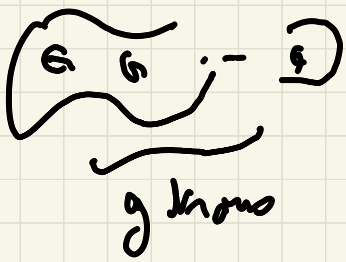
Gómo 13

07-12-2022

$\mathcal{S}$ surface de Riemann compacte

$\mathcal{S} \underset{\text{homéomorphe}}{\simeq} S^2$ ou à T_g, $g \geq 1$



$g(S^2) = 0$

$g(\mathcal{S}) = g \geq 1$ si $\mathcal{S} \simeq T_g$

---

2. Caractéristique d'Euler-Poincaré.

$\mathcal{S}$ surface de Riemann compacte connexe

$H_i(\mathcal{S})$ = homologie de degré i de $\mathcal{S}$
singulière, simpliciale, cellulaire

$h_i(\mathcal{S}) = \text{rang}_{\mathbb{Z}} H_i(\mathcal{S}) \in \mathbb{N}$
(fini car $\mathcal{S}$ est compacte).

$\dim_{\mathbb{R}}(S) = 2 \qquad H_i(S) = (0)$ si $i \geq 3$

$H_0(S) = \mathbb{Z}$ car S est connexe

$H_2(S) = \mathbb{Z}$ car S est une variété connexe orientée

$[\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ dét $d\varphi_{ij} = |\varphi_{ij}'|^2 > 0]$

$H_1(S) \overset{\text{groupe}}{\simeq} \mathbb{Z}^{2g}$ où $g =$ genre (S)

$h_0(S) = 1 \quad h_1(S) = 2g \quad h_2(S) = 1$

définition $\quad \chi(S) := h_0(S) - h_1(S) + h_2(S)$

$= 2 - 2g$

(caractéristique d'Euler-Poincaré)

interprétation topologique

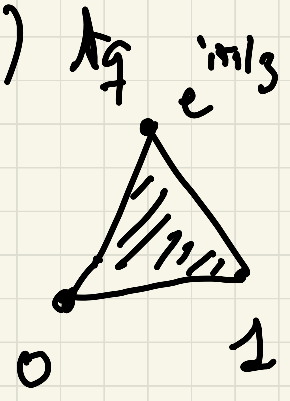
triangulation de S = la donnée d'une famille finie de triangles qui recouvrent S.

définition (triangulation analytique de S).

$\mathcal{C} = \{T_i\}$ $\quad T_i \subseteq S$ compact

× $\forall i$ $\exists$ carte holomorphe (φ_i, U_i) tq

$T_i \subseteq U_i$ $\qquad \varphi_i(T_i) =$

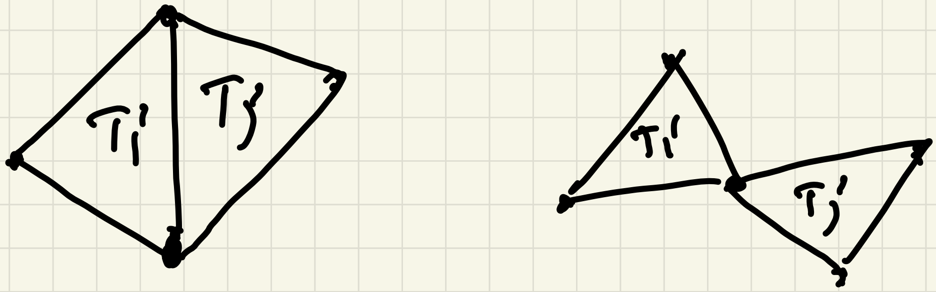


× $T_i \cap T_j = \emptyset$ ou un sommet ou une arête.

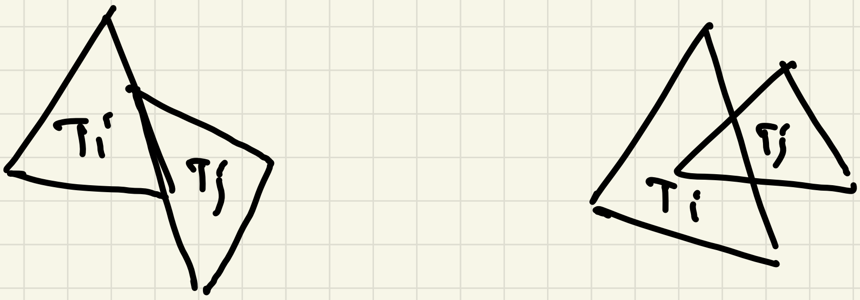
sommet$(T_i) = \varphi_i^{-1}\{0, 1, e^{i\pi/3}\}$

arête $(T_i) = \varphi_i^{-1}[0,1] \cup \varphi_i^{-1}[1, e^{i\pi/3}]$

$\cup\ \varphi_i^{-1}[e^{i\pi/3}, 0]$.



