Gorno 12

05-05-2022

III. Surfaces de Riemann compactes

But :
- topologie (genre)
- fonctions méromorphes (théorème de Riemann-Roch, coloriage)
- exemples : $\hat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}/\Lambda$, ...

réseau

1) Topologie.

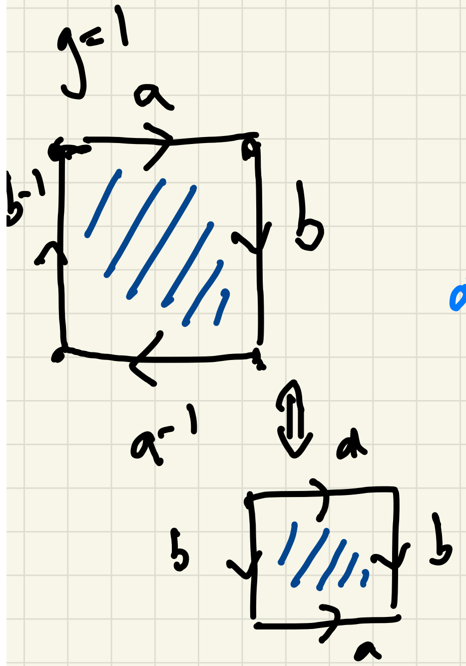
S surface de Riemann compacte et connexe.

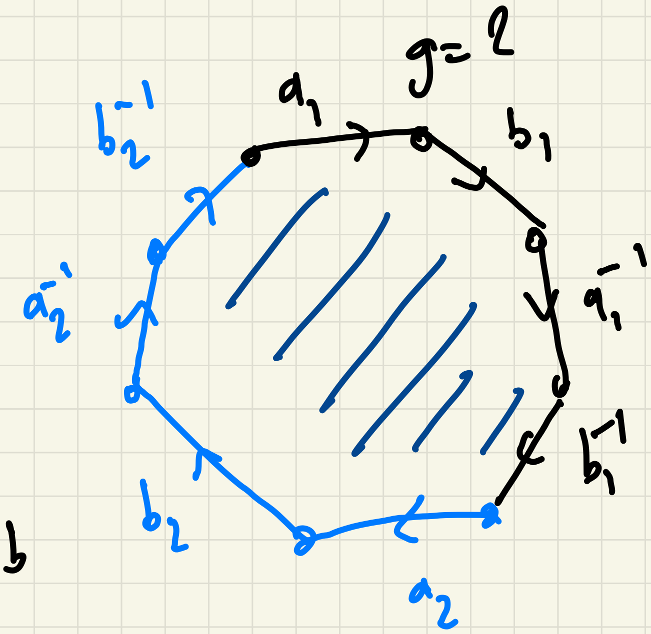
Thm (classification topologique des surfaces)

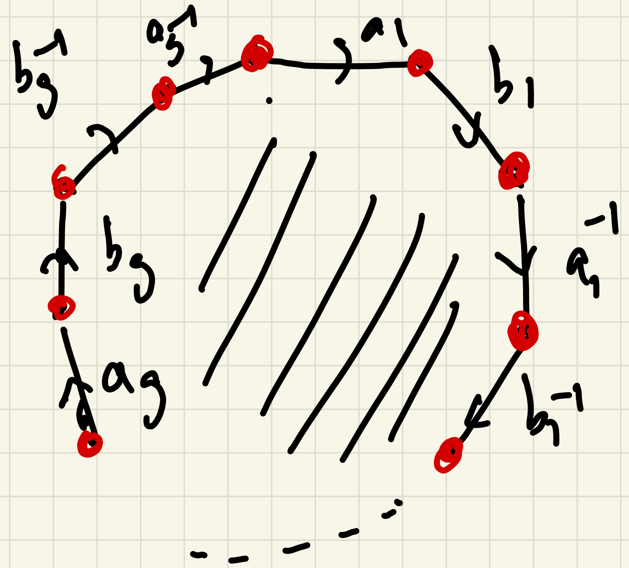
S est homéomorphe à $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; x^2+y^2+z^2=1\}$

