

Mémoire présenté à l'Université Paris-Diderot
pour l'obtention de l'habilitation à diriger des recherches

Spécialité : mathématiques

**Stabilité, limites singulières et conditions de contrôle
géométrique en théorie cinétique**

par

Daniel Han-Kwan

Soutenu publiquement le 15 septembre 2017, après avis de

Jean-Michel Coron	Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie
David Gérard-Varet	Professeur à l'Université Paris-Diderot
Pierre-Emmanuel Jabin	Professeur à University of Maryland

devant le jury composé de

Yann Brenier	Directeur de recherche au CNRS
Jean-Michel Coron	Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie
David Gérard-Varet	Professeur à l'Université Paris-Diderot
François Golse	Professeur à l'École polytechnique
Clément Mouhot	Professeur à University of Cambridge
Laure Saint-Raymond	Professeur à l'ENS Lyon

**STABILITÉ, LIMITES SINGULIÈRES ET CONDITIONS DE
CONTRÔLE GÉOMÉTRIQUE EN THÉORIE CINÉTIQUE**

Daniel Han-Kwan

REMERCIEMENTS

Mes premiers remerciements vont à Jean-Michel Coron, David Gérard-Varet et Pierre-Emmanuel Jabin pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'accepter la tâche, que j'imagine chronophage, de rapporteur de ce mémoire. Je suis très touché par l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux.

Je suis également reconnaissant à l'égard de Yann Brenier, François Golse, Clément Mouhot et Laure Saint-Raymond, pour leur participation au jury de soutenance.

Je ressens un sentiment tout à fait particulier d'avoir pu réunir un tel jury, car je sais l'importance que chacun, à sa manière, a eu dans mon début de carrière ; et je n'ai nul doute que leurs travaux, ainsi que nos discussions futures (que j'espère nombreuses) continueront à être des sources intarissables d'inspiration.

Il va de soi que les travaux présentés dans ce mémoire doivent beaucoup à mes incroyables co-auteurs, Thomas Alazard, Pietro Baldi, David Gérard-Varet, Olivier Glass, Maxime Hauray, Mikaela Iacobelli, Matthieu Léautaud, Ayman Moussa, Toan Nguyen et Frédéric Rousset : qu'ils en soient ici remerciés, pour tout ce qu'ils m'ont appris et pour tous ces moments de galère... mais aussi de joie, que nous avons partagés ! J'aimerais en particulier exprimer à Thomas ma gratitude pour ses encouragements et conseils lors de l'année précédant mon entrée au CNRS.

J'ai pu profiter tout d'abord au DMA à l'ENS, puis ces quatre dernières années au CMLS à l'X, de conditions de travail exceptionnelles, en grande partie grâce à l'efficacité sans faille de Bénédicte Auffray, Zaina Elmir et Laurence Vincent (à l'ENS) et de Marine Amier, Pascale Fuseau et Carole Juppin (à l'X). Je souhaiterais témoigner ma reconnaissance aux directeurs de laboratoire que j'ai côtoyés, Olivier Debarre, Yvan Martel et Charles Favre. Je voudrais également remercier tous les collègues actuels et passés pour l'excellente ambiance (à la fois conviviale et stimulante) qui a régné en ces lieux. Je salue en particulier Philippe Gravejat, David Lannes et Fabrice Orgogozo, avec qui j'ai partagé un bureau. J'ai aussi une pensée pour celles et ceux qui ont été (ou sont) dans l'obligation de trouver des réponses à mes questions : Mikaela Iacobelli, Iván Moyano, Isabelle Tristani et Aymeric Baradat.

Plus généralement, je souhaiterais associer à ces remerciements toutes les personnes de la communauté mathématique que je croise occasionnellement et avec qui parler de choses et d'autres est toujours un plaisir.

Enfin, je voudrais remercier ma famille, en particulier Caroline et Alice pour le bonheur qu'elles m'apportent.

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements	3
Liste de travaux de l'auteur	7
Introduction	9
1. La limite quasineutre du système de Vlasov-Poisson	15
2. Corrections à la limite quasineutre : ondes longues et couches limites	35
3. Estimations en temps long dans les limites non-relativiste et de champ moyen	47
4. Conditions de contrôle géométrique pour les équations de Vlasov	57
5. Comportement en temps long pour des équations de Boltzmann linéaires	69
6. Contrôle de l'équation des Water Waves 2D avec tension de surface	79
Bibliographie	89

LISTE DE TRAVAUX DE L'AUTEUR

Les articles sont rangés par ordre anti-chronologique de complétion du manuscrit.

Travaux présentés dans ce mémoire

[141] D. Han-Kwan, T. Nguyen et F. Rousset, Long time estimates in the non-relativistic regime of the Vlasov-Maxwell system, *preprint*.

[102] O. Glass, D. Han-Kwan et A. Moussa, The Vlasov-Navier-Stokes system in a 2D pipe : existence and stability of regular equilibria, *soumis pour publication*.

[139] D. Han-Kwan et T. Nguyen, Instabilities in the mean field limit, *J. Stat. Phys.*, 162(6) :1639-1653, 2016.

[142] D. Han-Kwan et F. Rousset, Quasineutral limit for Vlasov-Poisson with Penrose stable data, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 49(6) :1445-1495, 2016.

[138] D. Han-Kwan et T. Nguyen, Ill-posedness of the hydrostatic Euler and singular Vlasov equations, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 221(3) :1317-1344, 2016.

[140] D. Han-Kwan et T. Nguyen, Nonlinear instability of Vlasov-Maxwell systems in the classical and quasineutral limits, *SIAM J. Math. Anal.*, 48(5) :3444-3466, 2016.

[133] D. Han-Kwan et M. Iacobelli, Quasineutral limit for Vlasov-Poisson via Wasserstein stability estimates in higher dimension, *J. Differential Equations*, 263(1) :1-25, 2017.

[4] T. Alazard, P. Baldi et D. Han-Kwan, Control of water waves, *J. Eur. Math. Soc.*, à paraître.

[132] D. Han-Kwan et M. Iacobelli, The quasineutral limit of the Vlasov-Poisson equation in Wasserstein metric, *Commun. Math. Sci.*, 15(2) :481-509, 2017.

[135] D. Han-Kwan et M. Léautaud, Geometric analysis of the linear Boltzmann equation I. Trend to equilibrium, *Annals of PDE*, 1(1), Article 3, 84 pages, 2015.

[93] D. Gérard-Varet, D. Han-Kwan et F. Rousset, Quasineutral limit of the Euler-Poisson system for ions in a domain with boundaries II, *J. Éc. polytech. Math.*, 1 :343-386, 2014.

[131] D. Han-Kwan et M. Hauray, Stability issues in the quasineutral limit of the one-dimensional Vlasov-Poisson equation, *Comm. Math. Phys.*, 334(2) :1101-1152, 2015.

[100] O. Glass et D. Han-Kwan, On the controllability of the relativistic Vlasov-Maxwell system, *J. Math. Pures Appl.*, 103(3) :695-740, 2015.

[129] D. Han-Kwan From Vlasov-Poisson to Korteweg-de Vries and Zakharov-Kuznetsov, *Comm. Math. Phys.*, 324(3) :961-993, 2013.

[92] D. Gérard-Varet, D. Han-Kwan et F. Rousset Quasineutral limit of the Euler-Poisson system for ions in a domain with boundaries, *Indiana Univ. Math. J.*, 62(2) :359-402, 2013.

Autres travaux non présentés dans ce mémoire

- D. Zhelyazov, D. Han-Kwan et J.D.M. Rademacher, Global Stability and Local Bifurcations in a Two-fluid Model for Tokamak Plasma, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 14(2) :730-763, 2015.
- O. Glass et D. Han-Kwan, On the controllability of the Vlasov-Poisson system in the presence of external force fields, *J. Differential Equations*, 252(10) :5453-5491, 2012.*
- D. Han-Kwan, Effect of the polarization drift in a strongly magnetized plasma, *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.*, 46(4) :929-947, 2012.*
- D. Han-Kwan, On the three-dimensional finite Larmor radius approximation : the case of electrons in a fixed background of ions, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 30(6) :1127-1157, 2013.*
- D. Han-Kwan, Quasineutral limit of the Vlasov-Poisson system with massless electrons, *Comm. Partial Differential Equations*, 36(8) :1385-1425, 2011.*
- D. Han-Kwan, L^1 averaging lemma for transport equations with Lipschitz force fields, *Kinet. Relat. Models*, 3(4) :669-683, 2010.*
- D. Han-Kwan, On the confinement of a tokamak plasma, *SIAM J. Math. Anal.*, 42(6) :2337-2367, 2010.*
- D. Han-Kwan, The three-dimensional finite Larmor radius approximation, *Asymptot. Anal.*, 66(1) :9-33, 2010.*

* : Travaux issus de la thèse.

INTRODUCTION

Les travaux présentés dans cet mémoire constituent une synthèse de mes recherches depuis ma soutenance de thèse en juillet 2011.

Ces recherches sont organisées autour des deux thèmes suivants.

- La première partie du texte (Chapitres 1 à 3) est consacrée à l'étude de mécanismes de stabilité ou d'instabilité dans des problèmes de limites singulières pour des équations de type Vlasov.
- La deuxième partie du texte (Chapitres 4 à 6) traite de problèmes reliés à la théorie du contrôle. J'y étudie en particulier des phénomènes de convergence à l'équilibre ainsi que de questions de contrôlabilité, pour des équations cinétiques, qui mettent en jeu des conditions de contrôle géométrique. Le Chapitre 6, occupe une place un peu à part dans ce mémoire, étant consacré à des équations différentielles, du moins en apparence⁽¹⁾. Il concerne la contrôlabilité du système des water waves avec tension de surface en deux dimensions d'espace.

Les problèmes que j'ai étudiés ont pour point commun de concerner des équations aux dérivées partielles (non linéaires, à l'exception de celles étudiées dans le Chapitre 5), issues de la physique des plasmas ou de la mécanique des fluides, et plus particulièrement de la théorie cinétique. J'ai fait en sorte de présenter dans ce mémoire mes résultats que je considère comme les plus significatifs, et la présentation en est volontairement synthétique et peu technique – parfois au détriment d'énoncés tout à fait complets et rigoureux, pour lesquels je renvoie le lecteur aux différents articles cités dans le texte. Il m'a semblé artificiel de faire systématiquement apparaître dans chaque chapitre une section à part présentant des perspectives, aussi ai-je parfois privilégié d'émailler le texte de questions et prolongements possibles qui m'apparaissent naturels.

Je me propose dans la suite de cette introduction de décrire de manière très succincte le contenu de ce mémoire.

*
* *

Chapitres 1 à 3. Les problèmes de perturbation singulière décrits dans ce mémoire ont été abordés en relation avec l'étude de la dynamique en temps long des solutions des équations aux dérivées partielles sous-jacentes.

Dans tous les problèmes considérés, le système de Vlasov-Poisson⁽²⁾ joue un rôle central, soit en étant le système perturbé, soit en étant la limite formelle attendue. On rappelle que ce système constitue un

1. Il se trouve que certaines équations de Vlasov singulières apparaissant naturellement dans le Chapitre 1 et pouvant être dérivées rigoureusement à partir des équations de Vlasov-Poisson, sont en fait, pour certaines classes de données, *équivalentes* au système de Benney. Ce système peut lui-même être dérivé, au moins formellement, à partir du système des water waves (avec vorticité), dans le régime hydrostatique. En quelque sorte, tous les modèles étudiés dans ce mémoire sont donc liés!

2. Il s'agit de la version Coulombienne pour les plasmas (c'est-à-dire avec potentiel répulsif); le système de Vlasov-Poisson gravitationnel ne sera pas considéré dans ce mémoire.

couplage entre l'équation de Vlasov

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + E \cdot \nabla_v f = 0, \quad E = -\nabla_x V$$

et une équation de Poisson, qui, selon le contexte, sera soit,

$$-\Delta_x V = \int_{\mathbb{R}^d} f(\cdot, v) dv - 1$$

si l'équation de Vlasov décrit la dynamique d'une population d'électrons, soit

$$-\Delta_x V = \int_{\mathbb{R}^d} f(\cdot, v) dv - (1 + V),$$

si l'équation de Vlasov décrit la dynamique d'une population d'ions.

Dans ces équations, $f(t, x, v)$ désigne la fonction de distribution des charges électriques à l'instant t dans l'espace des phases, le champ de vecteurs $E(t, x)$ (resp. $V(t, x)$) désigne le champ électrique (resp. le potentiel électrique). Dans ce mémoire on parlera de *système de Vlasov-Poisson pour les électrons* afin de désigner le couplage avec la première équation de Poisson ; il s'agit du système le plus classiquement étudié dans la littérature. Le couplage avec la seconde équation de Poisson portera le nom de *système de Vlasov-Poisson pour les ions*. On fera parfois référence au système de Vlasov-Poisson sans précision supplémentaire, soit parce que le système considéré sera clair selon le contexte, soit pour désigner le plus classique système pour les électrons.

On remarque que les fonctions de distribution de la forme $\mu(v)$ (de pair avec un champ électrique nul) constituent une famille de solutions stationnaires au système de Vlasov-Poisson. On parle en général d'équilibres *homogènes*⁽³⁾. Il existe des critères classiques de stabilité linéaire pour ces équilibres. Ils ont été mis en évidence en 1960 par O. Penrose dans un article pionnier [203] et sont aujourd'hui connus comme les *critères de stabilité de Penrose*. En dimension une d'espace, un des avatars des critères de Penrose s'énonce de la manière suivante :

$$\forall v \in \mathbb{R}, \mu'(v) = 0 \implies \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu'(w)}{v-w} dw < 0. \quad (\star)$$

Si cette condition est vérifiée, Penrose démontre que l'équilibre est linéairement stable. En particulier, cette condition est automatiquement satisfaite pour un équilibre ayant la forme d'une bosse, c'est-à-dire étant croissant puis décroissant sur \mathbb{R} (et sans autre changement de monotonie). Il se trouve que les équilibres à une bosse *symétrique*, qui peuvent être écrits comme des fonctions radiales décroissantes sont également non linéairement instables au sens de Lyapunov, dans des espaces correspondant, *grosso modo* à l'espace d'énergie (voir par exemple [179, 31, 62]). L'hypothèse de symétrie, clairement inutile en ce qui concerne la stabilité linéaire, apparaît comme cruciale dans la preuve des références que nous venons de citer. En effet, qu'ils soient basés sur une approche variationnelle (par exemple [62]) ou sur une méthode de réarrangement symétrique (voir [179]), le point clé dans tous ces résultats non-linéaires réside dans le fait que l'équilibre considéré peut être vu comme le minimiseur d'un certain problème variationnel.

A contrario, lorsque la condition (\star) n'est pas vérifiée, Penrose montre que l'équilibre est linéairement instable, en mettant en évidence l'existence d'une valeur propre instable. Les profils typiquement instables sont ceux présentant deux grandes bosses (ou plus). Guo et Strauss ont ensuite montré dans [122] que cette instabilité spectrale entraînait une instabilité non-linéaire. Aucune hypothèse supplémentaire telle que la symétrie n'est requise.