OK



pas OK

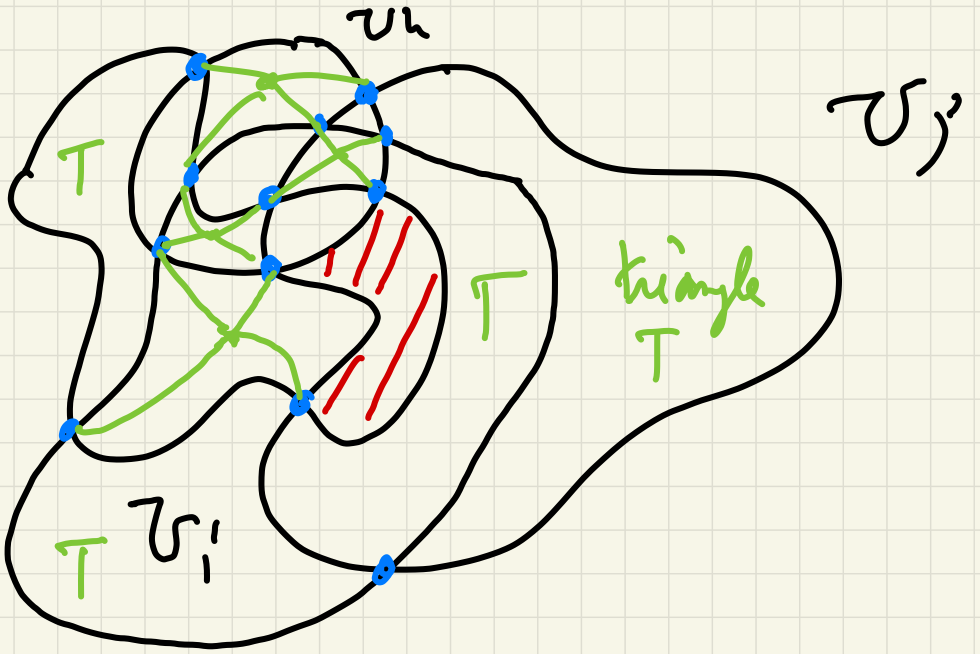
Thm : Toute surface de Riemann compacte admet une triangulation.

(étape 0 pour montrer $S \simeq \Pi_g$ ou S^2)

remarque : si S est une surface topologique compacte, c'est encore vrai (triangle topologique). C'est un théorème difficile.

<u>idée de démonstration.</u>

- $\mathcal{A}$ = atlas holomorphe $\{(U_i, \varphi_i)\}$
  U_i à bord analytique $\subseteq S$
  $U_i \not\subseteq U_j$
- $S - \bigcup \partial U_i$ est une union de disques à bord analytique par morceaux.
- on subdivise chaque disque ///



$\partial U_i \cap \partial U_j$ est un ensemble fini

car $\partial U_i, \partial U_j$ sont $\mathbb{R}$-analytiques.

Thm : Pour toute triangulation $\mathcal{T}$ de S (Riemann compacte)

$$\chi(S) = \#\text{face}(\mathcal{T}) - \#\text{arête}(\mathcal{T}) + \#\text{sommet}(\mathcal{T})$$

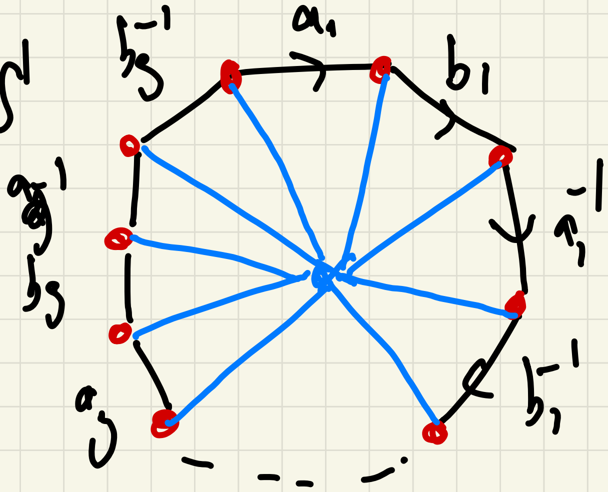
$\mathcal{T} = \{ T_i \}$

face $=$ T_i $\qquad T_i = \varphi_i^{-1}(\Delta)$ $\quad$ (sommets 0, 1, $e^{i\pi/3}$)

arête $= \{ \varphi_i^{-1}[0,1] \cup \varphi_i^{-1}[1, e^{i\pi/3}] \cup \varphi_i^{-1}[e^{i\pi/3}, 0] \}$

sommet $= \{ \varphi_i^{-1} \{ 0, 1, e^{i\pi/3} \} \}$

Remarque : S^1



$\mathcal{T}_0 \qquad S^1(\mathcal{T}_0) = \#$ sommets de $\mathcal{T}_0$

$= 2$

$F(\mathcal{T}_0) = 4g$.

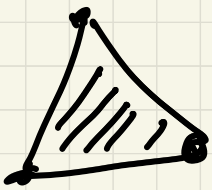
$A(\mathcal{T}_0) = 4g + 2g$

$S(\mathcal{T}_0) - A(\mathcal{T}_0) + F(\mathcal{T}_0) = 2 - 2g$!