ou à Π_g avec $g \geq 1$

Π_g = polygône à $4g$ côtés recollé le long de ses arêtes

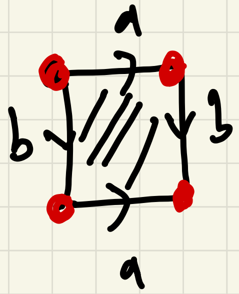


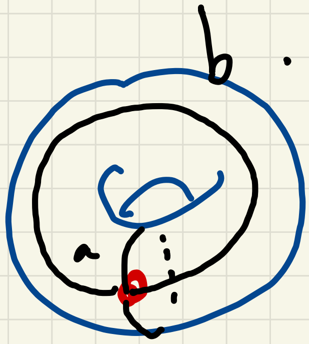




on procède par récurrence sur g

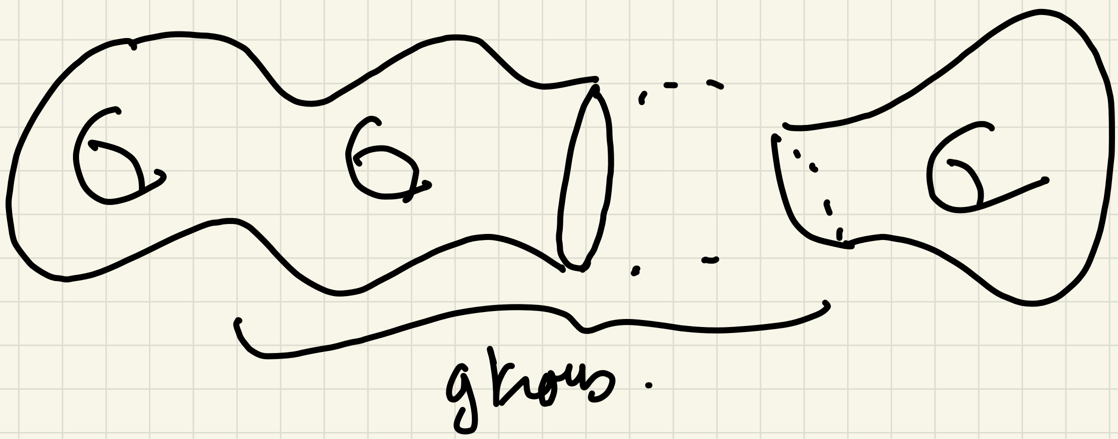
$g=1$

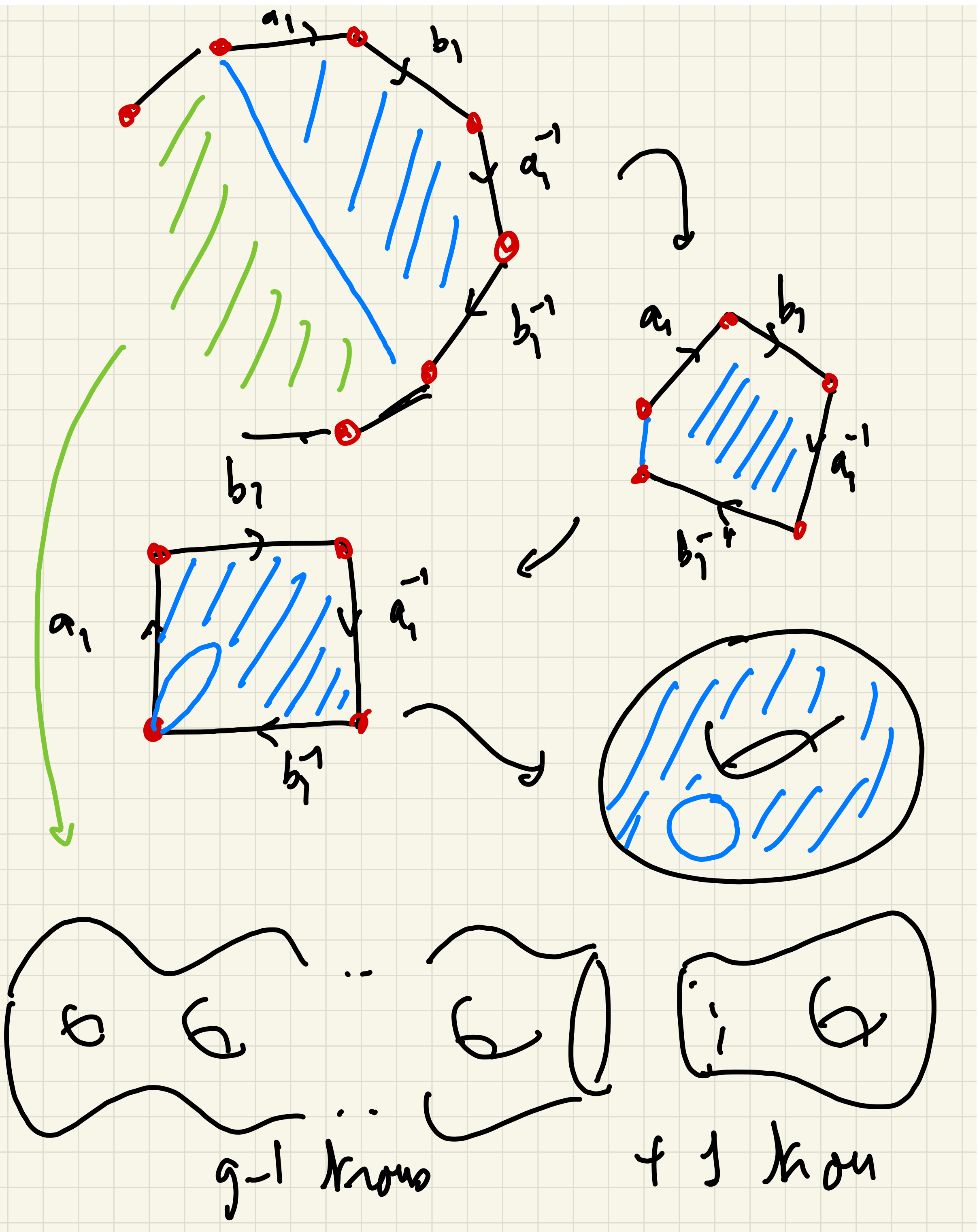




g quelconque.

tore à g trous





a_1
b_1
a_1^{-1}
b_1^{-1}
a_1
b_1
a_1^{-1}
b_1^{-1}
b_1
a_1
a_1^{-1}
b_1^{-1}
a_1
g-1 trous
+ 1 trou

démonstration = on construit une triangulation, on coupe et on recolle !

dans le cas topologique (surface topologique compacte)

× existence d'une triangulation est difficile !

observation : dans notre cas la surface est de Riemann (donc $\mathbb{R}$-analytique) et l'existence est <u>facile</u>.

de plus notre surface est $\boxed{\text{orientée}}$, donc ne peut pas être homéomorphe à $\mathbb{RP}^2$, Klein...

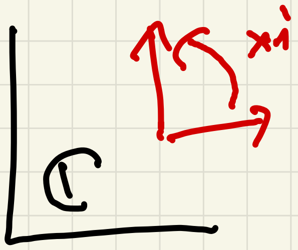
pourquoi est-ce que S est orientée ?

- une orientation sur une variété $\mathcal{C}^1$ réelle M de dimension n, c'est la donnée d'un atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ tel que

$$\boxed{\det\left(d\left(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}\right)\right) > 0 \quad \forall i, j.}$$

- S surface de Riemann $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$

$\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}$ $\quad \varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ est $\boxed{\text{hol.}}$



en coordonnées réelles $z = x + iy$.

$$\det(d\varphi_{ij}) = \det\begin{bmatrix} \partial\psi_{ij}/\partial x & \partial\phi_{ij}/\partial x \\ \partial\psi_{ij}/\partial y & \partial\phi_{ij}/\partial y \end{bmatrix}$$

$\varphi_{ij} = \psi_{ij} + \sqrt{-1}\,\phi_{ij}$

$$\boxed{\det(d\varphi_{ij}) = |\varphi_{ij}'(z)|^2 > 0}$$

Thm : une surface de Riemann est canoniquement orientée de telle sorte que pour toute carte (U, φ)

$\varphi : U \to \mathbb{C}$ préserve l'orientation

(avec $\mathbb{C}$ muni de l'orientation directe)

Thm M_g est homéomorphe à M_h ssi $g = h$.

