Cours 10

30 - 11 - 22

Rappel : S une surface de Riemann connexe est de type (H) si il existe $u : S \to [-\infty, +\infty[$ sous-harmonique négative, et non constante.

On a démontré que S est de type (H) et simplement connexe alors $S \underset{\text{bihol.}}{\simeq} \mathbb{H}$.

But : S est simplement connexe, mais n'est pas de type (H) alors $S \simeq \hat{\mathbb{C}}$ ou $\simeq \mathbb{C}$

ex. aucune surface de R. compacte est de type (H) par le principe du maximum.

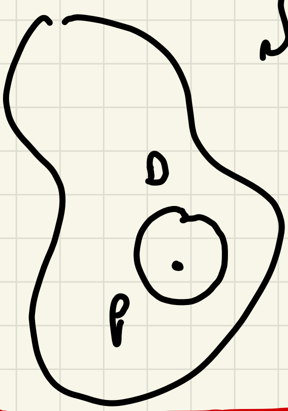
II.4 Existence de fonctions harmoniques et théorème d'uniformisation

(cas des surfaces non de type (H))

Thm A S' surface de R. qui n'est pas de type (H), $D \subseteq S'$ ouvert connexe à bord lisse, $p \in D$, $f : D - \{p\} \to \mathbb{C}$ holomorphe.

Alors il existe u harmonique sur $S' - \{p\}$, bornée hors de tout voisinage de p, $u - \mathrm{Re}(f)$ est harmonique dans D, nulle en p

S'



quelques remarques :

si f est holomorphe dans D, on peut prendre $u = \mathrm{Re}\, f(p)$.

intérêt de l'énoncé = uniquement lorsque f a un pôle en p.

unicité de la fonction u :

u, v harmoniques dans $S - \{p\}$, bornées $S - D$

$u - \mathrm{Re}(f)\big|_D$, $v - \mathrm{Re}(f)\big|_D$ harmoniques et nulles en p ;

Alors $u - v$ harmonique sur S, nulle en p, bornée sur S,

Thm S surface de Riemann simplement connexe qui n'est pas de type (H).
Alors S est bihol. à $\mathbb{C}$ ou à $\hat{\mathbb{C}}$

But : construire une fonction holomorphe $f : S \to \hat{\mathbb{C}}$ injective.

- soit f est surjective, $f : S \to \hat{\mathbb{C}}$ hol. bijective, donc f biholomorphisme.
- sinon $f(S) \subseteq \hat{\mathbb{C}} - \{\infty\} = \mathbb{C}$
  f bihol. de S au $\underset{\text{ouvert}}{f(S) \subseteq \mathbb{C}}$.

  $\Rightarrow S \simeq \mathbb{D}$ ou à $\mathbb{C}$.

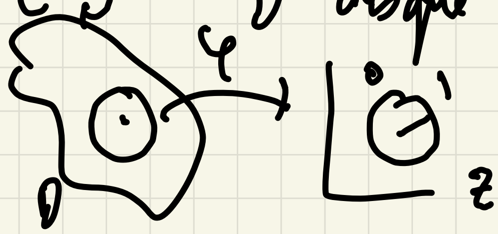
  S non de type (H) $\Rightarrow S \simeq \mathbb{C}$.

Terminologie une fonction **admissible** en p si

- $f : S - \{p\} \to \mathbb{C}$ holomorphe
- méromorphe en p avec un pôle simple
- f est bornée sur $S \setminus U$ pour tout voisinage $U \ni p$.

Lemme 1 : il existe une fonction admissible en p. Si f_1, f_2 sont deux fonctions admissibles en p, $f_1 = a f_2 + b$ $\quad a \neq 0$, $b \in \mathbb{C}$.