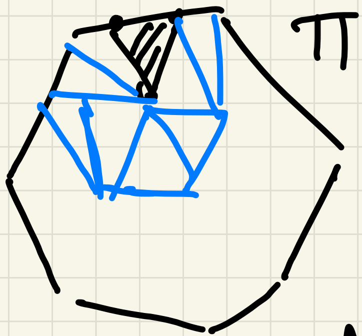
démonstration (topologique).

① $\mathcal{T}$ = triangulation d'un polygone Π du plan, alors $\boxed{\chi(\mathcal{T}) = F(\mathcal{T}) - A(\mathcal{T}) + S(\mathcal{T}) = +1}$

récurrence sur $F(\mathcal{T})$

$F(\mathcal{T}) = 1$ $\quad \Pi =$ 

T



$\Pi, \mathcal{T} \longrightarrow \Pi' = \Pi - T$

$\mathcal{T}' = \mathcal{T}|_{\Pi'}$

$F(\mathcal{T}') = F(\mathcal{T}) - 1$

$A(\mathcal{T}') = A(\mathcal{T}) - 1$

$S(\mathcal{T}') = S(\mathcal{T})$

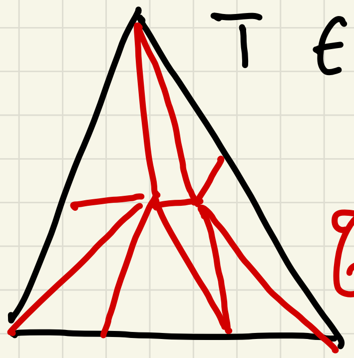
$\chi(\mathcal{T}') = \chi(\mathcal{T})$

$\quad\quad\quad\quad \shortparallel$

$\quad\quad\quad\quad +1.$

② $\mathcal{T}' \leq \mathcal{T}$ sur S.
raffine $\Rightarrow \chi(\mathcal{T}') = \chi(\mathcal{T})$

chaque triangle de $\mathcal{T}$ = union (finie) de triangle de $\mathcal{T}'$.



③ $\mathcal{T}', \mathcal{T}$ quelconque sur S, il

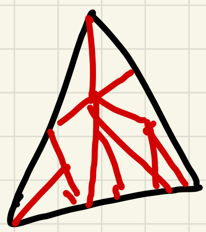
existe $\mathcal{T}''$ tq $\mathcal{T}'' \leq \mathcal{T}'$ et $\mathcal{T}'' \leq \mathcal{T}$

($S - \bigcup$ arêtes de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$, on raffine).

$\chi(\mathcal{T}') \underset{②}{=} \chi(\mathcal{T}'') \underset{②}{=} \chi(\mathcal{T})$.

$\mathcal{T}' \leq \mathcal{T}$

$f \in$ Face de $\mathcal{T}$



$F(f)$ = face de $\mathcal{T}'$ dans f

$A(f)$ = arête de $\mathcal{T}'$ dans f

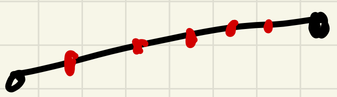
$S(f)$ = sommets de $\mathcal{T}'$ dans f

$$F(f) - A(f) + S(f) = +1 \qquad (1)$$

$a \in$ arête de $\mathcal{T}$

$A(a)$ = arête de $\mathcal{T}'$ dans a

$S(a)$ = sommets de $\mathcal{T}'$ dans a



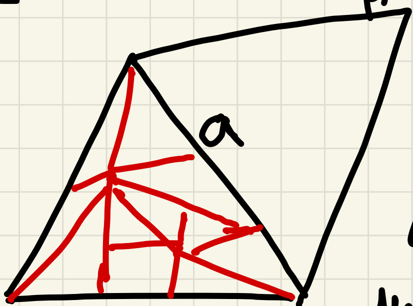
$$F(\mathcal{T}) = \sum_{f \in \text{face}(\mathcal{T})} +1 = \sum_{f \text{ face de } \mathcal{T}} \left(F(f) - A(f) + S(f) \right)$$

$$A(\mathcal{T}) = \sum_{a \in \text{arête}(\mathcal{T})} +1 = \sum_{a \text{ arête de } \mathcal{T}} \left(S(a) - A(a) \right)$$

$$F(\mathcal{T}) - A(\mathcal{T}) = \sum_{f \in \text{Face } \mathcal{T}} F(f) - A(f) + \delta'(f) - \sum_{a \text{ arête de } \mathcal{T}} \delta'(a) - A(a)$$

$$= F(\mathcal{T}') + \cdots$$

$$\sum_{f \in \text{Face}(\mathcal{T})} A(f) = \#\text{ arêtes de } \mathcal{T}' \text{ incluses dans une face de } \mathcal{T}$$



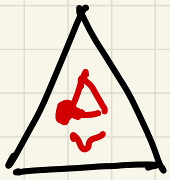
$+ 2\,\#$ arête de $\mathcal{T}'$ incluses dans une arête de $\mathcal{T}$

$$F(\mathcal{T}) - A(\mathcal{T}) = F(\mathcal{T}') - A(\mathcal{T}') + \sum_{f \in \text{Face}(\mathcal{T})} \delta'(f) - \sum_{a \in \text{arête}(\mathcal{T})} \delta'(a).$$

