Surfaces K3, I

Défn : X K3 surface compacte complexe telle que

$$K_X \simeq \mathcal{O}_X \qquad b_1(X) = 0.$$

Remarque : K3 $\Rightarrow$ X kählerienne

(en général . X surface compacte.

X kählerienne $\Leftrightarrow$ b_1 pair)

Exemple : $X \subset \mathbb{P}^3$ quartique. $\overset{\text{adjonction}}{\Rightarrow}$ $K_X \simeq \mathcal{O}_X$

Thm de Lefschetz : $\pi_1(X) \xrightarrow{\simeq} \pi_1(\mathbb{P}^3) = \{1\}$

$\Rightarrow b_1(X) = 0.$

plus général^t intersections complètes de type $(d_1, \dots, d_{n-2}) \subset \mathbb{P}^n$

telle que $\sum_{i=1}^{n-2} d_i = n+1.$

Remarque : on verra que toutes les K3 sont difféomorphes

donc toutes simplement connexes.

Quelques invariants des surfaces K3 :

$$\left.\begin{array}{l} K_X \simeq \mathcal{O}_X \Rightarrow \underline{p_g = 1} \\ b_1 = 0 \overset{\text{Kähler}}{\Longrightarrow} \underline{q = 0} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\chi(\mathcal{O}_X) = 2}.$$

$$\overset{\text{Noether}}{\Longrightarrow} \quad 2 = \chi(\mathcal{O}_X) = \frac{1}{12}\left(K_X^2 + c_2(X)\right) \quad \Rightarrow \underline{c_2(X) = 24}.$$

Puisque $c_2(X) = e(X)$ on a $\cancel{e(X) =}\ 24 = e(X) = 2 - 2b_1 + b_2$

donc $b_2 = 22$.

D'où le diamond de Hodge

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 0 & & 0 & \\ 1 & & 20 & & 1 \\ & 0 & & 0 & \\ & & 1 & & \end{array}$$

En plus puisque $T_X \simeq K_X^* \otimes \Omega_X \cong \Omega_X$ on a

$$h^0(T_X) = 0, \quad \underbrace{h^1(T_X) = 20}_{\text{déformations de premier ordre}}, \quad \underbrace{h^2(T_X) = 0}_{\text{obstructions à relever aux voisinages infinitésimaux}}.$$

Défn. Soit X une variété cplxe compacte lisse, S ~~une~~ espace complexe connexe avec point marqué $0 \in S$. Une déformation de X sur $(S,0)$ est un morphisme $\mathcal{X} \to S$ surjectif lisse et un isomorphisme $\varphi : X_0 \xrightarrow{\simeq} X$.

Deux déformations $(\mathcal{X} \to S, \varphi)$ et $(\mathcal{X}' \to S, \varphi')$ sont isomorphes si on a

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[rr, "\psi", "\simeq"'] \arrow[dr] & & \mathcal{X}' \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

telle que $\varphi = \varphi' \circ \psi|_{X_0} : X_0 \to X$

(on rajoute φ pour rigidifier l'objet)

Déformations sur une base artinienne

$\pi : X_1 \to \Delta_1 = \mathrm{Spec}\, {}^{k[t]}/_{(t^2)}$ $\qquad$ π propre, lisse $\quad X_0 \cong X$

$$0 \to \pi^*\Omega_{\Delta_1} \to \Omega_{X_1} \to \Omega_{X_1/\Delta_1} \to 0 \qquad \text{diff de Kähler}$$

est exacte puisque π lisse

$$0 \to \underset{\underset{\mathcal{O}_{X_0}}{\wr\wr}}{\pi^*\Omega_{\Delta_1}|_{X_0}} \to \Omega_{X_1}|_{X_0} \to \underset{\underset{\Omega_X}{\wr\wr}}{\Omega_{X_0}} \to 0 \qquad (*)$$