Les critères de stabilité de Penrose sont récemment revenus sur le devant de la scène avec le tour de force de Mouhot et Villani [189] sur le problème de l'amortissement Landau. Ils ont notamment mis en

3. Il existe par ailleurs des équilibres plus généraux de la forme $\mu(x, v) = \varphi\left(\frac{|v|^2}{2} + \phi(x)\right)$, où ϕ doit vérifier l'équation de Poisson avec $\int \mu(x, v) dv$ en source. Leur stabilité ou instabilité fait l'objet de plusieurs travaux récents (voir notamment [121, 123, 173, 174, 118]), mais n'est pas aussi bien comprise que pour les équilibres homogènes. Ces équilibres sont traditionnellement appelés *ondes BGK* (pour Bernstein, Greene et Kruskal). Je n'en dirai pas plus car les ondes BGK ne joueront pas de rôle dans les limites singulières étudiées dans ce mémoire.

évidence une version *générale et unifiée* des critères de Penrose, valable en toute dimension, s'écrivant , dans le cas de l'équation de Vlasov-Poisson pour les électrons, sous la forme :

$$\inf_{(\gamma, \tau, \eta) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^d} \left| 1 - \int_0^{+\infty} e^{-(\gamma+i\tau)s} \frac{i\eta}{|\eta|^2} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} e^{-is\eta \cdot v} (\nabla_v \mu)(v) dv ds \right| \geq \kappa, \quad (\star\star)$$

pour un certain $\kappa > 0$. On peut en particulier vérifier que les équilibres vérifiant (\star) (et donc ceux à une bosse) vérifient cette condition. Les résultats de [189] (voir aussi les travaux ultérieurs [35] et [34]) montrent en particulier que les équilibres vérifiant $(\star\star)$ (et sans hypothèse de symétrie) sont stables au sens de Lyapunov, dans des espaces de forte régularité, de type Gevrey.

*
* *

Les Chapitres 1, 2 et 3 sont consacrés à plusieurs problèmes de perturbation singulière dans lesquels le système de Vlasov-Poisson joue un rôle central, soit en étant l'équation perturbée, soit en étant la cible formelle attendue. Un soin particulier sera apporté à l'étude des conséquences de phénomènes de stabilité ou d'instabilité à la Penrose sur la validité des limites formelles.

- Le Chapitre 1 porte sur la *limite quasineutre* du système de Vlasov-Poisson ; il s'agit d'un problème fondamental de la physique des plasmas, qui consiste à comprendre le comportement des solutions lorsque la longueur typique d'observation est grande devant la *longueur de Debye*, qui est la longueur caractéristique des interactions électrostatiques. Concrètement l'étude de ce régime revient à considérer une équation de Poisson pénalisée de la forme $-\varepsilon^2 \Delta_x V = \dots$, dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$. De manière un peu provocatrice, cela revient en quelque sorte à chercher à résoudre Vlasov-Poisson sans utiliser l'équation de Poisson. Les limites formelles sont des équations de Vlasov qui constituent des versions cinétiques de systèmes classiques de la mécanique des fluides – Euler incompressible ou Saint-Venant – au sein desquelles une mesure de Dirac remplace le noyau de Green du Laplacien. Contrairement à leurs pendants hydrodynamiques, ce sont des équations singulières, en général mal posées au sens de Hadamard, même si l'on s'autorise un nombre arbitrairement grand de pertes de dérivées. Ce sont les mécanismes de stabilité et d'instabilité à la Penrose qui permettent de déterminer quand les limites formellement attendues sont ou ne sont pas valables.

- Le Chapitre 2 apporte des prolongements au chapitre précédent.

Une première partie, la Section 2.1, traite d'un régime d'*ondes longues* pour le système de Vlasov-Poisson pour les ions. Ce régime peut être vu comme l'approximation à l'ordre suivant par rapport au régime quasineutre. Cela conduit à une dérivation d'équations aux dérivées partielles *dispersives* telles que Korteweg-de Vries (en dimension une) et des équations de Zakharov-Kuznetsov (en dimension supérieure).

La Section 2.2 offre un éclairage sur l'influence des effets de bord dans la limite quasineutre. Cette question est examinée dans le cadre du système d'Euler-Poisson (pour les ions). On constate la présence de couches limites, dont on étudie la *stabilité* afin de justifier l'approximation par un système de type Euler isotherme.

- Dans le Chapitre 3, j'aborde deux problèmes de limites singulières conduisant au système de Vlasov-Poisson. L'étude est menée sur des *échelles de temps longues*, c'est-à-dire tendant vers l'infini lorsque un petit paramètre physique tend vers 0.

La Section 3.1 concerne la dynamique en *temps long* des solutions au système de *Vlasov-Maxwell*

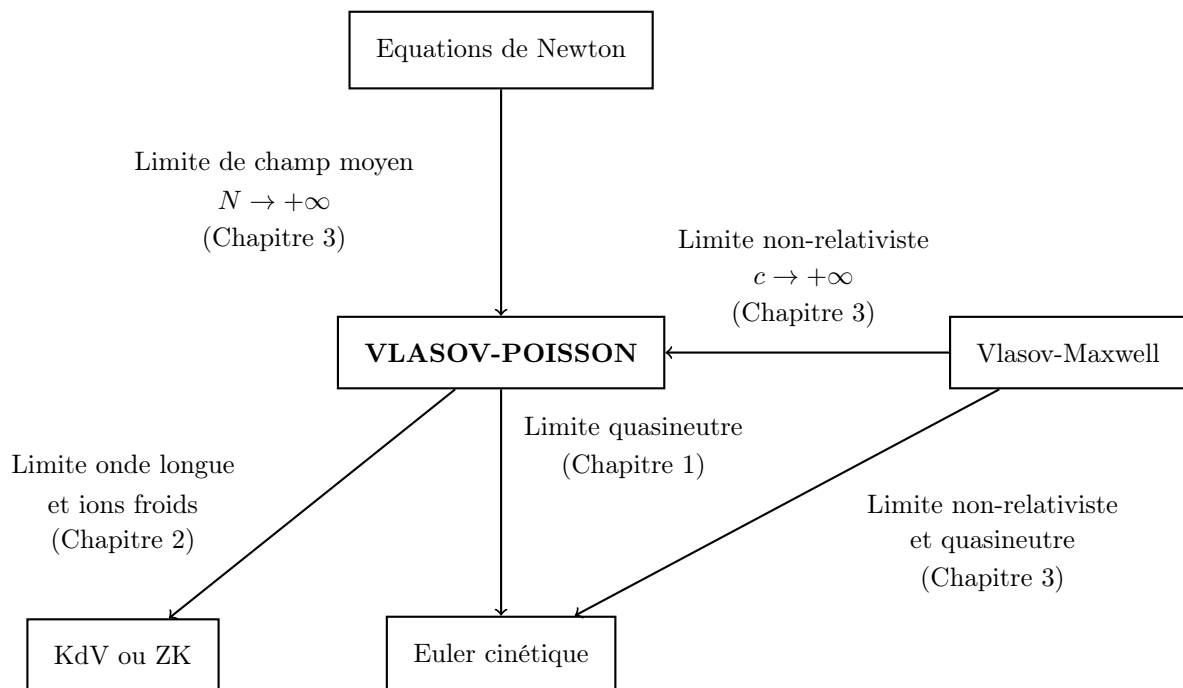
$$\begin{cases} \partial_t f + \hat{v} \cdot \nabla_x f + \left(E + \frac{1}{c} \hat{v} \times B \right) \cdot \nabla_v f = 0, \\ \frac{1}{c} \partial_t B + \nabla_x \times E = 0, & \nabla_x \cdot E = \int f dv - 1, \\ -\frac{1}{c} \partial_t E + \nabla_x \times B = \frac{1}{c} \int f v dv, & \nabla_x \cdot B = 0, \end{cases}$$

lorsque la vitesse de la lumière c tend vers l'infini. Ce problème est connu sous le nom de *limite classique* ou de *limite non-relativiste*. La limite formelle attendue est précisément le système de Vlasov-Poisson. Dans ce contexte, le temps long fait référence à un temps tendant également vers l'infini lorsque la vitesse de la lumière tend vers l'infini. On se concentre sur le cas de solutions initialement proches d'un équilibre homogène $\mu(v)$. Il sera démontré que si μ est instable au sens de Penrose pour Vlasov-Poisson, alors des instabilités peuvent se développer en un temps en $\log c$; au contraire si μ est stable, alors la solution reste proche de μ sur un temps polynomial en c .

La Section 3.2 est consacrée à l'étude de questions analogues dans le cadre de la *limite de champ moyen* pour les systèmes de particules en interaction. On y montre l'apparition d'instabilités sur des échelles de temps en $\log N$, où N désigne le nombre de particules. Celles-ci sont héritées du système de Vlasov sous-jacent.

Ces problèmes que nous venons de brièvement décrire peuvent paraître assez distincts, mais il apparaîtra que plusieurs méthodes communes peuvent être mises en oeuvre pour les étudier.

Le diagramme suivant résume les différents systèmes impliqués dans cette partie du mémoire.

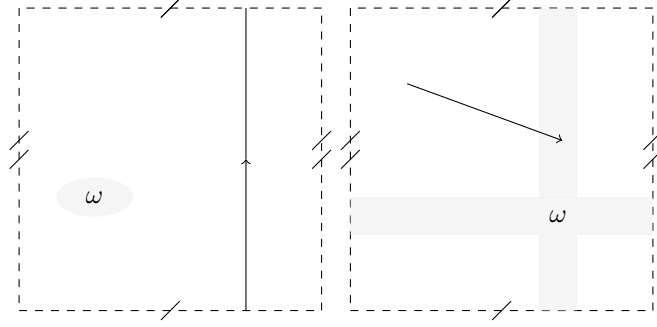


*
* *

Chapitres 4 et 5. Les travaux présentés dans les Chapitres 4 et 5 ont pour point commun l'utilisation de méthodes de la théorie du contrôle (dans un sens assez large) pour l'étude d'équations cinétiques; néanmoins, les techniques employées sont en réalité très différentes. Le véritable dénominateur commun est le rôle crucial que vont jouer des *conditions de contrôle géométrique* (GCC).

Grosso modo, étant donné un ensemble ouvert ω du domaine considéré, on dit que ω satisfait GCC s'il existe un temps $T > 0$ tel que toutes les courbes caractéristiques (dont la définition dépend du problème considéré) rencontrent ω en un temps au plus égal à T .

Par exemple, pour les courbes caractéristiques libres (c'est-à-dire le flot géodésique) dans le tore \mathbb{T}^2 , l'ouvert ω de droite de la figure ci-dessous satisfait GCC, mais pas l'ouvert de gauche (il y a des trajectoires non captées).



Ces conditions ont fait leur apparition pour l'étude de problèmes de stabilisation ou de contrôlabilité pour les équations des ondes, dans les travaux pionniers [209, 28].

- Le Chapitre 4 concerne l'utilisation de conditions de contrôle géométrique pour l'étude d'équations de type Vlasov.

La Section 4.1 traite des propriétés de *contrôlabilité interne du système de Vlasov-Maxwell relativiste* dans le tore \mathbb{T}^2 . On est en mesure de prouver deux résultats de contrôle local pour les équations non-linéaires complètes :

- lorsqu'on suppose que l'ouvert de contrôle vérifie GCC (par rapport au flot libre), on démontre la contrôlabilité locale autour de 0 ;
- lorsqu'on suppose uniquement que l'ouvert de contrôle contient une bande du tore, on démontre la contrôlabilité locale pour la fonction de distribution. On trouvera ici un lien avec les thèmes des chapitres précédents : on utilise en effet des propriétés d'invariance d'échelle du système de Vlasov-Maxwell ainsi que la limite non-relativiste $c \rightarrow +\infty$ pour obtenir une approximation de la dynamique avec Maxwell par la dynamique avec Poisson et un champ magnétique extérieur fixe (pour lequel des résultats de contrôlabilité assez généraux sont connus, voir [100]).

La Section 4.2 est pour sa part consacrée au système de Vlasov-Navier-Stokes posé dans un tuyau $[-L, L] \times [-1, 1]$:

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \operatorname{div}_v((u - v)f) = 0 \text{ pour } (t, x, v) \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times \{[0, L] \times [-1, 1]\} \times \mathbb{R}^2, \\ \partial_t u + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \nabla p = \int_{\mathbb{R}^2} f(t, x, v)(v - u(t, x)) dv, \\ \operatorname{div} u = 0. \end{cases}$$

Les conditions au bord adoptées consistent en une injection de particules et de fluide sur le bord gauche, et une absorption sur tous les autres bords. On démontre, sous des conditions géométriques adéquates, l'*existence de solutions stationnaires régulières non triviales* et on prouve leur *stabilité asymptotique locale* (par rapport à des perturbations à support compact suffisamment petit). Ici, on entend par non trivial que la fonction de distribution n'est pas identiquement nulle. L'existence même de ces équilibres réguliers n'est pas évidente (il n'en existe pas pour les équations posées sur l'espace entier). Toute l'analyse s'appuie sur des conditions de contrôle géométrique exprimant que toutes les trajectoires associées à l'équation de Vlasov (et issues d'un certain compact de la face gauche rentrante) "sortent" du tuyau en un temps uniforme.

- Dans le Chapitre 5, on étudie le *comportement en temps long* de solutions à des équations de Boltzmann linéaires *dégénérées*

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f - \nabla_x V \cdot \nabla_v f = \mathcal{C}(f),$$

où $V(x)$ est un potentiel extérieur fixé, supposé régulier et \mathcal{C} désigne l'opérateur de collisions de Boltzmann linéaire, que je ne vais pas expliciter dans cette introduction. La dégénérescence correspond au fait que l'opérateur de collisions \mathcal{C} peut éventuellement être nul sur une partie non triviale de l'espace des phases. On met en évidence plusieurs conditions de contrôle géométrique (plus fortes ou plus faibles que la définition classique) qui permettent de caractériser la convergence éventuelle vers un équilibre

de l'équation. Ces conditions de contrôle géométrique expriment comment le transport et les collisions interagissent.

On offre ainsi un point de vue géométrique sur la notion d'hypocoercivité pour les équations cinétiques [230].

