)) \leq h^0(D)+1$$

- $f \in H^0(D)$ $\quad \operatorname{div}(f) + D \geq 0$

$$\operatorname{div}(f) + D + (p) \geq 0$$

$$\Rightarrow f \in H^0(D+(p))$$

$$H^0(D) \subseteq H^0(D+(p))$$

- z carte centrée en p. $\quad D = \sum n_q (q)$, $n_p \in \mathbb{N}$

$$f \in H^0(D+(p)) \xmapsto{\varphi} \mathbb{C}$$

$$f(z) = \sum_{k \geq -(n_p+1)} a_k z^k \longmapsto a_{n_p+1}$$

$$\ker \varphi = H^0(D)$$

///

$H^0(0) = \{ f \in \mathcal{M}(S) \quad \mathrm{div}(f) \geq 0 \}$

$= \mathbb{C} \qquad h^0(0) = 1$

par récurrence sur le degré

$h^0(D) \leq \deg(D) < +\infty$

$\Rightarrow H^0(D)$ est de dimension finie!

étape 3 : $\phi(D) := h^0(D) - h^0(K-D) - \deg(D)$

$\phi : \mathrm{Div}(S) \to \mathbb{Z}$

Lemme : ϕ est décroissante.

$$\boxed{D \leq D' \Rightarrow \phi(D) \geq \phi(D').}$$

$\Rightarrow \phi(D) \geq 1-g.$

D quelconque $\quad D + n(p) \underset{}{\overset{n \gg 0}{=}} D' \geq D$

$D' = D - n(p) \geq 0$

$$\deg(K_\omega - D') = \deg(K_\omega) - \deg(D') < 0$$

$$\Rightarrow h^0(K_\omega - D') = 0$$

$$\underset{\text{lemme}}{\phi(D) \geq \phi(D')} = h^0(D) - \deg(D) \underset{\text{étape 1}}{\geq} 1-g$$

$$\boxed{\phi(D) \geq 1-g}\ ,$$

Etape 4 : on applique étape 3 à D et $K_\omega - D$ pour conclure.

$$\phi(D) + \phi(K_\omega - D) \geqslant (1-g) + (1-g)$$

d'après 3 $\quad = 2 - 2g$

$$\| $$

$$h^0(D) - h^0(K_\omega - D) - \mathrm{dg}(D)$$

$$+ h^0(K_\omega - D) - h^0(D) - \mathrm{dg}(K_\omega - D)$$

$$\|$$

$$2 - 2g$$

$$\Rightarrow \phi(D) + \phi(K_\omega - D) = 2 - 2g.$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi(D) = 1 - g \quad \forall D}.$$

$$\phi(D) = h^0(D) - h^0(K_\omega - D) - d_? (D)$$

$\phi(D) \geq \phi(D')$ $\quad D' \geq D$.

$D' = D + (p)$

par p l'absurde $\phi(D + (p)) > \phi(D)$.

$$\boxed{h^0(D+(p)) - h^0(K_\omega - D - (p)) > 1 + h^0(D) - h^0(K_\omega - D)}$$

$$\underbrace{h^0(D+(p)) - h^0(D)}_{0 \text{ ou } 1 \ \mathcal{J} \text{ que } 1} > 1 + \underbrace{h^0(K_\omega - D - (p)) - h^0(K_\omega - D)}_{0 \text{ ou } -1}$$

$\Rightarrow h^0(D+(p)) - h^0(D) = 1$ $\quad \exists f_1 \in H^0(D+p) \setminus H^0(D)$

&

$h^0(K_\omega - D) - h^0(K_\omega - D - (p)) = 1$

$\exists f_2 \in H^0(K_\omega - D) \setminus H^0(K_\omega - D - p)$.

on définit

$$\omega' = f_1 f_2 \omega$$

$$\mathrm{div}(\omega') = (\mathrm{div}(f_1) + D) + (K_\omega - D + \mathrm{div}(f_2))$$

On calcule $v_q(\mathrm{div}(\omega'))$

$$\boxed{\begin{cases} \text{si } q \neq p & v_q(\mathrm{div}(\omega')) \geq 0 . \\ \text{si } q = p & v_p(\mathrm{div}(\omega')) = -1 \end{cases}}$$

$\Rightarrow$ ω' hol avec un unique pôle simple en p. $\mathrm{res}_p(\omega') \neq 0$

contredit $\sum_{q \in S} \mathrm{res}_q(\omega') = 0$.

///

Exercice :

$f \in \mathbb{C}[w]$ degré d impair.

racine simple

$f(w) = \prod_{i=1}^{d} (w - w_i)$ $\qquad \pi_w(z,w) = w$

$X = \{ z^2 = f(w) \} \subseteq \{(z,w)\} = \mathbb{C}^2$

$X \cap \{ |w| > R \} \xrightarrow{\pi_w} \{ |w| > R \} \simeq \mathbb{D}^\times$

revêtement connexe

$\overline{X} = X \cup \{\infty\} \xrightarrow{\pi_w} \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ hol.