$\Rightarrow e \in H^1(X, T_X)$ unique class correspondant à $(*)$

Vice versa étant donné e est donc une unique extension

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{F} \xrightarrow{r} \Omega_X \to 0$$

on construit une structure schématique sur X :

on $d : \mathcal{O}_X \to \Omega_X$

$r : \mathcal{F} \to \Omega_X$

$$\mathcal{O}_{X_1} := \{ (\alpha, f) \in \mathcal{F} \oplus \mathcal{O}_X,\ r(\alpha) = df \}$$

avec structure d'algèbre

$$(\alpha, f) \cdot (\beta, g) = (\alpha g + \beta f, fg)$$

on a que $\begin{array}{c}\mathcal{O}_{X_1} \to \mathcal{O}_X \\ (\alpha, f) \mapsto f\end{array}$ est de noyau $\simeq \ker(r : \mathcal{F} \to \Omega_X) \simeq \mathcal{O}_X$

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{X_1} \to \mathcal{O}_X \to 0 \quad \text{et} \quad \ker^2 = 0. \Rightarrow \text{donne morphisme } \mathcal{O}_{\Delta_1} \to \mathcal{O}_{X_1}$$

Thm : les déformations de X sur Δ_1 sont en bijection avec $H^1(X, T_X)$.

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{\pi} & \Delta_n \\ \uparrow & & \downarrow \\ X_{n+1} & \dashrightarrow & \Delta_{n+1} \end{array}$$

Thm : l'obstruction d'étendre une déformation sur Δ_n à Δ_{n+1} vit dans $H^2(X, T_X)$.

Une déformation $(\mathcal{X} \to (S,0), \varphi)$ est localement complète si pour tout

$$(\mathcal{X}' \to (S',0), \varphi')$$

il existe localement $f : (S,0) \to (S',0)$

$$\mathcal{X}' = \mathcal{X} \times_S S' \qquad \varphi' = \text{pull-back de } \varphi.$$

la famille est localement universelle, si f est unique.

Thm (Kuranishi)

Si X une variété complexe lisse telle que $H^0(X, T_X) = 0$

Alors X a une déformation universelle.

Si $H^2(X, T_X) = 0$ alors la base de la déf^n universelle est lisse

de dimension $h^1(X, T_X)$.

Une surface K3 vérifie toutes les hypothèses.

En plus une petite déformation d'une K3 est K3 :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & X_0 \text{ K3} & \overset{\text{semi-cont.}}{\Longrightarrow} & q(X_t) = 0 \quad \forall t \in \Delta \\ \downarrow \varphi & & & \\ \Delta & & \overset{\text{platitude}}{\Longrightarrow} & p_g(X_t) = 1 \quad \forall t \in \Delta \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \| \\ \chi(X_t) - 1 \end{array}$$

$\Rightarrow$ $\underbrace{\varphi^* \varphi_* K_{\mathcal{X}/\Delta}}_{\text{fibré en droites}} \to K_{\mathcal{X}/\Delta}$ est surjective sur X_0

$\Rightarrow$ surjective dans un voisinage de X_0.

$$\begin{array}{ccc} \varphi^* \varphi_* K_{\mathcal{X}/\Delta}|_{X_t} & \twoheadrightarrow & K_{\mathcal{X}/\Delta}|_{X_t} \\ \wr\| & & \wr\| \\ \mathcal{O}_{X_t} & & K_{X_t} \end{array} \quad \Rightarrow K_{X_t} \simeq \mathcal{O}_{X_t}$$

Kuranishi

$\Rightarrow$ Si $\mathcal{X} \to S$ est la déformation universelle de X, alors

dans un petit voisinage de 0, c'est la déformation universelle de X_t.