*
* *

Chapitre 6. L'ultime chapitre de ce mémoire traite de la *contrôlabilité du système des water waves avec tension de surface* en deux dimensions d'espace. On considère une fluide parfait incompressible, homogène, *irrotationnel* et périodique dans une direction, occupant un domaine à surface libre décrite par un graphe :

$$\Omega(t) = \{(x, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}, 0 < y < \eta(t, x)\}.$$

Le fluide est quant à lui décrit par son champ de vitesses v ; comme l'écoulement est supposé irrotationnel, v dérive d'un potentiel ϕ ; les équations des water waves avec tension de surface s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \partial_t \phi + \frac{1}{2} |\nabla_{x,y} \phi|^2 + P + gy = 0, & \Delta_{x,y} \phi = 0, \\ \partial_t \eta = \sqrt{1 + |\partial_x \eta|^2} \nabla_{x,y} \phi \cdot n & \text{sur } y = \eta(t, x), \\ P = \partial_x \left(\frac{\partial_x \eta}{\sqrt{1 + (\partial_x \eta)^2}} \right) + P_{ext}(t, x) & \text{sur } y = \eta(t, x), \\ \partial_y \phi|_{y=0} = 0, \end{cases}$$

la première ligne n'étant autre que l'équation d'Euler incompressible, tandis que les trois suivantes expriment les conditions au bord. L'étude du problème de Cauchy associé a une longue histoire (qui continue à s'écrire) et je n'ai pas la prétention d'en discuter tous les aspects ; citons [192, 73, 43, 235, 166, 5] pour des résultats locaux marquants.

On montre à l'aide de méthodes microlocales que ces équations sont localement contrôlables autour de l'état de fluide au repos, en temps *arbitrairement petit*, à l'aide d'un contrôle $P_{ext}(t, x)$ (agissant à la surface du fluide), à *support compact non vide quelconque*. La difficulté principale vient du caractère quasi-linéaire des équations qui rend inappropriée toute analyse purement perturbative (c'est-à-dire passant typiquement par l'étude des équations linéarisées autour de 0 puis par l'utilisation d'un théorème de point fixe). L'approche suivie dans ce chapitre passe par une étude fine des équations linéarisées autour de *tout état proche de 0*, puis par un schéma d'approximation quasi-linéaire adéquat.

Chapitre 1

LA LIMITE QUASINEUTRE DU SYSTÈME DE VLASOV-POISSON

Nous présentons dans ce chapitre des travaux en collaboration avec Maxime Hauray [131], Mikaela Iacobelli [132, 133], Toan Nguyen [138] et Frédéric Rousset [142].

*
* *

Ce chapitre est entièrement consacré à l'étude la limite quasineutre du système de Vlasov-Poisson. Il s'agit d'un problème fondamental de la physique des plasmas, dont l'étude mathématique systématique a été initiée dans les années 90 avec les travaux pionniers de Brenier et Grenier. Les modèles asymptotiques formels sont des équations de Vlasov avec des champs de force singuliers, qui sont en général mal posées au sens de Hadamard. Ce sont des mécanismes de stabilité ou d'instabilité, décrits dans chapitre, qui permettent de déterminer si les limites formelles attendues sont ou ne sont pas une bonne approximation.

1.1. Introduction

La limite quasineutre désigne, du point de vue physique, l'étude du comportement de solutions de modèles décrivant un plasma, lorsque la *longueur de Debye* (*i.e.* la longueur typique de variation du champ électrique associé) est très petite. Plus précisément, on s'intéresse aux *modèles limites* pouvant être ainsi obtenus lorsque formellement on fait tendre la longueur de Debye vers 0 et on cherche à comprendre en quelle mesure ils constituent une bonne approximation de la dynamique.

Cette limite est tout à fait pertinente si on compare les longueurs typiques dans un plasma donné. A titre d'illustration, voici quelques exemples concrets (tirés de [120]) :

	Tokamak	Boucle solaire	Magnétosphère	Vent solaire
Longueur de Debye	10^{-4}m	10^{-3}m	10^{-1}m	10m
Longueur typique d'observation	$\sim 1\text{m}$	$\geq 10^3\text{m}$	$\geq 10^3\text{m}$	$\geq 10^3\text{m}$

Par conséquent, le paramètre sans dimension

$$\varepsilon := \frac{\lambda_D}{L}$$

où l'on a noté λ_D la longueur de Debye et L la longueur typique d'observation, est, dans les conditions habituelles, un petit paramètre. Ce paramètre intervient dans le calcul du champ électrique : dans le cadre de l'approximation électrostatique, celui-ci dérive d'un potentiel électrique ϕ vérifiant l'équation de Poisson

$$-\varepsilon^2 \Delta_x \phi = \sum n_{\text{ions}} - n_{\text{electrons}}$$

en notant $n_{\text{electrons}}$ la densité des électrons et $\sum n_{\text{ions}}$ la densité des ions constituant le plasma. Comme $\varepsilon \ll 1$, l'approximation $\sum n_{\text{ions}} \approx n_{\text{electrons}}$ semble physiquement pertinente et est, de fait, couramment utilisée en physique des plasmas. Dans le cadre de cette approximation, la charge est donc localement quasiment nulle ; autrement dit, on peut considérer que le plasma est localement quasiment neutre. C'est pour cette raison que la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ porte le nom de *limite quasineutre*.

Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur la limite quasineutre pour le système de Vlasov-Poisson, (plus tard, dans le Chapitre 2, Section 2.2, nous nous pencherons aussi sur son pendant hydrodynamique, le système d'Euler-Poisson).

La justification de la limite quasineutre soulève des problèmes mathématiques intimement liés à la physique du problème; en guise d'introduction aux travaux que nous présenterons dans les chapitres suivants, nous allons à présent essayer de suggérer d'où viennent ces problèmes.

*
* *

Nous nous concentrons dans ce mémoire sur l'étude de systèmes de Vlasov-Poisson à une phase, décrivant une seule famille de particules chargées. On distingue en particulier deux grandes classes de modèles, selon que l'on étudie la dynamique d'ions, ou d'électrons.

Vlasov-Poisson pour les ions et Vlasov-Benney. Considérons pour commencer le cas de l'équation de Vlasov-Poisson pour les ions, avec des électrons ayant atteint un équilibre thermodynamique, et considérons sa limite quasineutre (nous discuterons également dans un moment l'équation de Vlasov-Poisson pour les électrons, avec des ions fixes). Dans le cadre de ce modèle, la densité des électrons vérifie une loi de Maxwell-Boltzmann⁽¹⁾

$$n_e = e^{U_\varepsilon} \sim 1 + U_\varepsilon.$$

que l'on linéarise pour simplifier⁽²⁾, comme cela est communément fait en physique des plasmas. Alors, la fonction de distribution f_ε des ions vérifie le système suivant :

$$(1.1) \quad \begin{cases} \partial_t f_\varepsilon + v \cdot \nabla_x f_\varepsilon + E_\varepsilon \cdot \nabla_v f_\varepsilon = 0, & t \geq 0, (x, v) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d \\ E_\varepsilon = -\nabla_x U_\varepsilon, \\ U_\varepsilon - \varepsilon^2 \Delta_x U_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^d} f_\varepsilon dv - 1, \\ f_\varepsilon|_{t=0} = f_{0,\varepsilon} \geq 0, \quad \int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} f_{0,\varepsilon} dv dx = 1. \end{cases}$$

Dans ce mémoire, $\mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$ désigne le tore périodique de dimension d , muni de la mesure de Lebesgue normalisée de sorte que $\text{Leb}(\mathbb{T}^d) = 1$. La limite quasineutre correspond à l'étude du comportement des solutions lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Formellement, en supposant que dans un certain sens, $f_{0,\varepsilon} \rightarrow f_0$, $f_\varepsilon \rightarrow f$ et en prenant $\varepsilon = 0$ on obtient le système

$$(1.2) \quad \begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f - \nabla_x \rho \cdot \nabla_v f = 0, \\ \rho = \int_{\mathbb{R}^d} f dv, \\ f|_{t=0} = f_0 \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}^d} f_0 dv dx = 1, \end{cases}$$

que nous avons appelé système de Saint-Venant cinétique dans [126] (nous reviendrons bientôt sur l'origine de cette dénomination). Claude Bardos [25] a lui baptisé ce système *Vlasov-Dirac-Benney*, pour les raisons suivantes : d'une part, un potentiel de Dirac a remplacé le potentiel coulombien, et d'autre part, du moins en dimension $d = 1$, on observe un lien profond avec les équations de Benney [36]. En un certain sens, comme l'a montré Zakharov [238], elles sont en fait équivalentes à (1.2). Ces équations peuvent être dérivées formellement à partir du système des water waves en régime hydrostatique⁽³⁾. Elles

1. La justification de la loi de Maxwell-Boltzmann, dans un cadre cinétique, fait l'objet de travaux récents [27], [150]; cette question intéressante ne sera cependant pas discutée dans ce mémoire.

2. En fait, la plupart des résultats que nous discuterons ont leur pendant pour la loi de Maxwell-Boltzmann complète, mais cela ne sera pas évoqué par souci de concision.

3. Le modèle de Benney remplace le modèle de Saint-Venant lorsque l'on considère les water waves *avec vorticit e*.

s'écrivent :

$$(1.3) \quad \begin{cases} \partial_t u + u \partial_x u + w \partial_z u + \partial_x h = 0, \\ \partial_t h + \partial_x \int_0^h u \, dz = 0, \\ \partial_x u + \partial_z w = 0, \\ \partial_z h = 0, \\ w|_{z=0} = 0, \end{cases}$$

pour $(t, x, z) \in \{(s, y, r), s \geq 0, y \in \mathbb{T}, 0 \leq r \leq h(s, y)\}$. Les inconnues sont le champ de vitesse $(u(t, x, z), w(t, x, z)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et la hauteur de fluide $h(t, x)$. Dans ce texte, nous appellerons (1.2) le système de *Vlasov-Benney*.

Vlasov-Poisson pour les électrons et les équations d'Euler incompressibles cinétiques. Si l'on s'intéresse au cas de l'équation de Vlasov-Poisson pour les électrons, avec des ions fixes, ce qui signifie que l'on étudie l'évolution de la fonction de distribution f_ε des électrons, qui vérifie le système

$$(1.4) \quad \begin{cases} \partial_t f_\varepsilon + v \cdot \nabla_x f_\varepsilon + E_\varepsilon \cdot \nabla_v f_\varepsilon = 0, & t \geq 0, (x, v) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d \\ E_\varepsilon = -\nabla_x U_\varepsilon, \\ -\varepsilon^2 \Delta_x U_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^d} f_\varepsilon \, dv - 1, \\ f_\varepsilon|_{t=0} = f_{0,\varepsilon} \geq 0, \quad \int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} f_{0,\varepsilon} \, dv \, dx = 1, \end{cases}$$

on obtient formellement dans la limite quasineutre $\varepsilon \rightarrow 0$ le système

$$(1.5) \quad \begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f - \nabla_x p \cdot \nabla_v f = 0, \\ \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x, v) \, dv = 1. \end{cases}$$

Dans ces équations, $p(t, x)$ apparaît comme un multiplicateur de Lagrange (ou, du point de vue physique, une pression) reliée à la contrainte de densité de charge constante. On peut obtenir une équation explicite sur p . Introduisons la densité de courant $j(t, x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x, v) v \, dv$. et écrivons la conservation de la charge et du courant pour l'équation de Vlasov :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \nabla \cdot j &= 0, \\ \partial_t j + \nabla \cdot \int f v \otimes v \, dv &= -\nabla p. \end{aligned}$$

A cause de la contrainte $\rho = 1$, il vient la condition d'incompressibilité $\nabla \cdot j = 0$. En insérant cette contrainte dans la conservation du courant, on obtient finalement la loi

$$-\Delta p = \nabla \cdot \left(\nabla \cdot \int f v \otimes v \, dv \right).$$

On remarque par ailleurs que si l'on cherche une solution monocinétique de la forme $f(t, x, v) = \rho(t, x) \delta_{v=u(t, x)}$ alors $\rho = 1$ et u doit vérifier les équations d'Euler incompressibles. A ma connaissance cette dérivation formelle et ce lien avec Euler incompressible ont été mis en évidence par Brenier [49].

L'équation (1.5) apparaît également naturellement dans le cadre des solutions variationnelles (ou généralisées) de Brenier aux équations d'Euler incompressibles [50, 51, 53] (les travaux de Schnirelman [221, 222] sont également importants au regard de ces questions) ; nous nous référons aussi aux articles de Ambrosio et Figalli [9, 10], Bernot, Figalli et Santambrogio [40] pour des développements plus récents de la théorie, ainsi qu'à l'article de revue [77] par Daneri et Figalli. De plus, en dimension $d = 1$, de même que le système de Vlasov-Benney (1.2) avait un lien profond avec le système de Benney, il apparaît que les équations (1.5) sont intimement liées aux équations d'Euler *hydrostatiques*. Ce sont des équations

qui apparaissent dans le contexte de flots incompressibles dans un canal étroit (voir en particulier le livre de Lions [176]). Elles s'écrivent

$$(1.6) \quad \begin{cases} \partial_t u + u\partial_x u + w\partial_z u + \nabla_x p = 0, \\ \partial_x u + \partial_z w = 0, \\ \partial_z p = 0, \\ w|_{z=\pm 1} = 0 \end{cases}$$

pour $(x, z) \in \mathbb{T} \times [-1, 1]$. Les inconnues sont le champ de vitesse $(u(t, x, z), w(t, x, z)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et la pression $p(t, x)$. Citons [52, 55, 212, 182, 162] pour quelques références sur ces équations. Signalons également que la dérivation des équations d'Euler hydrostatiques à partir des équations d'Euler incompressibles dans un domaine étroit partage beaucoup de points communs avec la limite quasineutre, citons à ce sujet [113, 55, 182]. Dans ce texte, nous nous référons à (1.5) comme les équations d'*Euler incompressibles cinétiques*.

*
* *

Les systèmes (1.2) et (1.5) ont pour point commun frappant le fait suivant : le champ de force est singulier, dans la mesure où il y a une perte d'une dérivée par rapport à la régularité de la fonction de distribution. Cela signifie qu'il y a deux dérivées de différence par rapport aux systèmes de Vlasov-Poisson à $\varepsilon > 0$ fixé, et une dérivée de différence si l'on compare à une équation de type Burgers. Il va sans dire que ceci modifie de manière conséquente l'analyse du système limite par rapport à celle du système de Vlasov-Poisson, notamment en ce qui concerne la théorie d'existence de solutions.

Nous voyons ainsi que la limite quasineutre est une *limite singulière*, au sens où la nature du système limite est très différente de celle du système à ε fixé. Plus précisément, nous sommes passés d'un système de type transport couplé à un champ de force donné par une équation elliptique à un système de type transport couplé à un champ de force *singulier*.

Deux grandes questions, reliées, se dégagent :

- établir une théorie de Cauchy pour les systèmes limites (1.2) et (1.5) ;
- justifier la dérivation des systèmes limites, c'est-à-dire justifier la limite quasineutre.

Notre point de vue consiste à étudier les deux questions simultanément, ce qui revient à voir les systèmes de Vlasov-Poisson (1.1) ou (1.4) comme une régularisation des systèmes limites correspondants.