$\pi_w(\infty) = \infty$

RH $\quad g =$ genre de $\overline{X}$ appliqué à π_w

$$\boxed{\chi(\overline{X}) = \deg(\pi_w)\, \chi(\hat{\mathbb{C}}) - \sum (\mathrm{ord}_p(\pi_w) - 1)}$$

$$\chi(\overline{X}) = 2 - 2g \qquad \chi(\mathbb{P}^1) = 2$$

$$\deg(\pi_w) = 2$$

$$\operatorname{ord}_p(\pi_w) \qquad p \in \overline{X}$$

$$= \begin{cases} 1 & \# \pi_w^{-1}(w) = 2 \\ 2 & \# \pi_w^{-1}(w) = 1 \end{cases}$$

$$\pi_w^{-1}(w) = \{p\}$$

$$\{p \in X, \operatorname{ord}_p(\pi_w) = 2\} = \{(t, w), f(w) = 0\}.$$

$$= \{w_1, \dots, w_d\}$$

$$\operatorname{ord}_\infty(\pi_w) = 2$$

$$\Rightarrow 2 - 2g = 2 \times 2 - (d+1)$$

$$\Rightarrow \boxed{g = \frac{d-1}{2}} \qquad \begin{matrix} d = 1 & g = 0 \\ d = 3 & g = 1 \end{matrix}$$

$d=1$ $\qquad \{ z^2 = aw + b \} \underset{\pi_z}{\simeq} \mathbb{C}$

$d=3$ $\qquad z^2 = a(w-w_1)(w-w_2)(w-w_3)$

$$z^2 = w^3 + pw + q$$

$\quad$ $\Rightarrow$ équation de Weierstraß

$\quad$ $\wr|$ $\quad$ courbe elliptique

$\mathbb{C}$ / réseau de $\mathbb{C}$.

$d=5$ $\qquad g=2$ $\qquad$ etc ...

Genre pair $d \leq 0$ (2)

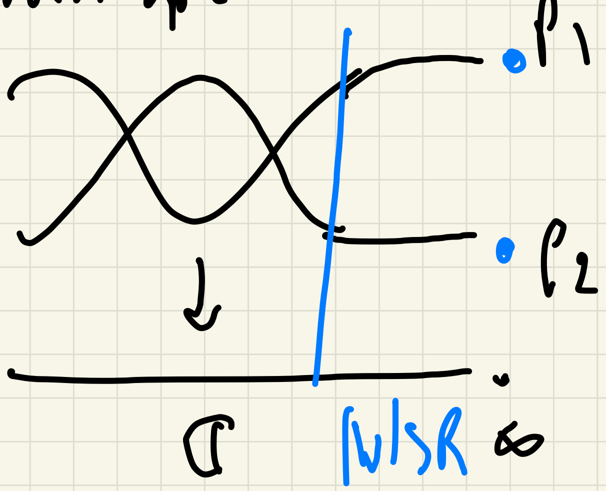
$$X \cap \{|w| > R\} \xrightarrow[2:1]{} \{|w| > R\} \simeq \mathbb{D}^\times$$

non convexe

$\Rightarrow$ $\exists$ homéo φ

$$\begin{tikzcd} X \cap \{|w| > R\} \arrow[rr, "\varphi", "\sim"'] \arrow[dr, "\pi_w"'] & & \mathbb{D}^\times \sqcup \mathbb{D}^\times \arrow[dl, "\alpha"', "\mathrm{id} \sqcup \mathrm{id}"] \\ & \mathbb{D}^\times & \end{tikzcd}$$

localement $\varphi = \alpha^{-1} \circ \pi_w$ donc holomorphe.



$\overline{X} = X \cup \{p_1, p_2\}$

$\varphi : X \cap \{|w| > R\} \to D_1^\times \sqcup D_2^\times$
homéo

base voisinage pour $p \in \bar{X}$

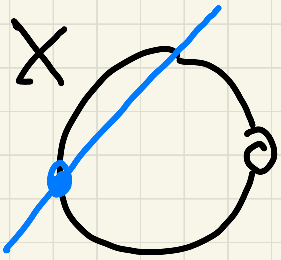
$= \{ \{p\} \cup \varphi^{-1}(U) \ , U$ ouvert de $D_1^\times$

tq $U \cup \{0\}$ ouvert $\}$.