$g=1$ $\qquad\qquad$ $g=2$

démonstration : on montre que

$\pi_1(M_g, *) \simeq \pi_1(M_h, *)$ ssi $g = h$

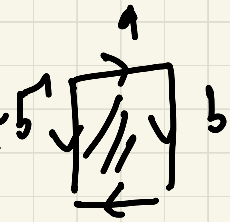
isomorphe groupe

(Formule de Van Kampen).

définition : S surface de Riemann compacte, $S \simeq M_g$ on pose genre $(S) = g$.

Convention : si S est homéomorphe à S^2, $\boxed{\text{genre}(S) = 0}$.

Sinon genre$(S) \geq 1$

genre$(S) = 1 \iff S \simeq$  $\simeq$ tore $S^1 \times S^1$

Remarque : genre$(S) = 0 \iff S \underset{\text{bihol}}{\simeq} \hat{\mathbb{C}}$.

$\Leftarrow]$ évident

$\Rightarrow]$ $S \underset{\text{homéo}}{\simeq} S^2 \Rightarrow \pi_1(S) = \{0\} \underset{\substack{\text{thm} \\ \text{uniformisation}}}{\Rightarrow} S \simeq \hat{\mathbb{C}}$ ///

genre $(\mathcal{S}) = 1 \iff \mathcal{S} = \mathbb{C}/\Lambda$

courbe elliptique.

$\Leftarrow$ évident $\mathcal{S} \simeq S^1 \times S^1$

$\Rightarrow$ genre $(\mathcal{S}) = 1 \Rightarrow \mathcal{S} \simeq S^1 \times S^1$

tores

$\Downarrow$

$\pi_1(\mathcal{S}, *) \simeq \mathbb{Z}^2$

abélien

(exercice + thm uniformisation) $\Downarrow$

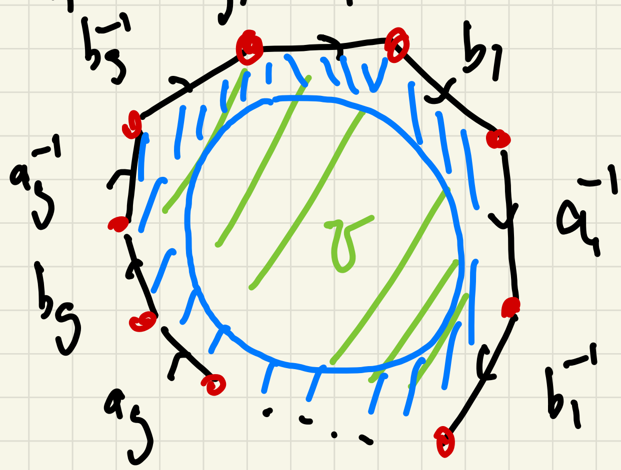
$\tilde{\mathcal{S}} \simeq \mathbb{C}$

$\mathcal{S} \simeq \mathbb{C}/\Lambda$ ///

$g \geq 2$?