Pour des raisons pédagogiques, et aussi parce que les résultats sont, au moment de la rédaction de ce mémoire, plus complets pour ce modèle, **nous avons choisi de nous concentrer sur la limite quasineutre pour le système de Vlasov-Poisson pour les ions, et donc sur le système de Vlasov-Benney**. Le traitement de ce modèle est en effet techniquement plus simple, et requiert les mêmes idées principales que pour le système de Vlasov-Poisson pour les électrons. Ce modèle sera brièvement évoqué en clôture du chapitre, où nous expliquerons les difficultés nouvelles et les ingrédients supplémentaires nécessaires.

La justification de la limite quasineutre correspond ainsi au problème suivant : est-ce que Vlasov-Benney est une bonne approximation de Vlasov-Poisson lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$? C'est la question principale qui nous occupera jusqu'à la fin de ce chapitre⁽⁴⁾.

1.2. Sur le caractère bien posé ou mal posé du système de Vlasov-Benney

Dans ce paragraphe, nous décrivons brièvement l'état de l'art concernant le problème de Cauchy pour Vlasov-Benney. L'existence de solutions est connue dans les contextes suivants :

4. Ce problème occupait déjà une place centrale dans ma thèse, voir [126] dont on parlera très brièvement plus tard ainsi que [125, 130] pour une version anisotrope de la limite quasineutre. Ces derniers travaux ne seront pas évoqués dans ce mémoire, voir à ce sujet l'article de revue [128].

- un théorème de type Cauchy-Kowalevski s'applique [189, 126, 155] : il y a existence locale de solutions analytiques pour des données initiales analytiques.
- En dimension $d = 1$, Bardos et Besse [26] ont montré l'existence de solutions à régularité Sobolev pour des données initiales dont le profil en vitesse, pour tout x , a *grosso modo* la forme d'une bosse. Leur preuve s'appuie sur une réécriture hydrodynamique du système pour des données de type water bags.
- En toute dimension, avec Frédéric Rousset [142], nous avons montré l'existence de solutions à régularité Sobolev pour des données initiales vérifiant, pour tout x , une condition de stabilité de Penrose. Cela constitue en quelque sorte une généralisation du cas précédent. Nous décrirons bientôt plus précisément ce résultat, dans la Section 1.7.

Tous ces résultats sont locaux en temps et à ma connaissance (en dehors des équilibres du système), il n'y a actuellement pas d'exemple de solution globale.

*
* *

La perte de dérivée constatée sur le champ de force a la conséquence suivante. Bardos et Nouri ont remarqué dans [29] qu'il existe des équilibres, dits instables, autour desquels les équations linéarisées possèdent un *spectre instable non borné*.

Il existe un exemple particulièrement simple de ce fait : en dimension $d = 1$, considérons un équilibre $\mu(v)$ pair, tel que $\int_{\mathbb{R}} \mu(v) dv = 1$ et vérifiant la condition d'instabilité

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\mu'(v)}{v} > 1.$$

Les équations linéarisées autour de μ s'écrivent

$$\partial_t g + v \partial_x g - \mu'(v) \partial_x \int_{\mathbb{R}} g dv = 0.$$

Recherchons une solution de la forme $g(t, x, v) = e^{\lambda t + ikx} h(v)$, avec $\lambda > 0$. Cela conduit à l'étude de

$$(\lambda + ikv)h(v) - ik\mu'(v) \int_{\mathbb{R}} h(v) dv = 0.$$

Ce problème revient à résoudre

$$F(\lambda) := \int_{\mathbb{R}} \frac{k^2 v \mu'(v)}{\lambda^2 + (kv)^2} dv = 1.$$

Comme $F(0) > 1$ et $F(+\infty) = 0$, nous en déduisons par continuité l'existence de $\lambda > 0$ tel que $F(\lambda) = 1$, ce qui permet de conclure. Finalement, par homogénéité des équations linéarisées, on remarque pour tout n , $n\lambda$ appartient également au spectre instable.

*
* *

Cette propriété spectrale conduit au caractère mal posé du système complet. Ceci est réminiscent de la situation pour les systèmes symétriques quasilinearés présentant un défaut d'hyperbolicité (voir Métivier [183]). A l'aide d'un raisonnement par l'absurde, on peut aisément en déduire le caractère mal posé (au sens de Hadamard) de Vlasov-Benney, voir [29, 26].

Avec Toan Nguyen, nous avons précisé ce phénomène en démontrant dans [138] l'énoncé suivant, qui illustre le caractère particulièrement pathologique de ce système.

Théorème 1.1. — *Soit $\mu(v)$ un équilibre instable analytique. Pour tout $m, s \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0, 1]$, et tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une famille de solutions $(f_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ à Vlasov-Benney, des temps $t_\varepsilon = O(\varepsilon |\log \varepsilon|)$, et $(x_0, v_0) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$, tels que*

$$(1.7) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|f_\varepsilon - \mu\|_{L^2([0, t_\varepsilon] \times \Omega_\varepsilon)}}{\|\langle v \rangle^m (f_\varepsilon|_{t=0} - \mu)\|_{H^s(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)}^\alpha} = +\infty$$

où $\Omega_\varepsilon = B(x_0, \varepsilon^k) \times B(v_0, \varepsilon^k)$. Ici, $\langle v \rangle := \sqrt{1 + |v|^2}$.

Ce théorème montre l'instabilité des solutions analytiques construites par le théorème de Cauchy-Kowalewski. Il implique que l'application $f_0 \mapsto f(t)$ ne peut être $C^\alpha(H^s, L^2)$ (pour tout $\alpha \in (0, 1]$), même en temps arbitrairement petit ou pour une perte de dérivées arbitrairement grande.

*
* *

Afin de démontrer le Théorème 1.1, nous avons développé avec Toan Nguyen un cadre abstrait pour étudier le caractère mal-posé d'EDP de la forme

$$(1.8) \quad \partial_t U(t, x, z) - \mathcal{L}U = \mathcal{Q}(U, U), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d, \quad z \in \Omega,$$

dans laquelle \mathcal{L} (resp. \mathcal{Q}) est un opérateur integro-différentiel linéaire (resp. bilinéaire), $d \in \mathbb{N}^*$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{d'}$, $d' \in \mathbb{N}^*$. Si $\Omega \neq \mathbb{R}^{d'}$, alors des conditions au bord adéquates sur $\partial\Omega$ doivent également être imposées à la solution U . Le choix du tore \mathbb{T}^d est fait par souci de simplicité, d'autres cadres plus complexes peuvent être envisagés.

Considérons la suite $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$, pour $k \in \mathbb{N}^*$. Par la suite, on oubliera l'indice k par souci de lisibilité. En suivant Métivier [183], on recherche des solutions U sous la forme

$$(1.9) \quad U(t, x, z) \equiv u \left(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}, z \right),$$

où $u(s, y, z)$ est 1-périodique en y_1, \dots, y_d . On suppose que l'on peut écrire

$$\mathcal{L}U = \left[\frac{1}{\varepsilon} Lu + R_1(u) \right] \left(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}, z \right), \quad \mathcal{Q}(U, U) = \left[\frac{1}{\varepsilon} Q(u, u) + R_2(u, u) \right] \left(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}, z \right),$$

où L est indépendant de ε . Pour simplifier, supposons que les restes R_1 et R_2 sont nuls. Cela conduit à l'EDP abstraite suivante :

$$(1.10) \quad \partial_s u - Lu = Q(u, u), \quad s \geq 0, \quad y \in \mathbb{T}^d, \quad z \in \Omega.$$

Les hypothèses et l'analyse vont porter sur ce système. Sans rentrer dans les détails, on se donne une famille de normes pour les fonctions de (y, z) , notée $(\|\cdot\|_{\delta, \delta'})_{\delta, \delta' > 0}$, que l'on qualifiera d'*analytiques* (ainsi que les espaces de Banach associés), singeant les propriétés classiques des familles de normes analytiques réelles (voir à ce sujet [109], [189]). Informellement, le premier indice δ quantifie l'analyticité en y , le second celle en z . Les trois hypothèses principales sont alors les suivantes :

- On a $[\partial_y, L] = 0$.
- L'opérateur L a une valeur propre instable.
- On peut établir pour e^{sL} le semi-groupe associé à L des estimations dans les espaces analytiques, avec perte d'analyticité *optimale* en la variable y .

Précisément, l'hypothèse est la suivante. Il existe $\gamma_0 > 0$, tel que l'on ait les propriétés :

- pour tout $\eta > 0$, il existe $k_0 \in [1, +\infty)$ et une valeur propre instable λ_0 telle que

$$(1.11) \quad \left| \frac{\operatorname{Re} \lambda_0}{k_0} - \gamma_0 \right| \leq \eta.$$

De plus il existe une fonction propre g pour L , associée à λ_0 , telle que $\|g\|_{\delta, \delta'_0} < +\infty$, pour tout $\delta > 0$ et un certain $\delta'_0 > 0$.

- Pour tout $\Lambda > \gamma_0$, il existe $C_\Lambda > 0$, $\delta'_1 > 0$ tels que pour $\delta - \Lambda s > 0$, $\delta' \in (0, \delta'_1]$,

$$(1.12) \quad \|e^{sL} u\|_{\delta - \Lambda s, \delta'} \leq C_\Lambda \|u\|_{\delta, \delta'}, \quad \forall u \in X_{\delta, \delta'}.$$

La première hypothèse est une hypothèse de structure, facile à vérifier en pratique. La seconde révèle une instabilité violente pour l'opérateur \mathcal{L} , qui a alors un spectre instable non borné. En effet, en notant (g, λ_0) une paire fonction propre-valeur propre, on a, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathcal{L}g \left(\frac{\cdot}{\varepsilon}, \cdot \right) = \frac{\lambda_0}{\varepsilon} g \left(\frac{\cdot}{\varepsilon}, \cdot \right),$$

autrement dit $g(\frac{\cdot}{\varepsilon}, \cdot)$ est une fonction propre associée à $\frac{\lambda_0}{\varepsilon}$, avec $\operatorname{Re} \lambda_0 > 0$ et ce pour tout $\varepsilon > 0$. La dernière hypothèse révèle une *perte de régularité analytique* pour le semi-groupe associé à L ; cette perte

ne concerne en revanche que la variable y , et non la variable z . La contrainte sur les pertes admissibles $\Lambda > \gamma_0$ dans (1.12) est *optimale*, au sens où il s'agit du mieux que l'on puisse espérer, au vu de (1.11) et de ses conséquences sur la croissance du spectre. En pratique le nombre γ_0 peut être vu comme le supremum d'une certaine fonctionnelle. Notons également que nous demandons beaucoup de régularité par rapport à la première variable pour la fonction propre g . Dans le contexte de l'analyticité réelle, cela signifie en pratique que g doit être très bien localisée dans l'espace de Fourier associé.

Le but du jeu consiste alors à établir pour (1.10) un théorème de type Cauchy-Kowalevski en temps long, c'est-à-dire, dans ce contexte, en partant de données de taille polynomiale en ε , de construire une solution sur une échelle de temps en $|\log \varepsilon|$ (assez longue pour que l'instabilité linéaire puisse faire son effet). On démontre ainsi un théorème abstrait d'instabilité qui peut ensuite être utilisé – la tâche étant alors de vérifier que les hypothèses abstraites sont bien vérifiées – pour démontrer le caractère mal posé de Vlasov-Benney (cf le Théorème 1.1), ainsi que le caractère mal posé des équations d'Euler hydrostatiques (on renvoie à [138] pour un énoncé précis, basé sur les instabilités linéaires décrites par Renardy [212]). Dans le cas où L est un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants, le théorème est dû à Métivier [183], qui s'est appuyé sur une approche utilisant des séries entières (les estimations sur le semi-groupe sont immédiates à obtenir dans ce cadre). Notre cadre fonctionnel est inspiré par celui de Desjardins-Grenier [80], qui ont étudié des instabilités de type Rayleigh-Taylor.

Il serait intéressant de comprendre si ce théorème abstrait ou une variante proche peut permettre de prouver des résultats concernant le caractère mal posé des équations de Prandtl (voir à ce sujet Gérard-Varet et Dormy [91] et [94, 119]).

1.3. Limite quasineutre et temps long

Revenons-en à la limite quasineutre. Bien entendu, le fait que le système limite attendu ait un comportement aussi pathologique constitue une mauvaise nouvelle en vue de la justification du passage à la limite. Le contraste est saisissant avec la théorie classique pour le système de Vlasov-Poisson. Pour tout paramètre $\varepsilon \in (0, 1]$ fixé, la théorie de Cauchy globale est en effet bien comprise, que ce soit pour les solutions faibles ou les solutions fortes (voir en particulier Arsenev [16], Ukai et Okabe [228], Pfaffmoser [204], Lions et Perthame [177], Schaeffer [219], Horst [152], Batt et Rein [31] ou encore plus récemment Pallard [198]). Malheureusement, ces théories, s'appuient fortement sur le caractère elliptique de l'équation de Poisson ; elles utilisent par conséquent des estimations qui explosent lorsque ε tend vers 0, et ces estimations sont donc a priori peu utiles en vue de la justification de la limite.

Ceci dit, il existe des estimations uniformes provenant des lois de conservation de la physique : l'énergie

$$(1.13) \quad \mathcal{E}_\varepsilon(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} f_\varepsilon(t, x, v) |v|^2 dv dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^d} U_\varepsilon^2(t, x) dx + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |E_\varepsilon(t, x)|^2 dx$$

ainsi que toutes les intégrales

$$\int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} \varphi(f(t, x, v)) dv dx, \quad \text{pour toute fonction } \varphi \text{ lipschitzienne,}$$

sont des quantités conservées par la dynamique de Vlasov-Poisson.

En utilisant ces lois de conservation, Brenier et Grenier [56], puis Grenier [109], ont démontré qu'on pouvait obtenir une forme faible de la limite faisant intervenir plusieurs mesures de défaut, apparaissant à cause de plusieurs éventuels défauts de compacité. Plus précisément, il s'agit des équations satisfaites par les limites des deux premiers moments en vitesse qui sont établies. Ils montrent en quelque sorte que la limite est une "measure-valued solution" (au sens de DiPerna et Majda [85]) aux équations d'Euler incompressibles, modulo des mesures de défaut.

*
* *

Afin de comprendre les véritables enjeux dans la limite quasineutre, il existe un changement de variables (hyperbolique) particulièrement éclairant :

$$(t, x, v) \mapsto \left(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}, v \right),$$

qui mène du système de Vlasov-Poisson en régime quasineutre au système de Vlasov-Poisson avec $\varepsilon = 1$. Cela signifie que si l'on veut prouver une estimation uniforme sur un intervalle de temps de taille $O(1)$, en régime quasineutre, cela revient, du moins moralement, à prouver cette estimation sur un intervalle de temps de taille $O(1/\varepsilon)$ pour Vlasov-Poisson⁽⁵⁾. Autrement dit, la limite quasineutre peut être interprétée comme un problème de *dynamique en temps grand*.