RH $\Rightarrow$ $2 - 2g = 2 \times 2 - d$

$d - 2 = 2g$ $\qquad \boxed{g = \frac{d-2}{2}}$

$d = 2 \Rightarrow g = 0$



$z^2 = aw^2 + bw + c$

$\mathbb{C}^2$

$P \in \mathbb{C}[z,w]$

$\{P=0\} \cap \left\{\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial w} = 0\right\} = \emptyset$

$X = \{P=0\}$ surface de Riemann.

même procédé

$\overline{X} = X \cup \{p_1, \dots, p_k\}$

calculer genre de $\overline{X}$ à l'aide de RH

pour π_z ou π_w

bon exercice : $P(z,w) = z^\ell - Q(w)$

• exercice 7 $\quad f : S' \to S$ hol. surjective

ω 1-forme méromorphe sur S'

$K_\omega \qquad K_{f^*\omega} \qquad f^* K_\omega$

• $K_\omega = \sum v_p(\omega)\,(p)$

carte centrée en p : coordonnée z

$\omega = h(z)\,dz \quad h$ méromorphe

$h(z) = a_k z^k + O(z^{k+1})$.

$a_k \neq 0 \quad k = v_p(\omega)$.

• $p' \in S' \xrightarrow{f} p \in S$

cartes hol. centrées en p' et en p.

coordonnées z' centrée en p'

z ———— p

tq $\quad f(z') = z = (z')^{\ell}$

$$\ell = \mathrm{ord}_{p'}(f) \in \mathbb{N}^*$$

$f : S' \to \hat{\mathbb{C}} \qquad p \in S'$

$$v_p(f) \in \mathbb{Z} = \begin{cases} >0 & f(p) = 0 \\ 0 & f(p) \notin \{0,\infty\} \\ <0 & f(p) = \infty \end{cases}$$

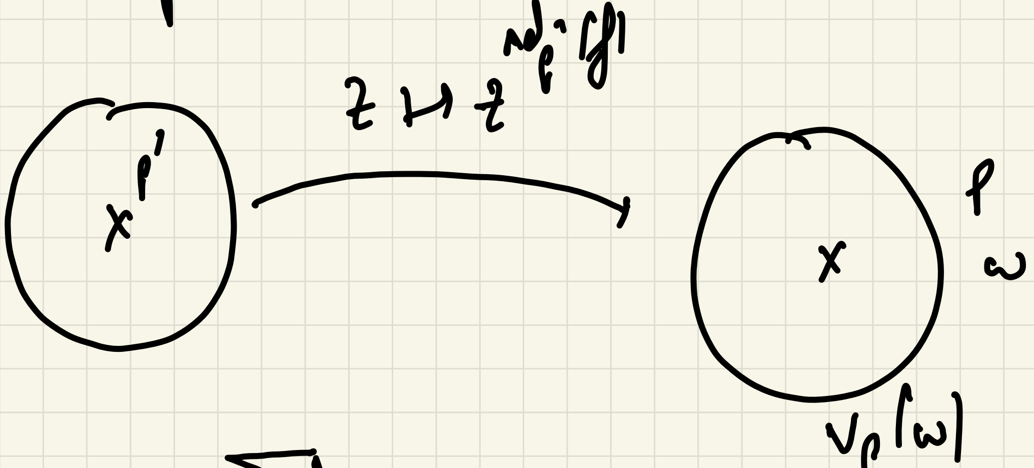
$$\mathrm{ord}_p(f) \in \mathbb{N}^*$$

$$\omega = h(z)\,dz$$

$$f^*\omega = h\big((z')^{\ell}\big)\, d(z'^{\ell}) = h(z'^{\ell})\,\ell\,(z')^{\ell-1}\,dz'$$

$$\boxed{v_{p'}(f^*\omega) = \ell - 1 + \ell\, v_p(\omega)} \rightsquigarrow K_{f^*\omega}$$

$$K_{\mathbb{P}^1_\omega} = \sum_{p' \in S'} \Big(\mathrm{ord}_{p'}(f)\,\big(v_{f(p')}(\omega)+1\big) - 1 \Big)(p')$$



$$f^* D = \sum_{p' \in S'} v_{f(p')}(D)\,\mathrm{ord}_{p'}(f)\,(f(p'))$$

$$\deg(f^*(p)) = \sum_{f(p')=p} \mathrm{ord}_{p'}(f) = \deg(f)$$

$$\Rightarrow \boxed{\deg(f^* D) = \deg(f) \times \deg(D)}$$

$$v_{p'}(f^{*}D) = v_{f(p')}(D) \times \operatorname{ord}_{p'}(f)$$

$$f^{*}K_{\omega} = \sum v_{f(p')}(\omega) \times \operatorname{ord}_{p'}(f) \quad (p')$$

$$K_{f^{*}\omega} = \sum \left(\operatorname{ord}_{p'}(f)\left(v_{f(p')}(\omega)+1\right) - 1\right) \quad (p')$$

$$\boxed{K_{f^{*}\omega} = f^{*}K_{\omega} + \sum \left(\operatorname{ord}_{p'}(f) - 1\right) \quad (p')}$$

$$\underbrace{\deg(K_{f^{*}\omega})}_{= 2g(S') - 2} = \underbrace{\deg(f^{*}K_{\omega})}_{= \deg(f)(2g-2)} + \sum \operatorname{ord}_{p'}(f) - 1$$

$\Rightarrow$ RH