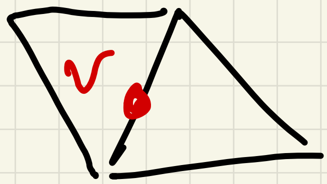
$$\left(= F(\mathcal{T}') - A(\mathcal{T}') + \delta'(\mathcal{T}') - \delta'(\mathcal{T}) \right)$$

v = sommet de $\mathcal{T}'$

(α) → soit v est dans une unique face de $\mathcal{T}$



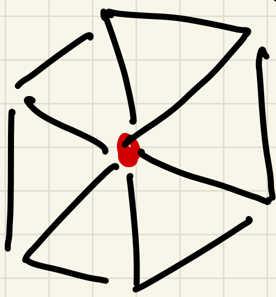
(β) → v est dans une unique arête de $\mathcal{T}$



(γ) → v est un sommet de $\mathcal{T}$

$n = \#$ face de $\mathcal{T} \ni v$

$\mathcal{T}$



$n = 6$

$$\sum_{f \text{ face } \mathcal{T}} S(f) - \sum_{a \text{ arête de } \mathcal{T}} S'(a) = \# \text{ sommets de } v \ (\alpha) + \# \text{ sommets de } v \ (\beta)$$

$$= S'(\mathcal{T}') - S(\mathcal{T}) . \quad ///$$

démonstration 2. (technologie = homologie simpliciale).

$\mathcal{G} \rightsquigarrow H_n(S)$

Δ_n = groupe abélien libre engendré par les simplexes de dim n (de $\mathcal{G}$)

$n=0$ $\quad \Delta_0 = \{ \sum a_i v_i \,,\; a_i \in \mathbb{Z}$ v_i sommets $\}$

$n=1$ $\quad \Delta_1 = \{ \sum a_i e_i \,,\; a_i \in \mathbb{Z}$ e_i arêtes $\}$

$n=2$ $\quad \Delta_2 = \{ \sum a_i f_i \,,\; a_i \in \mathbb{Z}$ f_i faces $\}$

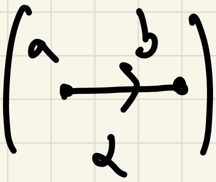
$rg(\Delta_0) = S(\mathcal{G})$

$rg(\Delta_1) = A(\mathcal{G})$

$rg(\Delta_2) = F(\mathcal{G})$.

$$\Delta_2 \xrightarrow{\partial_2} \Delta_1 \xrightarrow{\partial_1} \Delta_0$$

$\partial_2\Big($  $\Big) = \alpha + \beta + \gamma$ orientation.

$\partial_1\Big($  $\Big) = b - a \qquad \partial_1 \circ \partial_2 = 0$

$$\begin{cases} H_2 = \ker \partial_2 \\ H_1 = \ker \partial_1 / \operatorname{Im} \partial_2 \\ H_0 = \Delta_0 / \operatorname{Im} \partial_1 \end{cases} \qquad \begin{aligned} h_2 &= \operatorname{rg} H_2 \\ h_1 &= \operatorname{rg} H_1 \\ h_0 &= \operatorname{rg} H_0. \end{aligned}$$

$$0 \to \ker \partial_2 \to \Delta_2 \to \operatorname{Im} \partial_2 \to 0 \qquad \Delta_2 \xrightarrow{\partial_2} \Delta_1$$

$$0 \to \ker \partial_1 \to \Delta_1 \to \operatorname{Im} \partial_1 \to 0. \qquad \Delta_1 \xrightarrow{\partial_1} \Delta_0.$$

$$\operatorname{rg}(\Delta_2) = \operatorname{rg} \operatorname{Im} \partial_2 + \operatorname{rg} \ker \partial_2$$

$$\operatorname{rg}(\Delta_1) = \operatorname{rg} \operatorname{Im} \partial_1 + \operatorname{rg} \ker \partial_1$$

$$\operatorname{rg}(\Delta_2) - \operatorname{rg}(\Delta_1) = \underbrace{\operatorname{rg} \ker \partial_2}_{h_2} - \underbrace{(\operatorname{rg} \ker \partial_1 - \operatorname{rg} \operatorname{Im} \partial_2)}_{h_1} + h_0 - \operatorname{rg}(\Delta_0).$$

3. Formule de Riemann-Hurwitz.

S, S' deux surfaces de Riemann compactes connexes

$f : S \to S'$ holomorphe non constante.

$$(f(S) = S').$$

rappel $p \in S$ $q = f(p) \in S'$

$\exists$ cartes holomorphes centrées en p et en q

$$\begin{tikzcd} S \ni p \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "O"] & q \in S' \arrow[d, "\psi"] \\ O \ni 0 \arrow[r, "z \longmapsto z^k"'] & 0 \end{tikzcd}$$

$\exists k \geq 1$

$\psi f \varphi^{-1}(z) = z^k$

$\mathrm{ord}_p(f) = k$

$\{p,\ \mathrm{ord}_p(f) \geq 2\}$ = discret donc fini

$\|$

lieu de ramification de f, ensemble des points critiques, $\mathrm{Ram}\, f$.