La lecture de la limite quasineutre comme un problème en temps long suggère fortement l'importance des propriétés de stabilité ou d'instabilité des solutions au système Vlasov-Poisson. Celles-ci vont en effet jouer un rôle clé dans la justification de la limite. Remarquablement, il va suffire de comprendre les *propriétés de stabilité des équilibres homogènes*, i.e. de la forme $\mu(v)$. On rappelle que celles-ci ont déjà brièvement été discutées dans l'introduction de ce mémoire.

1.4. Invalidité de la limite vers Vlasov-Benney dans le cas instable

La discussion précédente nous invite en particulier à considérer des solutions instables afin de montrer l'invalidité de la limite quasineutre. Les conditions d'instabilité de Penrose [203], qui assurent l'instabilité linéaire spectrale pour certains équilibres homogènes en vitesse à Vlasov-Poisson, constituent le point de départ. Les distributions instables typiques étant celles présentant deux bosses assez larges, ces instabilités seront appelées, comme il est d'usage, *instabilités à deux bosses* (ou à deux faisceaux).

Nous nous concentrerons en particulier sur la dimension $d = 1$ dans cette section, qui est le cadre également retenu dans [131].

Définition 1.1. — *Un profil homogène $\mu(v)$, tel que $\int \mu dv = 1$, vérifie la condition d'instabilité de Penrose si μ atteint un minimum local en un point \bar{v} et l'inégalité suivante a lieu :*

$$(1.14) \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu'(v)}{v - \bar{v}} dv > 1.$$

Si la fonction est plate autour de ce minimum, c'est-à-dire constante sur un intervalle $[\bar{v}_1, \bar{v}_2]$, alors (1.14) doit être vérifiée pour tout $\bar{v} \in [\bar{v}_1, \bar{v}_2]$.

Suivant Penrose [203], on peut montrer l'instabilité spectrale (linéaire) de tels équilibres. Guo et Strauss ont prouvé dans [122], que l'instabilité spectrale impliquait une instabilité non-linéaire pour le système complet. Nous reviendrons très bientôt sur ce point.

Nous supposerons également que les distributions homogènes considérées satisfont une condition (appelée δ ou δ' dans [131]), ce qui inclut notamment les profils strictement positifs décroissant à l'infini ou comme une maxwellienne ou comme l'inverse d'un polynôme, ainsi que les profils à support compact. Cette condition a pour seul rôle d'assurer que les fonctions de distributions dans les théorèmes qui vont suivre sont bien positives ou nulles (et ont donc un sens physique).

Le résultat concernant la limite quasineutre que nous avons obtenu avec Maxime Hauray dans [131] est le suivant (voir l'acte de conférence de Grenier [112] pour un énoncé préliminaire un peu moins général, et sans preuve formellement écrite) :

Théorème 1.2. — *Soit $\mu(v)$ un équilibre régulier satisfaisant la condition d'instabilité de Penrose. Pour tout $N > 0$ et $s > 0$, il existe une suite de données initiales positives ou nulles $(f_{0,\varepsilon})$ telles que*

$$\|f_{0,\varepsilon} - \mu\|_{W_{x,v}^{s,1}} \leq \varepsilon^N,$$

5. Par cette transformation le tore \mathbb{T}^d est changé en un grand tore de taille $1/\varepsilon$, mais on peut négliger ce fait en première approximation.

et en notant (f_ε) la suite de solutions au système de Vlasov-Poisson associées aux données initiales $(f_{0,\varepsilon})$, on a :

i) **Instabilité L^1 macroscopique :**

$$(1.15) \quad \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, \varepsilon |\log \varepsilon|)} \|\rho_\varepsilon(t) - 1\|_{L^1_x} > 0, \quad \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, \varepsilon |\log \varepsilon|)} \varepsilon \|E_\varepsilon\|_{L^1_x} > 0.$$

ii) **Instabilité complète pour la fonction de distribution :** pour tout $r \in \mathbb{Z}$, on a :

$$(1.16) \quad \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, \varepsilon |\log \varepsilon|)} \|f_\varepsilon(t) - \mu\|_{W_{x,v}^{r,1}} > 0.$$

Ce théorème permet d'affirmer de manière définitive que l'approximation quasineutre par l'équation de Vlasov-Benney n'est en général pas valable. En effet, on en déduit que toute limite faible de la suite de fonctions de distribution (f_ε) ne peut satisfaire une équation admettant μ comme solution stationnaire (ce qui est le cas pour Vlasov-Benney).

*
* *

Nous nous proposons d'expliquer en quelques mots le principe de ce résultat. La première étape consiste à considérer des données hautement oscillantes en ε . Plus précisément, nous obtenons des solutions ε périodiques en recherchant des solutions au système :

$$(1.17) \quad \begin{cases} \partial_t \tilde{f}_\varepsilon + v \partial_x \tilde{f}_\varepsilon - \partial_x \tilde{V}_\varepsilon \partial_v \tilde{f}_\varepsilon = 0, & t \geq 0, x \in \mathbb{T}_\varepsilon := \mathbb{R}/(\varepsilon\mathbb{Z}), v \in \mathbb{R}, \\ -\varepsilon^2 \partial_x^2 \tilde{V}_\varepsilon = \int \tilde{f}_\varepsilon dv - 1, \end{cases}$$

Nous obtenons ensuite une solution f_ε au système de Vlasov-Poisson en recollant ensemble ε^{-1} copies de \tilde{f}_ε . La deuxième étape consiste à effectuer le changement de variables $(t, x, v) \mapsto (\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}, v)$. Cela revient à rechercher $(g_\varepsilon, \varphi_\varepsilon)$ vérifiant :

$$(1.18) \quad \tilde{f}_\varepsilon(t, x, v) = g_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}, v\right), \quad \tilde{V}_\varepsilon(t, x) = \varphi_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Cela conduit à l'étude du système suivant, *indépendant de ε* , et posé pour $t \geq 0, x \in \mathbb{T}, v \in \mathbb{R}$

$$(1.19) \quad \begin{cases} \partial_t g + v \partial_x g - \partial_x \varphi \partial_v g = 0, \\ -\partial_x^2 \varphi = \int g dv - 1, \end{cases}$$

On notera que les équations linéarisées autour de μ sont les équations

$$(1.20) \quad \begin{cases} \partial_t h + Lh = \partial_t h + v \partial_x h - \partial_x \Psi \partial_v \mu = 0, \\ -\partial_x^2 \Psi = \int h dv, \end{cases}$$

pour lesquelles on dispose d'une bonne théorie spectrale. Ainsi, tout revient à démontrer le résultat suivant d'instabilité pour le système (1.19).

Théorème 1.3. — *Avec les mêmes hypothèses sur μ que dans le Théorème 1.2, il existe une suite $(\theta_r)_{r \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs tels que, pour tout $S \in \mathbb{N}$, et tout $\delta > 0$, il existe une solution (g, φ) à (1.19) satisfaisant $\|g(0) - \mu\|_{W^{S,1}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \leq \delta$ et telle que*

$$(1.21) \quad \sup_{t \in [0, t_\delta]} \left\| \int_{\mathbb{R}} g(t, x, v) dv - 1 \right\|_{L^1_x(\mathbb{T}_M)} \geq \sup_{t \in [0, t_\delta]} \left\| \int_{\mathbb{R}} g(t, x, v) dv - 1 \right\|_{W_x^{-1,1}(\mathbb{T}_M)} \geq \theta_0,$$

$$(1.22) \quad \forall r \in \mathbb{N}^*, \quad \sup_{t \in [0, t_\delta]} \left\| \int_{\mathbb{T}_M} (g(t, x, v) - \mu(v)) dx \right\|_{W_v^{-r,1}} \geq \theta_r,$$

où $t_\delta = O(|\log \delta|)$ lorsque $\delta \rightarrow 0$.

Notons que la quantité impliquée dans (1.22) est une moyenne en x (donc en particulier elle est invariante en x). De plus, l'instabilité pour cette quantité implique celle pour la norme de Sobolev $W_{x,v}^{r,-1}$. En conséquence, en effectuant le changement de variables $(t, x, v) \mapsto (\varepsilon t, \varepsilon x, v)$ pour revenir aux variables originelles, nous sommes en mesure d'obtenir le théorème 1.2.

Il s'agit d'une version raffinée du théorème d'instabilité de Guo et Strauss [122] déjà évoqué. Notre preuve est basée sur une adaptation de la méthode d'instabilité non-linéaire de Grenier, qui fut introduite dans le contexte des équations d'Euler et de la limite non visqueuse [114]. Cette méthode est particulièrement puissante pour aborder des EDP quasilineaires, lorsqu'on sait que la solution stationnaire dont on veut prouver l'instabilité est régulière. Elle est de plus très flexible (par exemple elle permet de traiter des problèmes de perturbation singulière) et contrairement à la méthode de Guo et Strauss [122], elle est constructive et non basée sur un argument par l'absurde. Parmi les multiples applications de cette méthode en mécanique des fluides, citons parmi beaucoup d'autres, [79], [90], [95], [214]. Le principe consiste à construire une approximation à une ordre arbitrairement élevé au système, afin de pouvoir comparer avec précision la dynamique linéaire instable à la vraie dynamique non linéaire. Pour ce faire, on a besoin d'estimations optimales sur le semi-groupe associé à l'équation linéarisée. Cette méthode sera à nouveau mise en oeuvre (et un peu plus explicitée) dans le Chapitre 3.

Revenons pour finir brièvement sur la question de la dimension. De fait, une inspection de la preuve révèle qu'en utilisant les estimations optimales de croissance sur le semi-groupe linéarisé prouvées ultérieurement dans [140], ce résultat s'étend en dimensions supérieures, en remplaçant les espaces des Sobolev $W^{k,1}$ par des espaces H^k avec des poids polynomiaux en vitesse.

*
* *

La morale que l'on peut tirer cette section est que l'approximation quasineutre par Vlasov-Benney n'est pas valable, dès que l'on se place au voisinage de données initiales instables. Il s'agit à présent d'*identifier* des classes de données initiales pour lesquelles l'approximation convient.

1.5. Dérivation de Vlasov-Benney dans le régime proche de l'analytique et estimations de stabilité en distance de Wasserstein

Dans l'article [110], Grenier justifie la limite quasineutre pour des données uniformément analytiques. Il montre donc que les instabilités à deux bosses n'ont pas d'effet à ce seuil de régularité. La preuve proposée dans [110] est très originale : elle repose sur une ré-écriture semi-lagrangienne du système de Vlasov-Poisson. Grosso modo, le principe est d'exprimer la fonction de distribution f_ε comme une superposition de couches de fluides : étant donné un espace de probabilité $(M, \mu(d\theta))$ choisi au préalable, on écrit la décomposition

$$(1.23) \quad f_\varepsilon(t, x, v) = \int_M \rho_\varepsilon^\theta(t, x) \delta_{v=u_\varepsilon^\theta(t, x)} \mu(d\theta),$$

en choisissant des données initiales $(\rho_\varepsilon^\theta(0, x), u_\varepsilon^\theta(0, x))$ de sorte à avoir la bonne formule de représentation pour $f_\varepsilon(0, x, v)$. Cette idée est expliquée par Zakharov [238], dans le but de montrer l'équivalence entre Benney et Vlasov-Benney (que l'on a évoquée plus tôt). Pour une fonction de distribution donnée, il existe beaucoup de façons de choisir une telle décomposition. Un exemple naturel est le suivant. Considérons $(M, \mu(d\theta)) = (\mathbb{R}^d, \Psi(v) dv)$, où Ψ une fonction régulière strictement positive et d'intégrale égale à 1. La décomposition correspondante d'une donnée initiale f_0 est $\rho^\theta(0, x) = f_0(x, \theta)/\Psi(\theta)$, $u^\theta(0, x) = \theta$.

Cela conduit naturellement à l'étude d'un système couplé d'équations d'Euler-Poisson sans pression :

$$\begin{cases} \partial_t \rho_\varepsilon^\theta + \nabla_x \cdot (\rho_\varepsilon^\theta u_\varepsilon^\theta) = 0, \\ \partial_t u_\varepsilon^\theta + u_\varepsilon^\theta \cdot \nabla_x u_\varepsilon^\theta = -\nabla_x U_\varepsilon, \\ U_\varepsilon - \varepsilon^2 \Delta_x U_\varepsilon = \int_M \rho_\varepsilon^\theta \mu(d\theta) - 1. \end{cases}$$

En effet on remarque qu'une fonction de la forme (1.23) est solution faible au système de Vlasov-Poisson quasineutre si et seulement si les moments $(\rho_\varepsilon^\theta, u_\varepsilon^\theta)$ vérifient ce système. L'article [110] traite du modèle de Vlasov-Poisson pour les électrons mais s'étend sans problème (et l'analyse devient même plus facile) pour les équations pour les ions. Un énoncé (informel) du théorème de Grenier [110] est le suivant.

Théorème 1.4 (Grenier). — Soit $f_0(x, v)$ une donnée initiale analytique en x , et continue et à support compact en v et $(f_{0,\varepsilon})$ une famille de données initiales avec la même régularité, telle que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f_{\varepsilon,0} - f_0\| = 0,$$

en notant $\|\cdot\|$ une norme quantifiant l'analyticité en x , et la continuité en v . Alors, il existe $T > 0$ tel que f_ε converge faiblement sur $[0, T]$ vers une solution à (1.2) avec condition initiale f_0 .

Pouvoir considérer des données seulement continues en vitesse est important, car cela permet notamment de traiter des fonctions à support compact en v . L'énoncé de Grenier est en fait plus précis, il prouve la convergence forte de $(\rho_\varepsilon^\theta, u_\varepsilon^\theta)$ vers (ρ^θ, u^θ) , qui est une solution analytique au système d'Euler-Poisson limite correspondant :

$$(1.24) \quad \begin{cases} \partial_t \rho^\theta + \nabla_x \cdot (\rho^\theta u^\theta) = 0, \\ \partial_t u^\theta + u^\theta \cdot \nabla_x u^\theta = -\nabla_x U, \\ U = \int_M \rho^\theta \mu(d\theta) - 1. \end{cases}$$

Ce système est équivalent au système de Benney déjà évoqué précédemment. Cela conduit à la convergence faible de f_ε vers une solution à Vlasov-Benney en utilisant la décomposition en couches de fluide.