$p \in S$ $\quad D$ disque conforme centré en p



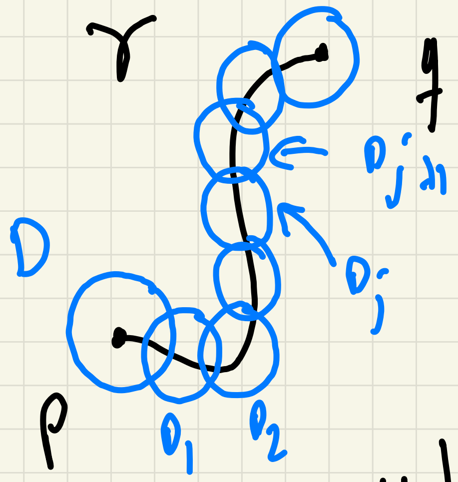
$\varphi(p) = 0$.

thm A $\Rightarrow$ $\exists\, u : S - \{p\} \to \mathbb{R}$

harmonique, bornée sur $S - D$,

$u - \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)$ est harmonique sur D.

il existe f méromorphe sur S avec un pôle simple en p tq $u = \mathrm{Re}(f)$.



$u - \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \mathrm{Re}(g_D)$

hol^{e}.

$f_D = \frac{1}{z} + g_D$

$u|_{D_j} = \mathrm{Re}(g_j)$ hol.

$D_j \cap D_{j+1} \neq \emptyset \Rightarrow \mathrm{Re}(g_{D_j} - g_{D_{j+1}}) \equiv 0$

donc $g_{D_j} - g_{D_{j+1}} = i\alpha_j \quad \alpha_j \in \mathbb{R}$

+ $D_j \cap D_{j+1}$ est connexe.

$\rightsquigarrow \quad f_{D_1} = g_{D_1} - i\alpha_1$

$f_{D_2} = g_{D_2} - i\alpha_1 - i\alpha_2 \quad \ldots$

$\Rightarrow \exists\, f_\gamma$ méromorphe dans un voisinage de γ, $\mathrm{Re}(f_\gamma) = u$, $f_\gamma|_D = f_D$.

Comme $\mathcal{S}$ est simplement connexe, il existe f méromorphe sur $\mathcal{S}$ telle que

$f|_{\text{voisinage}(\gamma)} = f_\gamma$.

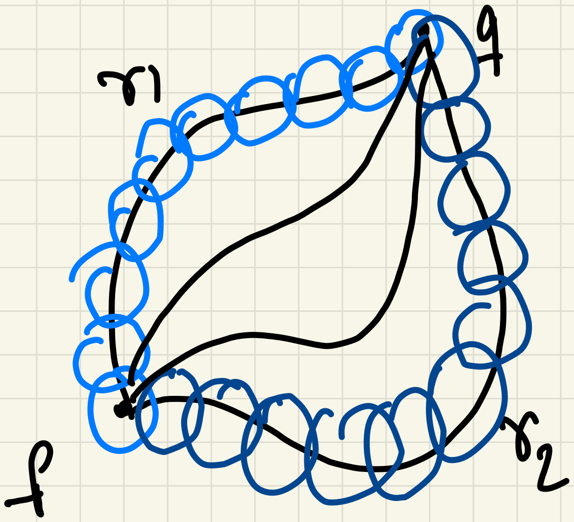
$u - v - \varepsilon\, \underset{S'}{\varphi}\, (u-v)$ harmonique (donc sous harmonique)

< 0

donc constant (car S' n'est pas de type (H)) $\Rightarrow u = v$ ///

dénomination = technique, donnée au prochain cours, utilisation de formes différentielles.

thm A $\Rightarrow$ thm d'uniformisation.



par le principe de continuation analytique, si γ_1 et γ_2 deux chemins joignant p à q et homotopes alors $f_{\gamma_1} = f_{\gamma_2}$ au voisinage de q ///

Il reste à démontrer que f est bornée sur $S^1 - D$.

$u = \mathrm{Re}(f)$

bornée

Pour cela, on construit $\tilde{f}$ méromorphe, pôle simple en p.

$u = \mathrm{Re}(f) \qquad f(z) = \frac{1}{z} + O(1)$

Thm A $\Rightarrow$ $\tilde{u} = \mathrm{Re}\left(\frac{i}{z}\right) +$ harm. bornée $S - D$