$VC(f) = f(\mathrm{Ram}\, f)$ = ensemble des valeurs critiques de f.

Thm (Riemann - Hurwitz) $f : S \to S'$

① $q \in S' \longmapsto \sum_{p \in f^{-1}(q)} \mathrm{ord}_p(f) \in \mathbb{N}^*$ est constante égale à $\deg(f)$ = degré de f.

② $\chi(S) = \deg(f) \cdot \chi(S') - \sum_{p \in S} (\mathrm{ord}_p f - 1)$

remarques:

- si $\mathrm{Ram}\, f = \emptyset$ ($\Leftrightarrow f$ est un revêtement)

alors $\chi(S) = \deg(f)\, \chi(S')$.

- $S = S' = \hat{\mathbb{C}}$ $\quad f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ hol.

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \qquad z \in \mathbb{C} \quad \mathrm{pgcd}(P, Q) = 1.$$

$$\max\{\deg P, \deg Q\} = d \geq 1$$

$\deg(f) = d \qquad w \notin VC(f) = f(\mathrm{Ram}\, f)$

$$z_1 \quad \cdots \quad z_h \xrightarrow{f} w$$

$\mathrm{ord}_{z_i}(f) = 1 \qquad \mathrm{ord}_{z_h}(f) = 1$

$$\deg(f) = \# f^{-1}(w) = \# \text{zéro}\{P(z) - wQ(z)\} = d.$$

$$\chi(\hat{\mathbb{C}}) = 2 = d(2) - \sum_{z \in \hat{\mathbb{C}}} (\mathrm{ord}_z(f) - 1)$$

$$\boxed{\sum_{z\in\hat{\mathbb{C}}} \left(\mathrm{ord}_z(f)-1\right) = 2d-2} \qquad f=\frac{P}{Q}$$

$$\mathrm{ord}_z(f)-1 \overset{\text{exercice}}{=} \mathrm{ord}_z(f').$$

$$\#\ f'=0 \text{ avec multiplicités } = 2d-2.$$

exp $\quad f = P(z)$ polynôme de degré d

$$(f'=0) = (P'=0) \cup \{\infty\}$$

$$\overbrace{\#\{P'=0 \text{ comptés avec multiplicité}\}}^{d-1} + \left(\mathrm{ord}_\infty(P)-1\right)$$

$$= 2d-2$$

$$\boxed{\mathrm{ord}_\infty(P) = d} \qquad f^{-1}(\infty) = \infty$$

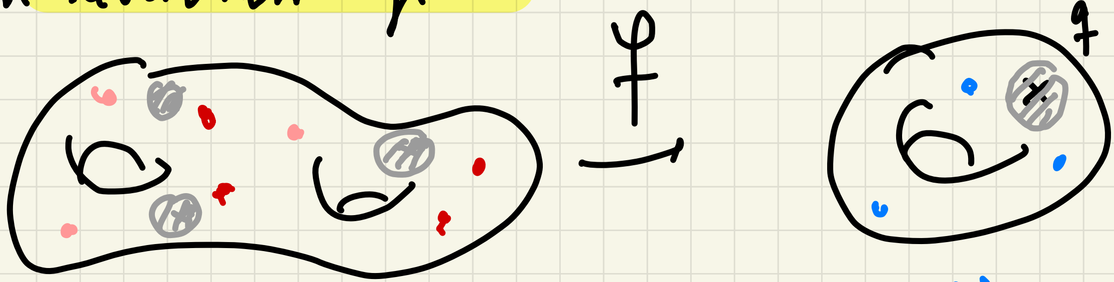
démonstration (élémentaire) $f : S \to S'$

$\mathrm{Ram}\, f = \{ p \in S,\ \mathrm{ord}_p(f) \geq 2 \}$.

$VC(f) = f(\mathrm{Ram}\, f)$.