On calcule à l'aide de Van Kampen

$\pi_1(M_g)$



$M_g = U \cup V$

γ = lacet

$b_g^{-1} \cdots b_1^{-1} a_1^{-1} b_1 a_1$

$U = M_g \setminus \gamma$

V = voisinage de γ

$$\pi_1(M_g, *) \simeq \pi_1(U) *_{\pi_1(U \cap V)} \pi_1(V)$$

$$\simeq \pi_1(V) / i_*(\pi_1(U \cap V))$$

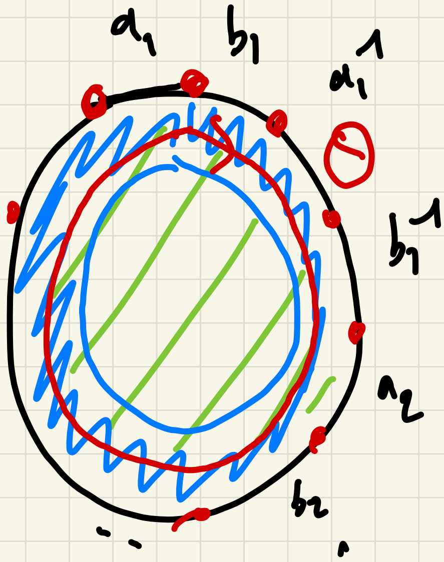
$\pi_1(U) = \{\cdot\}$

U = disque

$i : U \cap V \to V$

$i_* \pi_1(U \cap V)$ = sous-groupe de $\pi_1(V)$

$\pi_1(U \cap V)$



$$U \cap V \subseteq U$$

$$\text{anneau} \simeq S^1 \times]0,1[$$

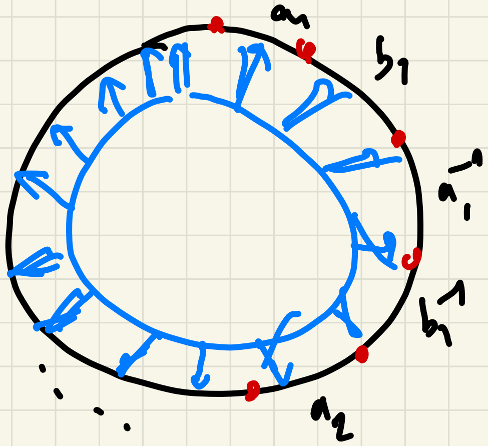
- $\pi_1(U \cap V, x)$ est cyclique engendré par θ
- $i_* \pi_1(U \cap V) \subseteq \pi_1(V)$

θ homotope à $b_g^{-1} \cdots b_1^{-1} a_1^{-1} b_1 a_1$

θ^{-1} = homotope à $[a_1,b_1][a_2,b_2]\cdots[a_g,b_g] = \prod_{i=1}^{g} [a_i,b_i]$

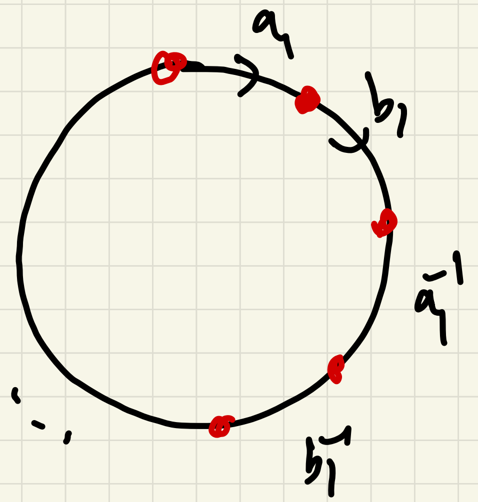
(librement)

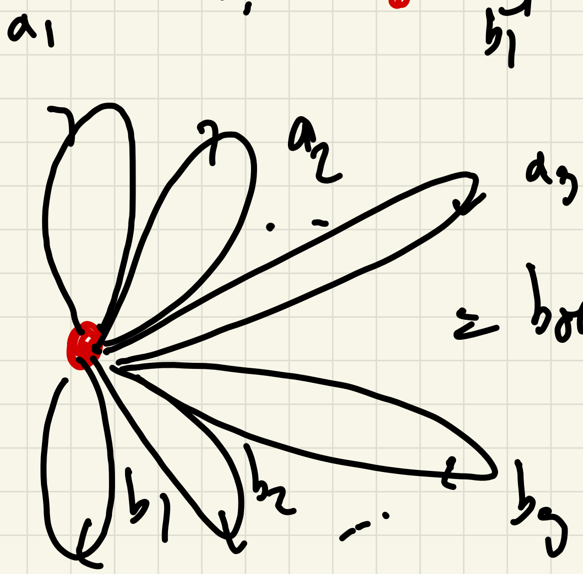
$\pi_1(V)$



$= V$

homotopie





$\simeq$ bouquet de $2g$ cercles.

$\pi_1(\Gamma, x)$ = groupe libre engendré par les chemins $a_1\ b_1\ a_2\ b_2 \dots a_g\ b_g$.

$\mathcal{L}_g$ groupe libre à $2g$ générateurs

$$\rightsquigarrow \boxed{\underset{\text{groupe}}{\pi_1(M_g)} \simeq \langle a_1, b_1, a_2, b_2 \dots, a_g, b_g \rangle \Big/ \left\langle\!\left\langle \prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i] \right\rangle\!\right\rangle}$$

sous-groupe normal engendré par $\prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i]$

$$\underset{\text{groupe}}{\pi_1(M_g) \simeq \pi_1(M_h)} \Rightarrow g = h.$$

On regarde $H_1(M_g, \mathbb{Z})$ = Abélianisé de M_g.