Terminons la discussion sur le théorème de Grenier par la remarque suivante. Les solutions du système limite obtenues par cette méthode sont en fait très régulières, du moins si on choisit bien l'espace $(M, d\mu)$. Il est en effet possible de vérifier qu'étant donnée une solution régulière de (1.24), la fonction de distribution correspondante

$$f(t, x, v) = \int_M \rho^\theta(t, x) \delta_{v=u^\theta(t,x)} \mu(d\theta).$$

dont on sait déjà qu'elle est solution faible à (1.2), est elle-même une solution régulière, au moins dans le cas suivant. Considérons l'exemple de décomposition décrit ci-dessus. Plaçons nous en dimension $d = 1$ pour simplifier (des formules analogues sont valables en toute dimension); notons $u^\theta(t, x) = u(t, x, \theta)$ et remarquons que la fonction $u(0, x, \cdot)$ est, pour tout x , inversible (car égale à l'identité), donc au moins pour un temps assez petit, la fonction $u(t, x, \cdot)$ est, pour tout t, x , également inversible, d'inverse noté $u^{-1}(t, x, \cdot)$. On vérifie alors la formule

$$f(t, x, v) = \frac{\rho^{u^{-1}(t,x,v)}(t, x)}{(\partial_\theta u^\theta)(t, x, u^{-1}(t, x, v))} \Psi(u^{-1}(t, x, v)).$$

ce qui permet de prouver la régularité de f , connaissant celle de (ρ^θ, u^θ) . On voit par ailleurs qu'à t, x fixés, $f(t, x, \cdot)$ peut être vue comme la mesure image de la distribution $\theta \mapsto \rho^\theta(t, x) \Psi(\theta)$ par l'application $\theta \mapsto u^\theta(t, x)$. Cette remarque permet en fait également de comprendre qu'on peut rendre la convergence forte dans l'énoncé du Théorème 1.4.

*
* *

Avec Mikaela Iacobelli, nous avons étudié dans les articles [132, 133] la validité de la limite quasineutre pour des données dans un régime proche de l'analytique. Nous avons montré que le résultat de Grenier demeurerait valable pour des données pouvant être très peu régulières, mais devant être exponentiellement⁽⁶⁾ proches (par rapport à ε) d'une donnée analytique. Nous en donnons ici un énoncé informel et renvoyons aux articles pour les énoncés quantitatifs précis.

⁶. ou doublement exponentiellement

Théorème 1.5. — *Pour $d = 1$, la conclusion du Théorème 1.4 reste valable pour une perturbation dans l'espace des mesures, si cette perturbation est exponentiellement petite (en distance de Wasserstein).*

Pour $d = 2, 3$, la conclusion du Théorème 1.4 reste valable pour une perturbation continue, si cette perturbation est doublement exponentiellement petite, et si la suite de données initiales est à support compact en vitesse.

Notons que dans le cadre de ce résultat, il est tout à fait licite de considérer une perturbation d'un profil vérifiant la condition d'instabilité de Penrose de la Définition 1.1. Mais il n'y a pas de contradiction avec le résultat d'instabilité de la section précédente. La différence avec le Théorème 1.2 vient de la vitesse de convergence qui est ici imposée comme au moins exponentielle, alors que dans le Théorème 1.2, elle n'est que polynomiale. Cette remarque montre par ailleurs que les hypothèses du Théorème 1.5 sont essentiellement optimales, et que la vitesse de convergence des données initiales n'est pas anodine.

Notre approche est basée sur l'utilisation d'estimations de stabilité Wasserstein développées par Loeper [178] et Hauray [145], originellement pensées pour des questions d'unicité et de justification de la limite de champ moyen. Grosso modo, ce sont des inégalités permettant de comparer deux solutions faibles à Vlasov-Poisson (à ε fixé, disons égal à 1 pour fixer les idées) :

$$W(f_1(t), f_2(t)) \lesssim \varphi_{\rho_1, \rho_2}(t) W(f_1(0), f_2(0)),$$

où W désigne une certaine distance de Wasserstein, que nous n'allons pas expliciter dans cette section, et $\varphi_{f_1, f_2}(t)$ est une fonction essentiellement exponentielle, dépendant des densités $\rho_1 = \int f_1 dv$, $\rho_2 = \int f_2 dv$ de f_1 et f_2 . Nous avons revisité ces estimations en régime quasineutre ($\varepsilon > 0$ quelconque) et les avons utilisées pour comparer la solution correspondant à la partie purement analytique à la partie avec la perturbation très peu régulière. L'intérêt de ces estimations de stabilité Wasserstein vient du fait que l'on sait propager l'information requise sur ρ_1 et ρ_2 en fonction du temps et du petit paramètre $\varepsilon > 0$ pour contrôler la fonction $\varphi_{\rho_1, \rho_2}(t)$, même à faible régularité.

La distinction entre les dimensions d'espace provient des faits suivants.

- Pour $d = 1$, Hauray [145] a montré une estimation de type fort-faible (que nous rappellerons dans le Théorème 3.4 du Chapitre 3), de sorte que l'on peut prendre

$$\varphi_{\rho_1, \rho_2}(t) = e^{C(t + \int_0^t \|\rho_1\|_\infty ds)}$$

dans l'estimation de Wasserstein ci-dessus. Cela entraîne que la régularité forte n'est exigée que pour la partie uniformément analytique et en conséquence nous pouvons autoriser une perturbation dans l'espace des mesures sans avoir besoin de comprendre une quelconque propagation de régularité. L'hypothèse de perturbation exponentiellement petite en ε permet d'absorber la croissance exponentielle de φ_{ρ_1, ρ_2} .

- Pour $d = 2$ ou 3 , Loeper [178] démontre une estimation qui nécessite un contrôle L^∞ sur les deux densités ρ_1 et ρ_2 des solutions comparées. Cette estimation n'est donc pas aussi favorable qu'en dimension $d = 1$. Cela entraîne que l'on doit obtenir un contrôle de ce type sur la solution perturbée. A cette fin, nous étudions l'évolution en temps du support en vitesse, quantitativement par rapport à ε . Cela justifie l'hypothèse supplémentaire de support compact faite dans ces cas. Signalons également que la croissance en temps pour φ_{ρ_1, ρ_2} apparaît comme doublement exponentielle, ce qui signifie que vitesse de convergence initiale doit en fait être doublement exponentielle en ε .

L'estimation de l'évolution du support en vitesse est différente selon la dimension envisagée. Cela fait bien entendu complètement écho aux difficultés pour prouver l'existence de solutions globales fortes pour Vlasov-Poisson en dimension $d = 3$. La dimension $d = 2$ est en quelque sorte sous-critique et l'analyse est une conséquence directe d'un principe de comparaison pour une équation différentielle portant sur la taille du support en vitesse. En dimension $d = 3$, nous nous appuyons sur un résultat plus profond de bootstrap, dû à Batt et Rein [31], qui correspond à une adaptation de l'argument de Pfaffelmoser au tore \mathbb{T}^3 .

Signalons pour terminer qu'en dimension $d = 1$, nous avons également été en mesure d'étendre l'estimation de stabilité de Hauray au système de Vlasov avec l'équation de Poisson

$$U - e^U = \rho,$$

par des techniques de calcul des variations. Par suite, le Théorème 1.5 est également valable en dimension $d = 1$ pour ce système.

1.6. Dérivation de Saint-Venant et la méthode d'énergie modulée

Nous avons vu que l'approximation n'était pas valable dès apparition d'une instabilité, mais est-il possible de la valider si on s'assure que les données initiales vérifient une certaine condition de *stabilité*?

Dans l'article [54], Brenier a introduit pour étudier la limite quasineutre une méthode originale, aujourd'hui connue sous le nom de *méthode d'énergie modulée*. L'idée est réminiscente du travail de Yau [236] sur la limite hydrodynamique de modèles de type Ginzburg-Landau ainsi que des estimations de stabilité de Dafermos [76] pour les lois de conservations hyperboliques. Elle a été importée en théorie cinétique simultanément et indépendamment par Golse dans [46], dans le contexte de la limite Euler incompressible pour l'équation de Boltzmann. Dans ce dernier cadre, on parle plutôt de *méthode d'entropie relative*. Nous renvoyons également le lecteur à [180, 106, 57, 208, 126, 30] pour des extensions de cette méthode pour les limites quasineutres.

Le principe fondamental de la stratégie est de *moduler* une fonctionnelle bien choisie qui doit être conservée ou dissipée par le système. Par exemple, le bon choix est l'entropie pour l'équation de Boltzmann. La modulation doit être définie en termes de la solution à l'équation limite. Il faut s'assurer que cette nouvelle fonctionnelle permet bien de mesurer dans un certain sens la distance entre la solution au système original et celle de l'équation cible. Alors, le coeur de l'argument consiste à prouver que la fonctionnelle est une fonction de Lyapunov pour le système : cela suit en général de calculs exacts et d'identités algébriques (telles que des lois de conservation).

Le résultat de Brenier [54] concerne le cas de données singulières, les données monocinétiques

$$(1.25) \quad f(t, x, v) = \rho(t, x) \delta_{v=u(t, x)},$$

qui sont donc des mesures de Dirac en vitesse. On remarque que f est une solution (au sens des distributions) à Vlasov-Benney si et seulement si (ρ, u) est une solution forte au système de Saint-Venant

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \\ \partial_t u + u \cdot \nabla_x u + \nabla_x \rho = 0, \\ (\rho, u)|_{t=0} = (\rho_0, u_0), \end{cases}$$

système bien connu en mécanique des fluides, qui porte également le nom de Shallow Water (ou encore Euler compressible isentropique avec $\gamma = 2$)⁽⁷⁾.

On s'attend à ce qu'une donnée monocinétique corresponde à une situation stable. En effet une mesure de Dirac en vitesse n'est en quelque sorte rien d'autre qu'un cas extrême d'une maxwellienne, à température nulle. Du point de vue physique, ce type de données apparaît comme pertinent lorsqu'on considère que les ions sont *froids* ; en effet, toute distribution de la forme (1.25) satisfait

$$\int f(t, x, v) |v - u(t, x)|^2 dv = \langle f, |v - u(t, x)|^2 \rangle = 0.$$

Or, une maxwellienne est une distribution ayant la forme d'une bosse, ce qui constitue le paradigme d'un équilibre stable. Elle vérifie en effet le critère de stabilité de Penrose [203]

$$(1.26) \quad \forall v \in \mathbb{R}, \mu'(v) = 0 \implies \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu'(w)}{v - w} dw < 0.$$

7. ce qui explique pourquoi on avait appelé (1.2) les équations de Saint Venant cinétiques dans [126]

Mieux encore, une maxwellienne peut être vue comme une fonction radiale décroissante, ce qui correspond à la classe d'équilibres homogènes en vitesse pour laquelle on sait prouver la stabilité au sens de Lyapunov dans l'espace d'énergie (voir l'introduction de ce mémoire à ce sujet).

On souhaite donc considérer le cas de données initiales convergeant dans un certain sens vers une donnée monocinétique :

$$f_{0,\varepsilon} \rightharpoonup \rho_0(x)\delta_{v=u_0(x)}.$$

En suivant [54], on introduit l'énergie modulée

$$\mathcal{H}_\varepsilon(t) := \frac{1}{2} \int f_\varepsilon |v - u(t, x)|^2 dv dx + \frac{1}{2} \int (U_\varepsilon - \rho(t, x))^2 dx + \frac{\varepsilon^2}{2} \int |E_\varepsilon(t, x)|^2 dx,$$

où (ρ, u) est la solution forte du système de Saint-Venant associée à la condition initiale (ρ_0, u_0) , sur un certain intervalle de temps $[0, T]$. Comme son nom l'indique, il s'agit d'une modulation de l'énergie (1.13) par la cible que l'on espère atteindre.

On peut prouver⁽⁸⁾, voir [126], une estimation de la forme

$$(1.27) \quad \frac{d}{dt} \mathcal{H}_\varepsilon(t) \lesssim \mathcal{H}_\varepsilon(t) + o(1)$$

ce qui signifie que si $\mathcal{H}_\varepsilon(0) \rightarrow 0$, alors on a de même $\sup_{[0, T]} \mathcal{H}_\varepsilon(t) \rightarrow 0$. On remarque que $\mathcal{H}_\varepsilon(t) \rightarrow 0$ implique que $f_\varepsilon(t) \rightharpoonup \rho(t, x)\delta_{v=u(t, x)}$, de sorte que l'on a l'implication

$$\mathcal{H}_\varepsilon(0) \rightarrow 0 \implies \forall t \in [0, T], f_\varepsilon(t) \rightharpoonup \rho(t, x)\delta_{v=u(t, x)}.$$

Nous avons donc obtenu une dérivation du système de Saint-Venant dans la limite quasineutre. Notons par ailleurs que dans [132], nous avons montré comment quantifier cette convergence en terme de distance de Wasserstein.

L'estimation (1.27) exprime précisément la stabilité de la donnée monocinétique dans la limite quasineutre. Les calculs y conduisant peuvent paraître miraculeux. Il n'en est rien. Cette estimation de stabilité exprime en réalité que la donnée monocinétique est le minimiseur d'une certaine entropie (sous contraintes). Il se trouve que cette entropie n'est autre que l'énergie du système. A cet égard, la méthode d'énergie modulée apparaît comme le pendant des méthodes de stabilité non linéaires basées sur des méthodes variationnelles de [31, 62].

*
* *

Il semble naturel d'essayer de généraliser cette méthode afin de traiter le cas d'autres données stables. Avec Maxime Hauray, nous avons été en mesure de justifier la limite pour des suites de données convergeant vers un équilibre $\mu(v)$ supposé radial décroissant [131]. En s'appuyant sur l'analogie tout juste évoquée avec les méthodes de stabilité non linéaire, l'idée est de moduler une quantité conservée minimisée (sous contraintes) par l'équilibre μ .

L'équation finale n'intervient pas vraiment dans ce résultat, puisque μ est lui-même toujours un équilibre pour ce système. Malheureusement, nous avons montré qu'il est impossible de considérer le cas de données avec une dynamique pour l'équation finale, pour des raisons de symétrie et de rigidité.

En effet, comme nous venons de l'expliquer, la méthode d'énergie modulée requiert que la solution du système limite minimise une certaine entropie. Le calcul des variations nous apprend alors que cette solution doit être de la forme

$$f \equiv g(t, x, -|v - v(t, x)|^2).$$

Le fait est que nous prouvons dans [131] que les solutions au moins L^1_{loc} du système de Vlasov-Benney vérifiant cet Ansatz sont nécessairement de la forme $g(-|v - \bar{v}|^2)$ (où \bar{v} est fixé), c'est-à-dire correspondent à des équilibres homogènes radiaux. Autrement dit, une autre méthode doit être développée pour espérer obtenir une limite avec une dynamique. C'est l'objet de la section suivante.

8. Nous reviendrons sur des estimées proches, dans un contexte plus complexe, dans le chapitre 2.

1.7. Dérivation de Vlasov-Benney et stabilité au sens de Penrose-Mouhot-Villani, ponctuelle en espace

Les considérations précédentes suggèrent fortement un changement de point de vue. Alors que la méthode d'énergie modulée pouvait être comprise comme le pendant des méthodes variationnelles de stabilité non linéaire, la méthode que nous avons mise au point avec Frédéric Rousset peut être vue comme le pendant des méthodes de stabilité asymptotique à la Mouhot et Villani [189].

Commençons par rappeler la notion de stabilité au sens de Penrose, telle qu'elle a été introduite par Mouhot et Villani [189].