Surfaces de Kummer

$T = \mathbb{C}^2/\Lambda$ tore complexe $\qquad \{x \in T \mid x$ 2-torsion$\} = \frac{1}{2}\Lambda/\Lambda = \Lambda/2\Lambda \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$

espace vectoriel de dim 4 sur $\mathbb{F}_2$

$i : T \to T$, $x \mapsto -x$ a exactement 16 points fixes

$x = -x \iff 2x = 0$

loc^t l'action de i est donné par $(z_1, z_2) \mapsto (-z_1, -z_2)$

$\Rightarrow$ $T/\langle 1, i\rangle$ a exactement 16 pts double ordinaire

$X := Bl_{p_1 \ldots p_{16}} T/\langle 1, i\rangle$, $\quad \tilde{T} = Bl_{x_1 \ldots x_{16}} T$

X = Km T

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{T} \arrow[dl, "g"'] \arrow[r, "f"] & T \arrow[d] \\
\tilde{T}/\langle 1, \tilde{i}\rangle \arrow[r, dashed, "\simeq"] \arrow[rr, bend right, "\text{birationelle}"'] & X \arrow[r] & T/\langle 1, i\rangle
\end{tikzcd}$$

propr. univ de l'éclatement

lisse

$\tilde{i}$ laisse inv. les E_i

puisque $H^1(\tilde{T}, \mathbb{Q}) = f^* H^1(T, \mathbb{Q})$

et $H^1(T, \mathbb{Q})^{i\text{-inv}} = 0$.

$\Rightarrow H^1(X, \mathbb{Q}) = 0$.

analogue $H^0(X, \Omega_X) = \mathbb{C}$

en plus

$K_{\tilde{T}} = f^* K_T + \sum E_i = \sum E_i$

formule de ramification

$g^* K_X + \underbrace{\sum E_i}$

ramification de multiplicité 2 le long des -2-courbes.

$\Rightarrow g^* K_X = \mathcal{O}_X$. $\overset{\text{KCR}}{\Rightarrow} K_X$ torsion $\Rightarrow K_X \simeq \mathcal{O}_X$.

num. triv.

$+ \exists$ section

NB: Notons $a(X) = \deg \mathrm{tr}\ \mathbb{C}(X)$

la dimension algébrique.

Alors $a(X) = a(T) \in \{0, 1, 2\}$

Prop : Soit X surface K3 qui contient 16 (-2)-courbes disjointes C_i tq $\mathcal{O}_X(\sum C_i) \simeq L^{\otimes 2}$ dans Pic X

Alors X Kummer et les 16 courbes proviennent de cette structure.

Dém :

$$\begin{array}{c} Z \\ \downarrow g \\ X \end{array}$$

revt ramifié de degré 2 donné par $\mathcal{O}_X(\sum C_i)$

$\chi(\mathcal{O}_Z) = \chi(g_* \mathcal{O}_Z) = \chi(\mathcal{O}_X \oplus L^{-1}) \overset{RR}{=} 2\chi(\mathcal{O}_X) + \frac{1}{2} L^2 \qquad L^2 = -8$

$\overset{\text{Noether}}{\Rightarrow} e(Z) = 2e(X) - \cancel{32} = 16$

$e(X) = 24$

$\Rightarrow K_Z = \sum D_i \quad D_i = g^{-1}(C_i) \simeq \mathbb{P}^1 \quad D_i^2 = \frac{1}{2} g^* C_i \cdot D_i = \frac{1}{2} C_i \cdot g_* D_i = \frac{1}{2} C_i^2 = -1. \Rightarrow C_i$ (-1)-courbes

(6)

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f", "\text{contraction de } C_1 \dots C_{16}"'] \arrow[d, "g"'] & Y \\ X & \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow K_Z = \pi^* K_Y + \sum C_i \Rightarrow K_Y \cong \mathcal{O}_Y$
$\overset{\shortparallel}{\sum C_i}$

$e(Y) = e(Z) - 16 = 0.$
class.
$\Rightarrow Y$ tore.

L'involution $\tilde{\imath}$ donné par g descend sur Y.
et donne une involution i.

Puisque $H^1(Y, \mathbb{Q})^{i\text{-inv}} \simeq H^1(X, \mathbb{Q}) = 0$

$\Rightarrow i$ agit comme $-id$ sur $H^1(Y, \mathbb{Q})$

Comme $Y = H^{0,1}(Y)/\Lambda$ i agit comme $-id$. $\square$