① $f : S - f^{-1} VC(f) \to S' - VC(f)$ est

un revêtement fini

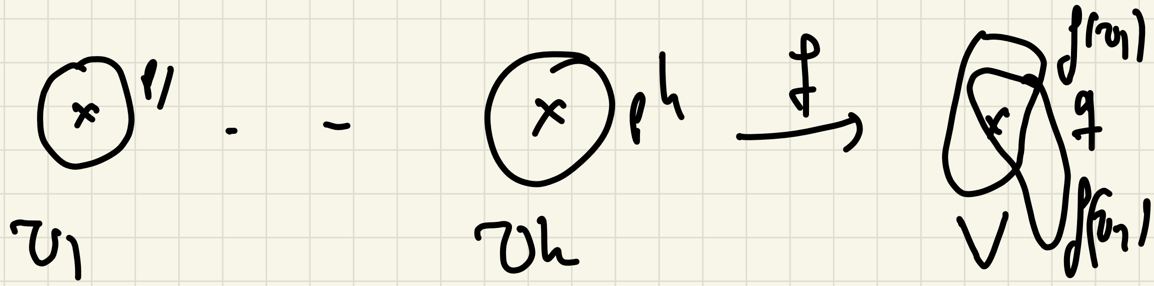


$f^{-1} VC = \mathrm{Ram} f \cup \{ \cdot \}$ $\quad VC(f)$

$q \notin VC$ $\quad f^{-1}(q) = $ fini en discret $= \{ p_1 \ldots p_k \}$

cartes locales $f : (V_i, p_i) \to (V_i, q)$ est

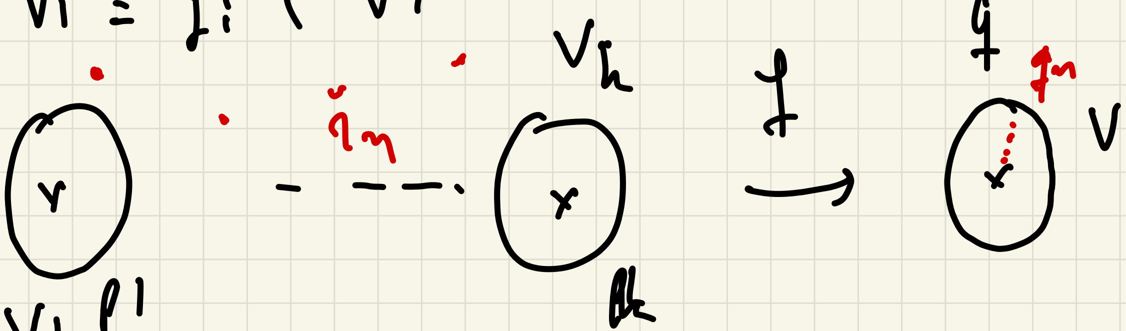
un biholomorphisme.



V = composante connexe de $\bigcap f_i(U_i) \ni q$

f_i^{-1} = inverse de $f : U_i \to f(U_i)$

$V_i = f_i^{-1}(V)$



on cherche à montrer que $f^{-1}(V) = \bigcup V_i$ (quitte à réduire V).

$f^{-1}(q) = \{p_1 \dots p_k\}$ $\quad \bigcup V_i \subseteq f^{-1}(V)$

Par l'absurde $q_n \to q$ $\; f(r_n) = q_n$ $\; r_n \notin \bigcup V_i$ $\; r_n \to r \in f^{-1}(q)$!

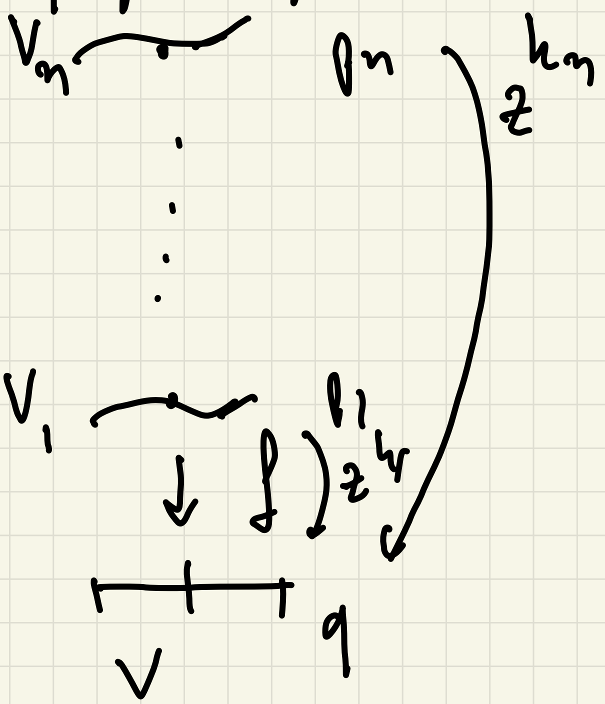
remarque : $S' - VC(f)$ est connexe.
$\uparrow$ fini

donc $\# f^{-1}(q)$ est constant pour $q \notin VC(f)$

on note $d =$ le degré du revêtement

$$f : S - f^{-1}(VC(f)) \to S' - VC(f).$$

q quelconque dans S'