Définition 1.2. — *Un profil $\mathbf{f}(v)$ satisfait la condition de stabilité de Penrose-Mouhot-Villani s'il existe $c_0 > 0$ tel que*

$$\inf_{(\gamma, \tau, \eta) \in \mathbb{R}_+^3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^d} \left| 1 - \int_0^{+\infty} e^{-(\gamma+i\tau)s} \frac{i\eta}{1+|\eta|^2} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} e^{-is\eta \cdot v} (\nabla_v \mathbf{f})(v) dv ds \right| \geq c_0.$$

Rappelons que cette condition généralise (1.26). Il est également utile d'introduire une notation pour les normes de Sobolev à poids, pour tout $k \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{R}$:

$$\|f\|_{\mathcal{H}_r^k} := \left(\sum_{|\alpha|+|\beta| \leq k} \int_{\mathbb{T}^d} \int_{\mathbb{R}^d} (1+|v|^2)^r |\partial_x^\alpha \partial_v^\beta f|^2 dv dx \right)^{1/2}$$

Le théorème de dérivation de Vlasov-Benney, prouvé avec Frédéric Rousset [142] est le suivant.

Théorème 1.6. — *Soit $k_0 = 4 + d, r_0 = \max(d, 2 + \frac{d}{2})$. Soit $m > k_0, r > r_0$ et $M_0 > 0, c_0 > 0$. Supposons que pour tout $\varepsilon \in (0, 1]$, $\|f_{0,\varepsilon}\|_{\mathcal{H}_r^m} \leq M_0$ et pour tout $x \in \mathbb{T}^d$, $f_{0,\varepsilon}(x, \cdot)$ satisfait la condition de stabilité de Penrose-Mouhot-Villani (pour le même c_0). Supposons que $f_{0,\varepsilon} \rightarrow f_0$ dans L^2 . Alors il existe $T > 0$ tel que*

$$\sup_{[0, T]} \|f_\varepsilon(t) - f(t)\|_{L^2} \rightarrow 0,$$

où $f(t)$ est solution de Vlasov-Benney avec donnée initiale f_0 .

Ce résultat peut être interprété de la manière suivante : la notion pertinente de stabilité pour la limite quasineutre est une stabilité à la Penrose-Mouhot-Villani, ponctuellement en x .

- On rappelle que les profils typiques vérifiant la condition de stabilité de Penrose-Mouhot-Villani sont ceux ayant la forme d'une bosse (voir [189]). Les petites perturbations de ces bosses sont également stables. Un exemple de données admissibles est donc donné par les maxwelliennes locales (régulières)

$$M(x, v) = \frac{\rho(x)}{(2\pi T(x))^{d/2}} \exp\left(-\frac{|v - u(x)|^2}{T(x)}\right).$$

Notons que dans l'énoncé de ce théorème, il n'y a pas de taux de convergence en ε , mais nous pensons qu'il est possible d'en obtenir un en raffinant l'analyse.

- Il s'agit en quelque sorte d'une généralisation multi-dimensionnelle de deux résultats dus à Grenier.
 - Dans [111], il traite le cas très particulier des données de type "water bags" (cela correspond, *grosso modo* à des données constantes par morceaux, prenant un nombre fini de valeurs) qui, pour tout x , ont un graphe en v qui a la forme d'une bosse. Pour ce faire, il a utilisé le formalisme pseudo-différentiel qu'il introduit dans [111] et voit la limite quasineutre comme une limite singulière pour une système hydrodynamique équivalent à Vlasov-Poisson pour de telles données.
 - Dans l'acte de conférence [112], il annonce une dérivation avec une esquisse de preuve (mais sans preuve complète formellement écrite) pour des données initiales régulières f_0 telles que pour tout x , la fonction $v \mapsto f_0(x, v)$ a la forme d'une bosse. La méthode proposée est basée sur l'utilisation d'une fonctionnelle à poids (dépendant de la solution elle-même).

Précisons qu'à la fois [111] et [112] concernent en fait la limite quasineutre du système de Vlasov-Poisson pour les électrons, mais que tout peut être aisément adapté au cas du système pour les ions.

*
* *

Concentrons nous à présent sur les idées principales de la preuve du Théorème 1.6. Rappelons que nous avons un contrôle des données initiales dans l'espace de Sobolev \mathcal{H}_r^m . Introduisons

$$\mathcal{N}_{m,r}(t, f_\varepsilon) := \|f_\varepsilon\|_{L^\infty((0,t), \mathcal{H}_r^{m-1})} + \|\rho_\varepsilon\|_{L^2((0,t), H^m)},$$

avec $\rho_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^d} f_\varepsilon dv$, que l'on va chercher à propager. Nous prenons ainsi en compte la perte de dérivée constatée dans l'analyse formelle en ne demandant qu'un contrôle \mathcal{H}_r^{m-1} pour la fonction de distribution. En revanche, on n'autorise pas de perte de régularité pour la densité.

Comme nous allons le voir, le point clé est que la force du système de Vlasov-Benney, pour laquelle on perd une dérivée, n'est pas calculée via toute l'information contenue dans la fonction de distribution f_ε , mais seulement grâce à sa moyenne en vitesse ρ_ε . Grâce à la condition de stabilité de Penrose, nous allons être en mesure d'établir une estimation Sobolev sans perte pour cette densité.

Il s'agit donc de trouver $T > 0$, $R > 0$ tels que

$$\forall \varepsilon \in (0, 1], \quad \sup_{[0, T]} \mathcal{N}_{m,r}(t, f_\varepsilon) \leq R.$$

La preuve est basée sur un argument de bootstrap. L'analyse qui suit est réalisée sur l'intervalle $[0, T_\varepsilon)$, avec $T_\varepsilon = \sup\{t > 0, \mathcal{N}_{m,r}(t, f_\varepsilon) \leq R\}$. Il s'agit de montrer qu'il existe $T_0 > 0$, indépendant de ε , tel que $T_\varepsilon \geq T_0$. Il vient d'une estimation d'énergie tout à fait standard que la quantité clé à contrôler correspond à la partie $\|\rho_\varepsilon\|_{L^2((0,t), H^m)}$.

L'idée naturelle est d'utiliser le fait que modulo des commutateurs, $\partial_x^m f_\varepsilon$ est solution de l'équation linéarisée autour de f_ε , c'est-à-dire

$$\partial_t \partial_x^m f_\varepsilon + v \cdot \nabla_x \partial_x^m f_\varepsilon + \partial_x^m E_\varepsilon \cdot \nabla_v f_\varepsilon + E_\varepsilon \cdot \nabla_v \partial_x^m f_\varepsilon = S,$$

où la source S ne devrait faire intervenir que des termes de reste.

Cette équation est intéressante car dans le cas où $\varepsilon = 1$, et où $f \equiv \mu(v)$ ne dépend ni de t , ni de x , alors $E = 0$ et l'équation linéarisée se réduit à

$$\begin{aligned} (\partial_t + v \cdot \nabla_x) g + E_g \cdot \nabla_v \mu(v) &= S, \\ E_g &= -\nabla_x (I - \Delta_x)^{-1} \rho_g. \end{aligned}$$

Il s'agit de l'équation étudiée par Mouhot et Villani [189] en vue de l'amortissement Landau. Grâce à la méthode des caractéristiques, on a

$$g(t, x, v) = g|_{t=0}(x - tv, v) - \int_0^t E_g(x - (t-s)v) \cdot \nabla_v \mu(v) ds + \mathcal{S},$$

en notant \mathcal{S} la partie correspondant à la source S . Par conséquent, en intégrant en v , on obtient une équation intégrale portant sur $\rho_g = \int_{\mathbb{R}^d} g dv$:

$$\rho_g(t, x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_x (I - \Delta_x)^{-1} \rho_g(x - (t-s)v) \cdot \nabla_v \mu(v) dv ds + \mathcal{S} + \mathcal{S}_0,$$

en notant \mathcal{S}_0 la partie correspondant à la donnée initiale. On constate dans l'intégrale un découplage en x et une structure de produit de convolution en temps. En s'appuyant l'analyse de Fourier et en utilisant la condition de stabilité de Penrose pour $\mu(v)$, Mouhot et Villani [189] montrent comment obtenir une bonne estimation de ρ_g dans $L_{t,x}^2$.

Il y a néanmoins plusieurs obstacles à surmonter pour ce ramener à une situation proche de ce cas modèle. Tout d'abord, parmi les termes de commutateurs, il apparaît des termes sous-principaux qui font intervenir m dérivées de f , tels que :

$$\partial_x E_\varepsilon \cdot \nabla_v \partial_x^{m-1} f_\varepsilon,$$

alors qu'on ne contrôle que $m - 1$ dérivées de f_ε . L'idée est de considérer comme nouvelle inconnue la famille de fonctions $f_{I,J} := \partial_x^I \partial_v^J f_\varepsilon$ for $I, J \in \{1, \dots, d\}^m$.

Les $f_{I,J}$ satisfont des équations de la forme

$$\partial_t f_{I,J} + v \cdot \nabla_x f_{I,J} + E_\varepsilon \cdot \nabla_v f_{I,J} + E_{f_{I,J}} \cdot \nabla_v f_\varepsilon + (\text{termes d'ordre 0}) = S_{I,J},$$

où $S_{I,J}$ est un reste que l'on contrôle bien et les termes d'ordre 0 correspondent aux termes sous-principaux qui posaient problème. Ces termes d'ordre 0 font que les équations sur les $f_{I,J}$ sont couplées.

Nous sommes donc amenés à étudier le système d'inconnue $(f_{I,J})_{I,J}$. Bien entendu, si l'on contrôle tous les moyennes de tous les $f_{I,J}$, on contrôle en particulier celles des $\partial_x^m f$ et donc la norme H^m de ρ , comme désiré. Dans ce procédé, le plus important est de comprendre l'équation

$$(\partial_t + v \cdot \nabla_x + E_\varepsilon \cdot \nabla_v)g + E_g \cdot \nabla_v f_\varepsilon = S, \quad E_g = \nabla_x (I - \varepsilon^2 \Delta_x)^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} g \, dv,$$

qui correspond à la partie diagonale dominante dans le système d'équations. Comme f_ε dépend de la variable x , il y a un champ de force E_ε non trivial.

Pour simplifier la géométrie de l'équation, nous utilisons un changement de variables semi-lagrangien, proche de l'identité, pour redresser le champ de vecteurs. Cela nous conduit à l'étude de l'équation

$$(\partial_t + \Phi(t, x, v) \cdot \nabla_x)g + E_g \cdot \nabla_v f_\varepsilon = S$$

où $\Phi(t, x, v)$ est un champ de vecteurs défini comme la solution à l'équation de Burgers

$$\partial_t \Phi + \Phi \cdot \nabla_x \Phi = E, \quad \Phi|_{t=0} = v.$$

Ce champ de vecteurs est proche de v pour des temps petits. Ce changement de variables est voisin, mais différent, de celui utilisé en (1.23).

On procède alors comme dans le cas $f_\varepsilon \equiv \mu(v)$ en intégrant le long des caractéristiques et en prenant la moyenne en vitesse. En faisant comme si $\Phi = v$, cela nous amène à étudier l'équation intégrale du type

$$\rho_g = K_H (I - \varepsilon^2 \Delta)^{-1} \rho_g + R,$$

avec

$$K_{H(t,s,x,v)}(G) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla_x G)(s, x - (t-s)v) \cdot H(t, s, x, v) \, dv \, ds,$$

$$H(t, s, x, v) = \nabla_v f_\varepsilon(s, x - (t-s)v, v).$$

On remarque immédiatement qu'il semble y avoir une perte de dérivée en x dans l'expression de l'opérateur intégral K_H ; cette perte de dérivée fait bien sûr écho à celle constatée sur Vlasov-Benney. Cependant, on a le résultat suivant.

Proposition 1.1. — *L'opérateur K_H est borné sur L^2 si le champ de vecteurs H est suffisamment régulier et décroissant à l'infini en vitesse.*

C'est un effet dans l'esprit des lemmes de moyenne de Golse, Lions, Perthame et Sentis [105] (voir [17, 7] pour des développements récents). Remarquons que par rapport aux lemmes de moyenne classiques, il y a ici aussi une moyenne en temps. De plus le gain est ici en quelque sorte d'une dérivée, à comparer à la demi-dérivée obtenue classiquement.

La Proposition 1.1 permet, quitte à modifier le reste R , de remplacer la fonction de distribution f_ε intégrée le long des caractéristiques par la donnée initiale $f_{0,\varepsilon}$ et de traiter le cas du champ de vecteurs Φ au lieu de v . Elle permet aussi de traiter le couplage entre les différents $f_{I,J}$ et de justifier pourquoi on peut se concentrer sur la partie diagonale du système. Le prix à payer est que l'on doit considérer des temps suffisamment petits (mais indépendants de ε). On étudie donc

$$(1.28) \quad \rho_g = K_{\nabla_v f_{0,\varepsilon}(x,v)} (I - \varepsilon^2 \Delta)^{-1} \rho_g + R.$$

La dernière étape consiste construire une paramétrix pour cette équation. Soit $\gamma > 0$ un paramètre à être choisi (assez grand). L'idée est que l'on peut écrire l'opérateur

$$e^{-\gamma t} K_{\nabla_v f_{0,\varepsilon}} (e^{\gamma t} (I - \varepsilon^2 \Delta)^{-1} \cdot)$$

comme un opérateur pseudo-différentiel semi-classique, de symbole

$$a(\gamma, \tau, x, \eta) := \int_0^{+\infty} e^{-(\gamma+i\tau)s} \frac{i\eta}{1+|\eta|^2} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} e^{-is\eta \cdot v} \nabla_v f_{0,\varepsilon}(x, v) dv ds.$$

On utilise ici la quantification

$$(Op_a^\gamma)u(t, x) = \int_{\mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}} e^{i(\tau t + k \cdot x)} a(x, \gamma, \tau, k) \hat{u}(\xi) d\xi$$

où $d\xi = dk d\tau$ et la mesure sur \mathbb{Z}^d est la mesure discrète. La transformée de Fourier \hat{u} est définie par la formule

$$\hat{u}(\xi) = (2\pi)^{-(d+1)} \int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}} e^{-i(\tau t + k \cdot x)} u(t, x) dt dx.$$

Le paramètre semi-classique correspond ici à ε . Pour un symbole $a(x, \zeta)$, on définit pour $\varepsilon \in (0, 1]$, $a^\varepsilon(x, \gamma, \tau, k) = a(x, \varepsilon\gamma, \varepsilon\tau, \varepsilon k)$ et on pose, pour $\gamma \geq 1$,

$$(Op_a^{\varepsilon, \gamma} u)(t, x) = (Op_a^\gamma u)(t, x).$$

En utilisant ces notations, on peut donc écrire l'équation (1.28) comme

$$Op_{(1-a)}^{\gamma, \varepsilon}(e^{-\gamma t} h) = \mathcal{R}.$$

Il vient que la condition de stabilité de Penrose revient précisément à dire que

$$\inf |1 - a| \geq c_0$$

de sorte que le symbole $1 - a$ est elliptique. Nous utilisons finalement un calcul pseudo-différentiel semi-classique (avec un paramètre γ) pour inverser l'opérateur $Op_{(1-a)}^{\gamma, \varepsilon}$ à reste petit près.