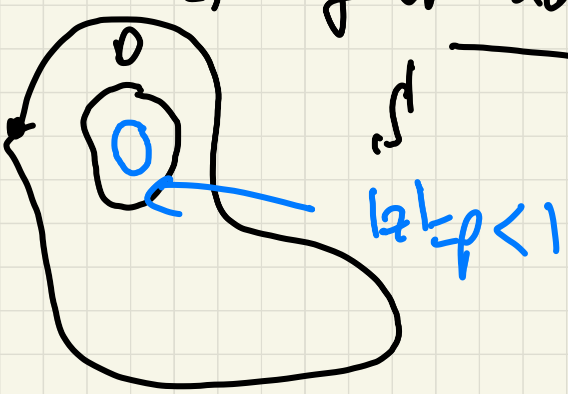
$\Rightarrow$ $\tilde{f}$ hol. sur $S - \{p\}$

$$\tilde{f}(z) = \frac{i}{z} + O(1).$$

On va démontrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Re}(\tilde{f})$.

alors $\mathrm{Im}(f)$ est bornée sur $S - D$.

$\Rightarrow$ f est admissible.



$$m = \sup_{|z| \geq \rho} \max\{u, \tilde{u}\} < +\infty$$

proche de D $\quad f = \frac{1}{z} + \dots \quad \tilde{f} = \frac{i}{z} + \dots$

$z = x + iy \quad u(x,y) = \mathrm{Re}(f) = \frac{x}{x^2+y^2} + O(1)$

$\tilde{u}(x,y) = \mathrm{Re}(\tilde{f}) = \frac{y}{x^2+y^2} + O(1)$

on peut choisir $z_0 \sim f$ telle que

$u(z_0) \geq 2m \quad \tilde{u}(z_0) \geq 2m$

quitte à réduire D, on peut supposer que f (et $\tilde{f}$) sont injectives sur D.

On regarde $g = \frac{1}{f - f(z_0)} \quad \tilde{g} = \frac{1}{\tilde{f} - \tilde{f}(z_0)}$

hol $- S - \{z_0\}$, pôle simple en z_0, bornée sur $S - D$.

on peut trouver $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tq

$\alpha g + \beta \tilde{g}$ holomorphe sur S^1.

et bornée $\Rightarrow \alpha g + \beta \tilde{g}$ est

constant car S^1 n'est pas de

type (H)

$\Rightarrow \tilde{f} = \alpha' f + \beta'$

développement en $f \Rightarrow \alpha' = i$

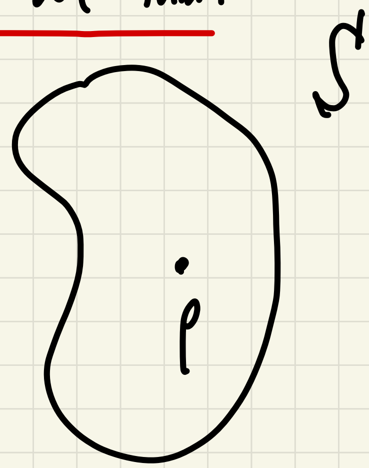
$\tilde{f} = i f +$ constante

$\tilde{u} = \mathrm{Re}(\tilde{f}) = \mathrm{Im}(f) +$ constante

↑ bornée.

///

fin de la démonstration du thm d'uniformisation.



f admissible en p.

$$f(z) = \frac{1}{z} + \cdots$$

$$\Sigma = \{ q \in S,\ \text{toute fonction admissible avec un pôle } q \text{ est de la forme } M \circ f \text{ avec } A \in PGL(2,\mathbb{C}) \}.$$

- lemme 1 $\Rightarrow$ si $\tilde{f}$ admissible pôle en p, alors $\tilde{f} = af + b$ $\Rightarrow p \in \Sigma \neq \emptyset$
- $q_0 \in \Sigma$ $\quad g$ admissible en q_0

$(\times)$ D'_{q_0} $\quad g|_{D'}$ injective (pôle simple en q_0)

$g \in D'' \subset\subset D'$ $\qquad |g(q)| \geq 2 \sup_{\partial - D'} |g|$

$\forall q \in D''$ $\qquad \dfrac{1}{g - g(q)}$ est admissible

avec un pôle en q !

$\Rightarrow \Sigma \supseteq D''$ donc Σ est ouvert.

. Σ est fermé (exercice)

$\Rightarrow \Sigma = S'$.

. f admissible en p (fixé).