G est un groupe (quelconque)

$[G, G]$ = sous groupe engendré par

$[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$ $a,b \in G$

normal

$$\boxed{Ab(G) = G/[G,G]}$$

propriété universelle : $\rho : G \to H$

morphisme avec H abélien alors $\exists!\, Ab(G) \to H$

Ag

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\rho"] \arrow[d] & H \\ Ab(G) \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

$(\ker(\rho) \supseteq [G,G])$

$$H_1(\Pi_g, \mathbb{Z}) = \pi_1(\Pi_g, *)/[\pi_1(\Pi_g), \pi_1(\Pi_g)]$$

Ab (groupe libre à $2g$ générateurs $a_1\, b_1\, a_2\, b_2 \,\dots\, a_g\, b_g$)

$=$ groupe abélien libre. engendré par $a_1 b_1\; a_2 b_2 \,\dots\, a_g b_g$

$$= \bigoplus_{i=1}^{g} \mathbb{Z} a_i \oplus \bigoplus_{i=1}^{g} \mathbb{Z} b_i \simeq \mathbb{Z}^{2g}$$

gpe libre à $2g$ générateurs

$$\begin{tikzcd}
\langle a_i, b_i \rangle \arrow[rr, bend left, "\pi"] \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & \pi_1(\Pi_g) = \langle a_i, b_i \rangle \big/ \prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i] \arrow[r] \arrow[d] & Ab\langle a_i, b_i \rangle \\
Ab\langle a_i, b_i \rangle \arrow[r, "\sim", "\text{prop. universelle}"'] \arrow[rru, bend right=60, "\mathrm{Id}\ (\text{propriété universelle})"'] & Ab(\Pi_g) = H_1(\Pi_g, \mathbb{Z}) \arrow[ru, "\sim"', "\text{prop. universelle}"] &
\end{tikzcd}$$

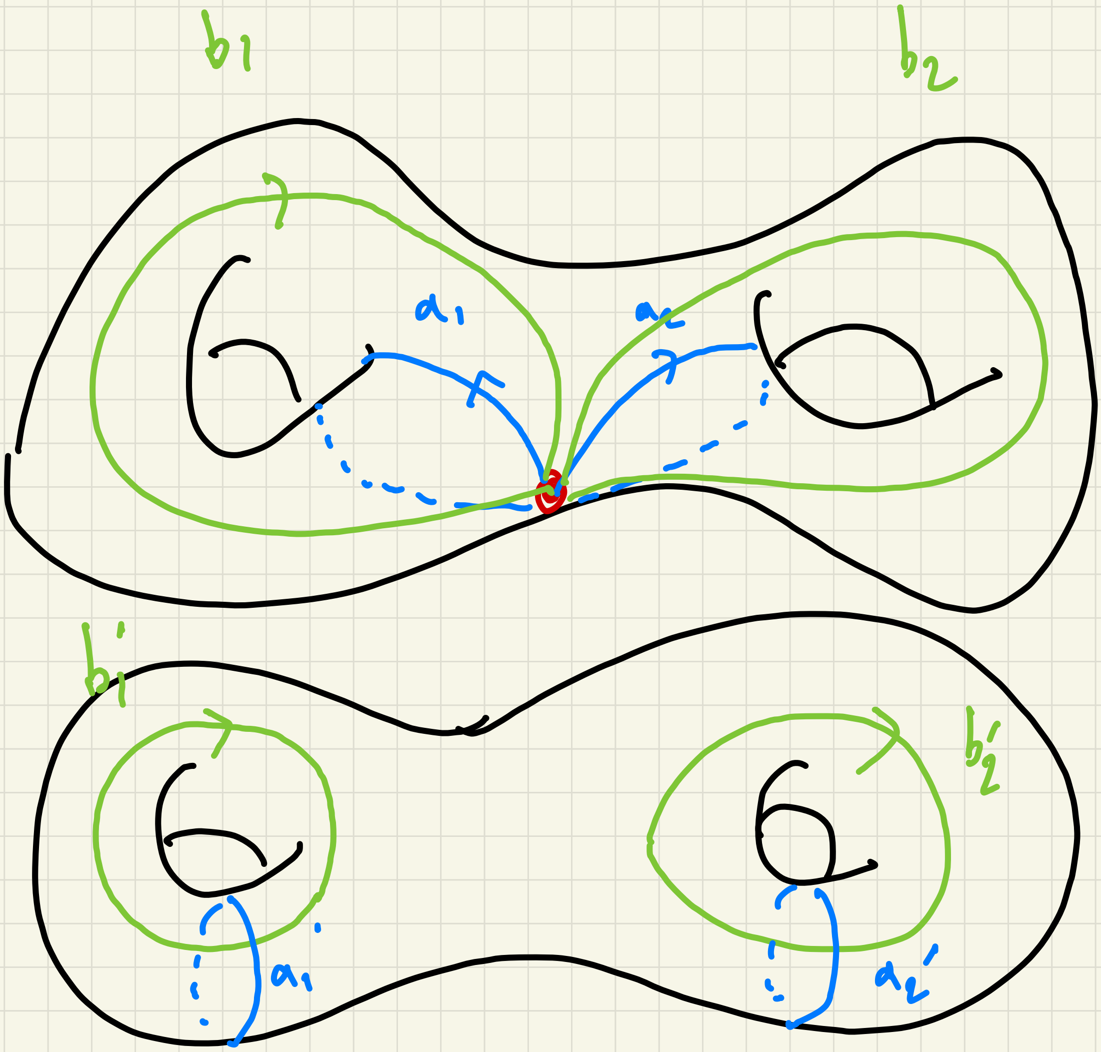
$Ab\langle a_i, b_i \rangle \cong \mathbb{Z}^{2g}$