$k_i := \mathrm{ord}_{p_i}(f)$

$f^{-1}(q) = \{p_1 \cdots p_n\}$

$f^{-1}(V) = V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_n$

V, V_i biholo au disque

$f : V_i \to V$
$z \mapsto z^{k_i}$

$$\sum_{f(p_i')=q} \mathrm{ord}_{p_i}(f) = \sum_{i=1}^{m} h_i$$

si q' proche de q $\quad q' \in V \quad q' \notin V(f)$

$\# f^{-1}(q') = d$ $\qquad \# h_2$

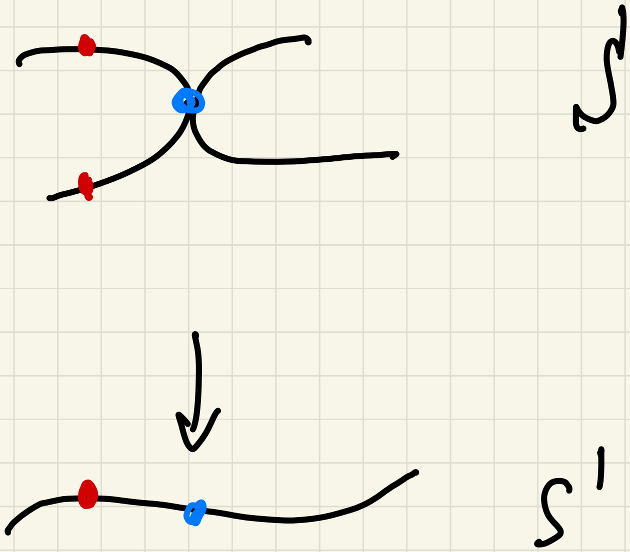
$$f^{-1}(q') = (f^{-1}(q') \cap V_1) \sqcup (f^{-1}(q') \cap V_2) \sqcup \dots \sqcup (f^{-1}(q') \cap V_m)$$

$V_i \to V \quad \# h_1$

$z \to z^{h_i}$ $\qquad \# h_m$

$$\boxed{d = \sum h_i = \sum_{f(p_i)=q} \mathrm{ord}_{p_i}(f).}$$

dessin (possible)



hol. non constant.

terminologie : $f : S \to S'$ surface de Riemann compacte revêtement ramifié

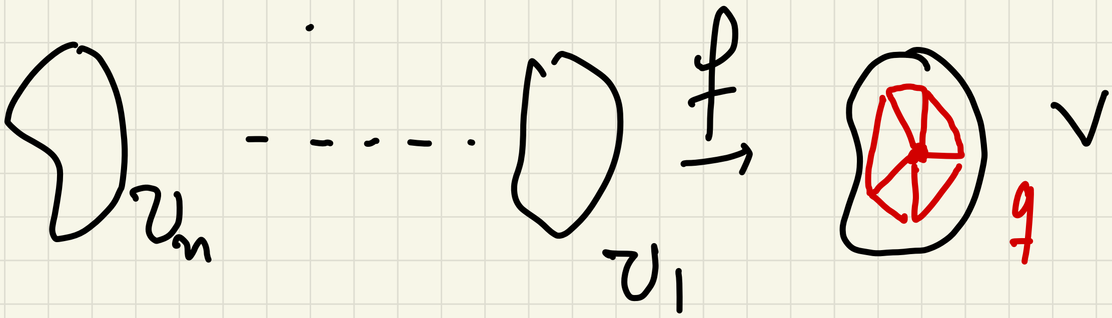
→ démonstration de la formule de Riemann Hurwitz.

On fixe une triangulation $\mathcal{T}'$ de S'

$f : S \to S'$. On la raffine si nécessaire

pour que $\forall q$ sommet de $\mathcal{T}'$, $\exists V$ comme

ci-dessous $\bigcup_{\text{face de } \mathcal{T}' \ni q} \subseteq \bar{V}$

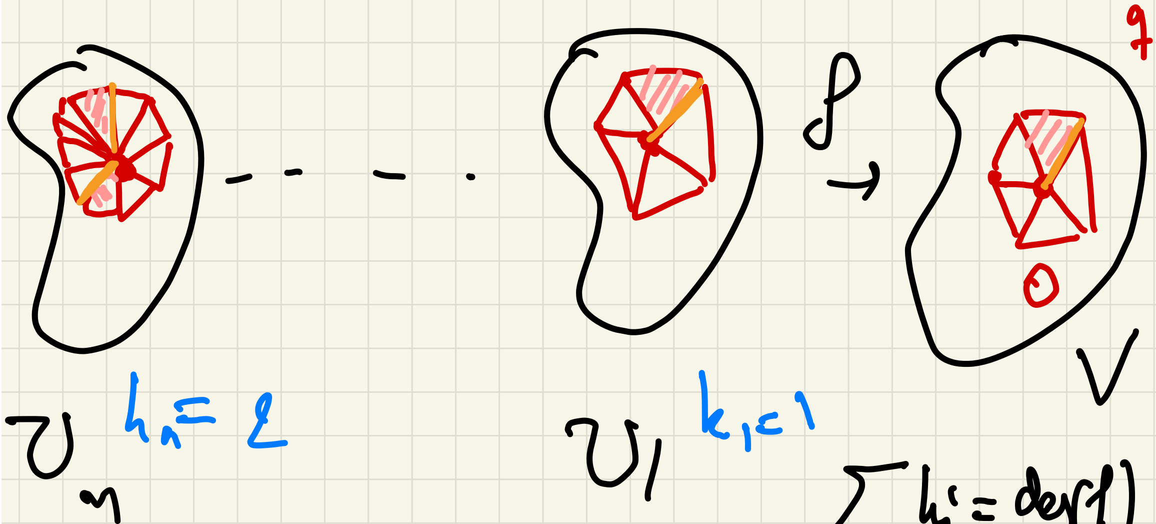


$\forall q \;\; \exists V \ni q$ tq $f^{-1}(V) = U_1 \sqcup \dots \sqcup U_n$

union disjointe de disques

$\varphi : V \to \mathbb{D}$ $\quad \varphi_i : U_i \to \mathbb{D}$

$\varphi \circ f \circ \varphi_i^{-1}(z) = z^{k_i}$



$$\sum k_i = \deg(f) = d$$

$\mathcal{T}' \rightsquigarrow \mathcal{T} = f^{-1}(\mathcal{T}')$ est une triangulation de S^2.

$$F(\mathcal{T}) = d \times F(\mathcal{T}')$$

$$A(\mathcal{T}) = d \times A(\mathcal{T}')$$

On cherche à calculer $S(\mathcal{T})$?