$f(q) = f(q')$ $\qquad q, q' \neq p$ (unique pôle de f)

f_q admissible en q $\qquad f_q = M \circ f$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad M \in PGL_2(\mathbb{C})$

Pôle de f_q $= \{q\}$ définition des fonctions admissibles

$\shortparallel$

$M \circ f$

Pôle de $f_q = \{ \hat{q} \in S \quad f(\hat{q}) = M^{-1}(\infty) \}$

$$f(q) = M^{-1}(\infty)$$

$\shortparallel$

$f(q')$ $\Rightarrow$ q' pôle de f_q

$\Rightarrow$ $q' = q$ ///

Résumé (preuve thm uniformisation)

sous-harmonique $\xrightarrow{\text{Dirichlet}}$ harmonique

$\Big\{$ principe continuation analytique

holomorphe

Remarque :

$$\boxed{\begin{array}{l}\textbf{Thm}\quad S \text{ surface de Riemann } H_1(S,\mathbb{R})=\{0\} \\ \text{Alors } S \simeq \hat{\mathbb{C}},\ \mathbb{C},\ \mathbb{H}.\end{array}}$$

idée : thm uniformisation

$\hat{S}$ = revêtement universel

$\hat{S} = \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow S = \hat{\mathbb{C}}$

$\hat{S} = \mathbb{C} \longrightarrow S = \mathbb{C},\ \mathbb{C}^\times,\ \mathbb{C}/\mathbb{Z}$

$H_1(\mathbb{C}^\times) = \mathbb{Z}$ $\quad H_1(\mathbb{C}/\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^2$

$\hat{S} = \mathbb{H}$

$H_1(S,\mathbb{R}) = H_1(S,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$

$H_1(S,\mathbb{Z})$ = Abélianisé de $\pi_1(S,x)$

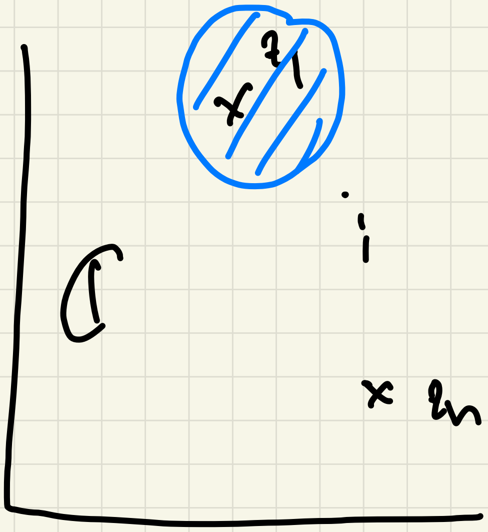
$H_1(S, \mathbb{Z})$ torsion

$\downarrow$

[pas possible. car $\pi_1(S)$ agit sans point fixe, proprement discontinûment sur $\mathbb{H}$.]

(autre démonstration directe qui suit notre démonstration par les fonctions de Green) ///

Exercices :



$F = \{z_1, \dots, z_n\}$

$u : \mathbb{C} - F \to \mathbb{R}_- \cup \{-\infty\}$

sous-harmonique

$\Downarrow$ exercice 15

$u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_- \cup \{-\infty\}$

sous-harmonique

localement

$$u = \lim \uparrow u + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k} \log|z - z_i|$$

exo 15

$u : \hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}_- \cup \{-\infty\}$

sous-harmonique.

$S^1 - \{p\}$ type de (H)

$u : S - \{p\} \longrightarrow \mathbb{R}_- \cup \{-\infty\}$

non constante, sous-harmonique,

$\Rightarrow$ u s'étend sous harmonique.

exercice 15

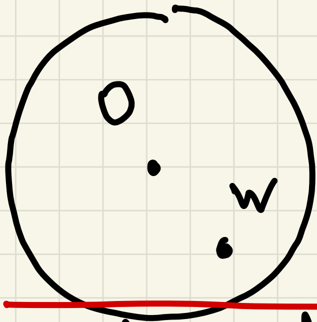
si $u(p) = 0 \Rightarrow u \equiv$ constante.

principe du max

$\Omega \subseteq D(0, R)$

$u = \mathrm{Re}(z) - R$ harmonique

< 0, non constant.