Conclusion $H_1(M_g, \mathbb{Z})$ est librement engendré par les classes $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$

$$H_1(M_g, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{2g} \qquad \boxed{\text{rang} = 2g}.$$

$$\underset{\text{homéo}}{M_g \simeq M_h} \Rightarrow \pi_1(M_g) \simeq \pi_1(M_h)$$
$$\Downarrow$$
$$H_1(M_g, \mathbb{Z}) \simeq H_1(M_h, \mathbb{Z})$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{2g = 2h} \text{ i.e. } g = h.$$

Résumé : on a défini le genre topologique d'une surface de Riemann compacte.



a_1' b_1' a_2' b_2' définissent des classes dans $H_1(\Gamma_{g,1}, \mathbb{Z})$, qui forment une base de cet espace.

Mercredi = caractéristique d'Euler-Poincaré et la formule de Riemann-Hurwitz

Exercices :

dans $U \cap V$ $\quad u \leq u(x) + \varepsilon \leq M + \varepsilon$

donc dans $V \quad v = M + \varepsilon$

///

$$v_\varepsilon = \max\{u, m+\varepsilon\} \underset{\varepsilon \to 0}{\downarrow} \max\{u, m\}$$

sous-harmoniques dans X.

$d = \partial + \bar{\partial} \qquad d \circ d = (\partial + \bar{\partial}) \circ (\partial + \bar{\partial})$

On calcule

$$\frac{\partial}{\partial z}(g_1 \circ \Phi) = \frac{\partial g_1}{\partial z} \circ \Phi \times \Phi'$$

g_1 harmonique.

(φ est holomorphe)

$$\frac{\frac{\partial}{\partial z}(g_1 \circ \varphi)}{\frac{\partial}{\partial z}(g_2 \circ \varphi)} = \frac{\frac{\partial g_1}{\partial z} \circ \varphi}{\frac{\partial g_2}{\partial z} \circ \varphi} \times \cancel{\frac{\varphi'(z)}{\varphi'(z)}}$$

$$= \frac{\partial g_1 / \partial z}{\partial g_2 / \partial z} \circ \Phi$$

$\Rightarrow \quad f_\varphi = f_\psi$ sur $U \cap V$.

(si bien défini !)

lemme g_1 est harmonique

$\frac{\partial}{\partial z} g_1$ est holomorphe. $\Rightarrow f_\varphi$ est méromorphe.