$q \in$ Sommet de $\mathcal{T}'$

$$d = \sum_{f(p_i)=q} \operatorname{ord}_{p_i}(f) = \# f^{-1}(q) + \sum_{f(p)=q} \left(\operatorname{ord}_p(f) - 1 \right)$$

$$S(\mathcal{T}) = \# f^{-1} S(\mathcal{T}')$$

$$= \sum_{q \in \text{Sommet de } \mathcal{T}'} \# f^{-1}(q)$$

$$= \sum_{q \in \text{Sommet de } \mathcal{T}'} \left(d - \sum_{f(p)=q} \left(\operatorname{ord}_p(f) - 1 \right) \right)$$

$$= d\, S(\mathcal{T}') - \sum_p \left(\operatorname{ord}_p(f) - 1 \right)$$

$$\chi(S') = \chi(\tau')$$
$$= F(\tau') - A(\tau') + S'(\tau')$$
$$= d\,F(\tau') - d\,A(\tau') + d\,S(\tau') - \sum_{p \in f' \text{ sommet de } \tau'} \left(\mathrm{ord}_p(f) - 1\right)$$

observation : $V_{G'}(f) \supseteq$ sommet de τ'.

$$\boxed{\chi(S) = d\,\chi(S') - \sum_{p \in \mathrm{Ram}\, f} \left(\mathrm{ord}_p(f) - 1\right)}$$

Application $f : S \to S'$ non constante

$$\chi(S) = d\,\chi(S') - \underbrace{\sum_p (\mathrm{ord}_p \varphi' - 1)}_{\geq 0}.$$

$$\Rightarrow \chi(S) \leq d\,\chi(S').$$

si $g(S') \geq 1$ $\quad \chi(S') = 2-2g \leq 0$

$$\Rightarrow \chi(S) \leq 0.$$

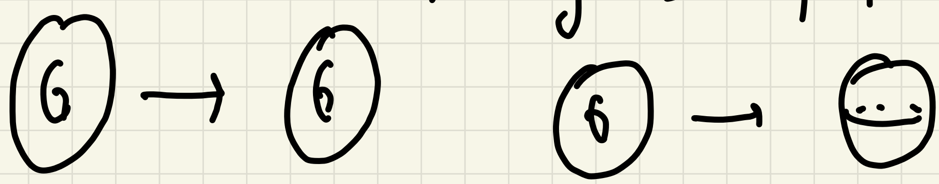
si $g(S) = 1$ $\Rightarrow$ $d\,\chi(S') \geq 0$

$\chi(S) = 0$

$$\Rightarrow \chi(S') = 2-2g' \geq 0$$

S'

$$\Rightarrow g(S') \in \{0, 1\}.$$



$S' = \hat{\mathbb{C}}$ $\quad \chi(S') = 2$

$$\Rightarrow \quad 2 \leq d\,\chi(S'),$$

$$\Rightarrow \quad \chi(S') > 0.$$

$$\Rightarrow \quad S' = \hat{\mathbb{C}}.$$

$$\hat{\mathbb{C}} \xrightarrow{f} S' \Rightarrow S' \simeq \hat{\mathbb{C}}.$$

Question: $g(S) = 2 \quad g(S') = 1$

$$\chi(S) = d\,\chi(S') - \sum (\mathrm{ord}_p(f) - 1)$$

$$\chi(S) = 2 - 4 = -2, \qquad \chi(S') = 0$$

$$\Rightarrow \sum (\mathrm{ord}_p(f) - 1) = 2$$

Ram f = un pt ou 2 pt.

$\mathrm{ord}_p(f) = 3 \qquad \mathrm{ord}_p(f) = \mathrm{ord}_{p'}(f) = 2$

Exercice. S surface de Riemann.

ω 1-forme

$$\boxed{\omega \text{ holomorphe} \iff d\omega = 0 \text{ et } *\omega = -i\omega}$$

$$\langle \omega, \eta \rangle = -\int_S \omega \wedge *\bar{\eta}$$

S compacte ω, η 1-forme C^0.

$\omega = f\,dz + g\,d\bar{z}$

f, g C^0.

$$\langle \omega, \omega \rangle = \int (|f|^2 + |g|^2) \text{ Leb} > 0 \text{ si } \omega$$

localement

$$\left(\{1\text{-forme } C^0\}, \langle\, ,\, \rangle\right)^{\text{complété}} = \text{1-forme à coef. } f, g \in L^2_{loc}. \quad ///$$