$\mathbb{D}$

$$g_{\mathbb{D},0}(z) = -\log|z|$$

- harm. dans $\mathbb{D}-\{0\}$
- $-\log|z|$ + harm. en 0
- >0
- minimale pour ces conditions

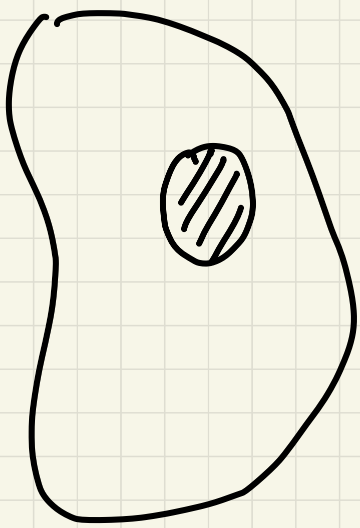
$g+\log|z|$ harmonique ≥ 0 sur $\partial\mathbb{D}$

$\Rightarrow$ $g+\log|z| \geq 0$ dans $\mathbb{D}$

$$g_{\mathbb{D},w}(z) = -\log\left|\frac{z-w}{1-\bar{w}z}\right|$$

$\underset{p}{S} \xrightarrow{\varphi} S'$ $\quad\varphi$ biholo. $\qquad g_p = g_{\varphi(p)}\circ\varphi$

D disque conforme $\subset X$



X

$h : \partial D \to [-2,-1]$ C^0

$u = \sup \{ v$ sous-harmonique $X - D$

$\operatorname{supp} v \subset\subset X$, $v \leq h|_{\partial D}$,

$\sup_{X \setminus D} v \leq \sup_{X \setminus D} h \}$.

u | harmonique dans $X - \overline{D}$
| continue sur $X - D$

$$\sup_{X \setminus D} u \leq \sup_{X \setminus D} h \leq -1 < 0$$

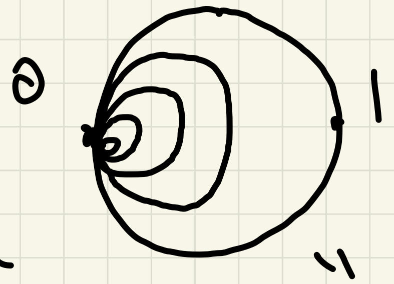
où u est constante alors h est constante!

remarque si X est de type (H)

$\exists\, \omega : X \setminus D \to \,]0,1]$ $\mathcal{C}^0$

- $\omega|_{\partial D} \equiv 1$
- ω harmonique dans $X \setminus \bar{D}$
- ω non constante

Exercice 3 S surface de Riemann (connexe) quelconque $\Rightarrow$ $\pi_1(S, *)$ dénombrable.

rappel $\pi_1\Bigg($ 

$\Bigg)$ $C(1/2, 1/2)$

non dénombrable $\quad \bigcup_{n>0} C(1/n, 1/n)$

thm uniformisation $\Rightarrow$

$$\hat{S} \longrightarrow S$$

$$\overset{\shortparallel}{\hat{\mathbb{C}}}, \mathbb{C}, \mathbb{H}. \quad \text{où } \hat{S} \simeq \mathbb{H}$$

$\pi_1(\hat{S}, *) \simeq$ sous groupe de $PGL(2,\mathbb{R})$

qui agit proprement discontinûment $= \Gamma$

$\Rightarrow \Gamma$ est discret dans $PGL(2,\mathbb{R})$ (exercice).

$$\overset{\shortparallel}{SL(2,\mathbb{R}) / \{\pm id\}}$$

Γ discret dans $PGL(2,\mathbb{R})$

Σ base d'ouverts dénombrable

$\Rightarrow \Gamma$ dénombrable.

$\Rightarrow$ S est à base, dénombrable d'ouverts.

$\hat{S} \simeq \hat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ facile

$\hat{S} \simeq \mathbb{H}$.

$$\mathbb{H} \xrightarrow{\pi} S \simeq \mathbb{H} / G$$

à base dénombrable. dénombrable

π est ouverte (car π est un revêtement)

π (base d'ouverts de $\mathbb{H}$)

= base d'ouverts pour S.

on a démontré qu'une surface de Riemann possède une base dénombrable d'ouverts (métrisable)

il existe des variétés $\mathbb{R}$ non métrisables (de toute dimension), variétés $\mathbb{C}$ non métrisables (de dimension ≥ 2).