- $\Delta g_1 = 0 = \frac{1}{4}(i \partial \bar{\partial} g_1)$

$$\Rightarrow \bar{\partial} \partial g_1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial g_1}{\partial z} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g_1}{\partial z} \text{ est holomorphe.}$$

- $g_1 = \mathrm{Re}(h)$ h holomorphe localement

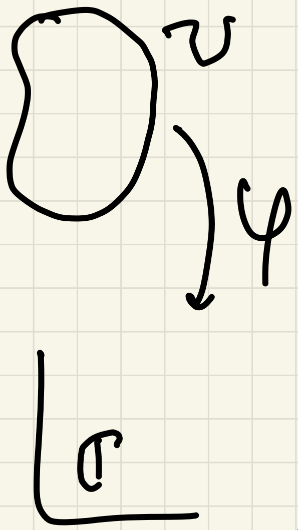
$= \frac{1}{2}(h + \bar{h})$ $\quad \frac{\partial g_1}{\partial z} = \frac{1}{2} h' + 0$

S surface de type (H)

$p \neq q$ $\quad g_p, g_q$ fonctions de Green

avec pôles en p et q.

$$f\big|_U = \frac{\partial_z (g_p \circ \varphi)}{\partial_z (g_q \circ \varphi)} \circ \varphi^{-1}$$



- ça ne dépend pas de la carte !
- pôle et zéro de f ?

au voisinage de $p = \{z = 0\}$

$g_p = -\mathrm{Log}|z| + h_1(z) \leftarrow$ harmonique

$g_q =$ harmonique en z.

$$f(z) = \frac{\frac{\partial}{\partial z}\left(-\operatorname{Log}|z| + h_1(z)\right)}{\frac{\partial}{\partial z}\left(g_f(z)\right)}$$

$$-\operatorname{Log}|z| \text{ "=" } -\frac{1}{2}\left(\operatorname{Log} z + \operatorname{Log} \bar{z}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(-\operatorname{Log}|z|\right) = -\frac{1}{2z}$$

$g_f(z) > 0$ $\qquad$ $g_f(z) = -\operatorname{Log}|\tilde{h}|$

$\tilde{h}$ non nulle

$$\frac{\partial}{\partial z} g_f(z) = -\frac{1}{2\tilde{h}} \neq 0.$$

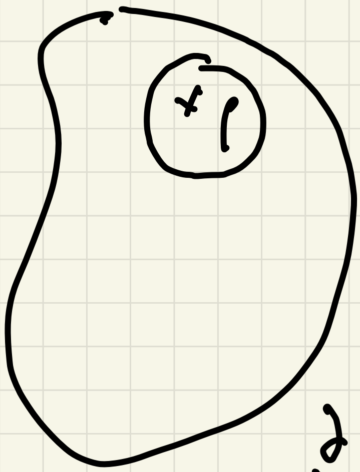
$$f(z) = \left(-\frac{1}{2z} + \text{fct hol.}\right) \Big/ \left(-\frac{1}{2\tilde{h}}\right)$$

$\rightsquigarrow$ méro avec un pôle en 0 simple.

$$f = \frac{\partial_z g_p}{\partial_z g_q}$$ pôle simple en p, zéro simple en q.

$\boxed{f \text{ est méromorphe}}$.

S non de type (H)



u_p : harmonique $S - \{p\}$

$u_p = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) + \text{harmonique}$

z carte hol. centrée en p.

$$\frac{\partial}{\partial z} u_p = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar z}\right)\right) + \text{hol.}$$

$$= -\frac{1}{2z^2} + \text{holomorphe}.$$

$$f = \frac{\partial_z u_p}{\partial_z u_q}$$

$\partial_z u_q$ = fonction hol.

si pas nulle en p → OK!

si nulle en p → on ajoute 1.

au voisinage de p

$$= \frac{\left(-\frac{1}{2z^2} + \text{hol.}\right)}{\text{hol. non nulle au voisinage de } p} \rightarrow \boxed{\text{pôle d'ordre 2 en } p.}$$

$\Rightarrow \exists\, f : S \rightarrow \mathbb{C}$ méromorphe avec un pôle d'ordre 2 en p et un zéro d'ordre 2 en q.

⚠ f a certainement d'autres zéros et d'autres pôles