A cette fin, nous utilisons l'estimation

$$\|Op_b^{\gamma, \varepsilon} Op_c^{\gamma, \varepsilon} u - Op_{bc}^{\gamma, \varepsilon} u\|_{L^2} \lesssim \frac{1}{\gamma} |b| |c| \|u\|_{L^2},$$

où $|\cdot|$ est une certaine semi-norme définie dans l'appendice de [142], que l'on applique à

$$b = \frac{1}{1-a}, \quad c = 1-a, \quad u = e^{-\gamma t} h,$$

ce qui donne

$$\|\rho_g\|_{L^2} \leq \|Op_{\frac{1}{1-a}}^{\gamma, \varepsilon} \mathcal{R}\|_{L^2} + \frac{1}{\gamma} \left| \frac{1}{1-a} \right| \|1-a\| \|\rho_g\|_{L^2}.$$

On peut alors choisir γ assez grand, ce qui fournit une estimation à ρ_g dans $L_{t,x}^2$ (sur un intervalle de temps assez court), et donc une estimation de ρ_ε dans $L_t^2 H^m$ (sur le même intervalle de temps). Ces estimations permettent de mettre en oeuvre l'argument de bootstrap souhaité.

*
* *

Comme corollaire de notre résultat, nous avons obtenu une théorie d'existence et d'unicité pour Vlasov-Benney, pour de telles données. L'existence est une conséquence directe du Théorème 1.6, tandis que l'unicité nécessite une analyse séparée qui s'appuie sur des idées analogues.

Notons que l'on peut, de manière très naturelle, définir également une notion de stabilité au sens de Penrose pour Vlasov-Benney, qui s'écrirait :

$$\inf_{(\gamma, \tau, \eta) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^d} \left| 1 - \int_0^{+\infty} e^{-(\gamma+i\tau)s} i\eta \cdot \int_{\mathbb{R}^d} e^{-is\eta \cdot v} (\nabla_v \mathbf{f})(v) dv ds \right| \geq c_0.$$

Il se trouve que la condition de la Définition 1.2 est plus forte et implique cette condition. Nous pensons néanmoins qu'il est possible de montrer l'existence de solutions à Vlasov-Benney avec une telle condition. Il est naturel que pour dériver Vlasov-Benney à partir de Vlasov-Poisson, il faille une condition plus forte, adaptée au système à $\varepsilon > 0$ fixé. Il s'agirait donc de s'appuyer sur un autre schéma d'approximation. L'idée serait d'établir des estimations Sobolev a priori grâce à la condition de stabilité, puis d'obtenir une approximation par des solutions analytiques. Le point clé serait alors de prouver que le temps d'existence

d'une solution analytique peut être minoré par une quantité ne dépendant que de normes Sobolev (un tel résultat peut être prouvé par exemple pour les équations d'Euler incompressibles, voir [163] et les références citées). Ce qui permettrait in fine de passer à la limite pour recouvrir la vraie solution.

Signalons également que ce résultat permet d'obtenir un théorème d'existence pour le système d'Euler multiphasique (1.24), en s'appuyant à nouveau sur les idées de Zakharov [238]. En effet, en exploitant la décomposition en couches de fluide, on voit que si l'on suppose que la donnée initiale $(\rho_0^\theta, u_0^\theta)$ pour (1.24) vérifie les propriétés suivantes, écrites en dimension $d = 1$ pour simplifier :

- pour tout x , l'application $\theta \mapsto u_0^\theta(x) =: u_0(x, \theta)$ est inversible ;
- pour tout x , l'application $\theta \mapsto \frac{\rho_0^{u_0^{-1}(x, \theta)}(x)}{(\partial_\theta u_0)(x, u_0^{-1}(x, v))}$ vérifie la condition de stabilité de Penrose,

alors (en supposant par ailleurs suffisamment de régularité et d'intégrabilité), il y a existence locale d'une unique solution à Vlasov-Benney avec donnée initiale $f_0(x, v) = \frac{\rho_0^{u_0^{-1}(x, v)}(x)}{(\partial_\theta u_0)(x, u_0^{-1}(x, v))}$. Cela fixe alors un champ de forces $-\nabla_x U$ et une fois celui-ci connu, on obtient aisément une solution forte à (1.24) avec donnée initiale $(\rho_0^\theta, u_0^\theta)$, en résolvant dans un premier temps les équations de Burgers pour les u^θ (avec source fixée), puis en résolvant les équations de transport pour les ρ^θ , sur un temps uniforme en θ . En utilisant à nouveau la décomposition en couches de fluide, et la propriété d'unicité de la solution pour Vlasov-Benney, on déduit que U est bien donnée par la bonne loi en les ρ^θ .

*
* *

Au vu des énoncés de Théorèmes 1.2 et 1.6, on peut conjecturer qu'étant donnée une suite de données initiales convergeant vers une donnée $f_0(x, v)$, s'il existe $x \in \mathbb{T}^d$ tel que $f_0(x, \cdot)$ viole la condition de stabilité de Penrose, la limite formelle vers Vlasov-Benney est fautive. Pour prouver un tel résultat, il est vraisemblablement utile de supposer que f_0 est analytique, au moins pour assurer l'existence d'une solution locale à Vlasov-Benney partant de f_0 . On peut penser qu'une conjonction des méthodes utilisées pour les Théorèmes 1.1 et 1.2 saurait être utile.

1.8. Le cas du système de Vlasov-Poisson pour les électrons

Lorsque l'on considère la limite quasineutre du modèle de Vlasov-Poisson pour les électrons, un phénomène nouveau d'oscillations haute fréquence apparaît. En effet, en ce qui concerne le système d'Euler incompressible cinétique (1.5), la donnée initiale associée se doit de satisfaire les contraintes

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_0 dv = 1, \quad \nabla_x \cdot \int_{\mathbb{R}^d} v f_0 dv = 0.$$

Si la suite de données initiales converge vers une donnée initiale f_0 satisfaisant ces conditions, on parle de données initiales *bien préparées* (auquel cas les oscillations n'apparaissent pas) ou au contraire, si ce n'est pas le cas, on parle de données *mal préparées* (c'est le cas général, où ces oscillations apparaissent). Ces oscillations, décrites dans l'article de Grenier [110], et dont le rôle premier est donc de servir de couche initiale, ne sont pas amorties dans le temps et sont de grande amplitude (de taille $1/\varepsilon$). Elles apparaissent en particulier au niveau du champ électrique.

De tels problèmes n'apparaissent pas pour l'analyse concernant le modèle de Vlasov-Poisson pour les ions (en quelque sorte toutes les données initiales sont bien préparées dans ce cas). Notre but dans cette section finale est de discuter l'extension de nos résultats à ce modèle.

*
* *

Signalons pour commencer que les résultats de non-dérivation de (1.5) sont tout à fait semblables à ceux décrits dans la Section 1.4, voir à nouveau [131].

Les résultats concernant le régime proche de l'analytique de la Section 1.5 ainsi que ceux concernant une convergence vers un Dirac en vitesse de la Section 1.6 sont également valables pour des données mal

préparées, le prix à payer étant qu'il faut filtrer les oscillations pour obtenir le système limite attendu, voir [110, 180, 133].

*
* *

L'adaption de la dérivation de la Section 1.7, pour des données à régularité Sobolev, stables au sens de Penrose-Mouhot-Villani, ponctuellement en x , est plus délicate. Nous allons évoquer pour clore ce chapitre un travail en cours avec Frédéric Rousset [143] qui aborde une telle extension. Elle demande en fait une analyse spécifique, qui requiert un affinage conséquent des techniques développées dans [142]. Même dans le cas de données bien préparées, il y a des ingrédients nouveaux à apporter. En effet l'algèbre du système limite formel n'est pas compatible avec celle du système à ε fixé : lorsqu'on passe à la limite dans l'équation de Poisson, on n'obtient pas directement la loi satisfaite par la pression. Cela impose l'introduction de deux conditions de Penrose, une adaptée au système final, et l'autre au système de Vlasov-Poisson usuel. Après découpage microlocal, ces deux conditions permettent d'obtenir des estimations sans perte sur la densité ainsi que sur un moment d'ordre deux adéquat. Dans le cas de données initiales mal préparées, la présence des oscillations d'amplitude $1/\varepsilon$ dans le champ électrique pose des problèmes nouveaux à toutes les étapes de l'analyse, qui font l'objet de [143]. Il s'agit d'identifier les bonnes quantités pour lesquelles des estimations uniformes peuvent être obtenues.

Chapitre 2

CORRECTIONS À LA LIMITE QUASINEUTRE : ONDES LONGUES ET COUCHES LIMITES

Nous décrivons dans ce chapitre les résultats de [129], puis des résultats en collaboration avec David Gérard-Varet et Frédéric Rousset [92, 93].

*
* *

Ce chapitre peut être vu comme un prolongement du précédent, et ce dans deux directions distinctes.

- Nous avons remarqué au cours du chapitre précédent que la limite quasineutre pouvait être interprétée comme un problème du comportement en temps long pour des solutions du système de Vlasov-Poisson. Il est possible dans certains cas d’explorer la dynamique sur des échelles de temps plus longues et donc aller en quelque sorte au-delà de la description quasineutre. Ceci correspond au régime dit des *ondes longues*. Dans la Section 2.1, nous introduisons un scaling ondes longues pour l’équation de Vlasov-Poisson et expliquons comment dériver l’équation de KdV en dimension 1 d’espace (ou de Zakharov-Kuznetsov en dimension supérieure).
- Dans le chapitre précédent, tous les problèmes considérés ne concernaient que des domaines sans bord. Une question naturelle est de s’intéresser aux éventuels effets de bord. Dans la Section 2.2, on aborde ce problème en étudiant la limite quasineutre pour une approximation hydrodynamique du système de Vlasov-Poisson, le système d’Euler-Poisson. On montrera qu’il est possible, pour des flux sortants, de mener une étude quasiment exhaustive des phénomènes de couches limites .

Pour ces deux problèmes, il apparaîtra que l’énergie physique des systèmes considérés permet de comprendre comment les “symétriser” et ainsi obtenir des estimations de stabilité adéquates.

2.1. Régime ondes longues pour le système de Vlasov-Poisson

2.1.1. Introduction. — Considérons le système de Vlasov-Poisson pour les ions, avec des électrons suivant la loi de Maxwell-Boltzmann $n_e = e^\phi$ où ϕ désigne comme d’habitude le potentiel électrique. En présence d’un champ magnétique extérieur $b = e_1$ (où (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée de \mathbb{R}^3), nous obtenons le système suivant, avec $t \geq 0$, $x \in \mathbb{T}^3$, $v \in \mathbb{R}^3$:

$$(2.1) \quad \begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + (E + v \wedge b) \cdot \nabla_v f = 0, \\ E = -\nabla_x \phi, \\ -\Delta_x \phi + e^\phi = \int_{\mathbb{R}^3} f dv, \\ f|_{t=0} = f_0. \end{cases}$$

Nous nous intéresserons également à la version unidimensionnelle de ce système, auquel cas il n’y a pas de champ magnétique.

La motivation du travail présenté dans ce chapitre provient de travaux indépendants dus à Lannes, Linares et Saut [168] d’une part, et Guo et Pu [120, 206] d’autre part. Ces auteurs ont étudié la limite

ondes longues de systèmes de Euler-Pression isothermes ou sans pression. Précisément, dans l'article [168], Lannes, Linares et Saut ont cherché des solutions au système d'Euler-Poisson sans pression, dépendant des variables mises à l'échelle $(\varepsilon^{1/2}(x_1 - t), \varepsilon^{1/2}x_2, \varepsilon^{1/2}x_3, \varepsilon^{3/2}t)$. Ceci les a conduit à étudier le comportement des solutions du système suivant, lorsque le petit paramètre ε tend vers 0.

$$(2.2) \quad \begin{cases} \varepsilon \partial_t \rho - \partial_{x_1} \rho + \nabla_x \cdot ((1 + \varepsilon \rho)u) = 0, \\ \varepsilon \partial_t u - \partial_{x_1} u + \varepsilon u \cdot \nabla_x u = E + \varepsilon^{-1/2} u \wedge b, \quad u = (u_1, u_2, u_3), \\ E = -\nabla_x \phi, \\ -\varepsilon^2 \Delta_x \phi + e^{\varepsilon \phi} = 1 + \varepsilon \rho. \end{cases}$$

Dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, on s'attend à dériver des équations dispersives non-linéaires, comme cela est suggéré dans les papiers de Zakharov et Kuznetsov [239] et Laedke et Spatschek [165].

- En 1D, à la fois [168] et [120] établissent la convergence vers l'équation de Korteweg-de Vries (KdV)

$$\partial_t \phi_1 + \phi_1 \partial_x \phi_1 + \partial_{xxx}^3 \phi_1 = 0.$$

- En 3D, ce qui correspond au cadre de (2.2), les travaux [168] et [206] dérivent une généralisation en haute dimension de l'équation de KdV, qui est appelée équation de Zakharov-Kuznetsov (ZK) :

$$(2.3) \quad \partial_t \phi_1 + \phi_1 \partial_x \phi_1 + \partial_{x_1} \Delta \phi_1 = 0.$$

- Avec un autre type de scaling anisotrope (en la variable d'espace), Pu a également été en mesure de dériver en 2D l'équation de Kadomstev-Petviashvili II (KP-II) [206]. Bien que nous n'évoquons pas d'avantage cette équation dans ce mémoire, il est possible, grâce aux méthodes développées dans [129], d'étudier la limite vers KP-II, voir en particulier [129, Annex A].

Il y a eu un grand nombre de travaux mathématiques dont l'objectif a été d'étudier des limites ondes longues vers KdV (et certaines de ses généralisations multi-dimensionnelles), en partant de divers modèles, tels que les équations des water waves [73, 220, 44, 8], ou de Schrödinger non linéaires [41, 42, 66, 96], parmi beaucoup d'autres.

Il existe un lien au moins formel entre le système de Vlasov-Poisson (2.1) et le système de Euler-Poisson sans pression, grâce aux données monocinétiques (i.e. des mesures de Dirac en vitesse). Cela suggère une étude de (2.1) en régime ondes longues. En suivant cette idée, nous recherchons des solutions de la forme

$$(2.4) \quad \begin{cases} f_\varepsilon(t, x, v) = \varepsilon^3 \tilde{f}_\varepsilon(\varepsilon^{3/2}t, \varepsilon^{1/2}(x_1 - t), \varepsilon^{1/2}x_2, \varepsilon^{1/2}x_3, \varepsilon^{-1}v), \\ \phi_\varepsilon(x, v) = \varepsilon \tilde{\phi}_\varepsilon(\varepsilon^{3/2}t, \varepsilon^{1/2}(x_1 - t), \varepsilon^{1/2}x_2, \varepsilon^{1/2}x_3). \end{cases}$$

Ici, la normalisation est calibrée de sorte que les deux premiers moments $\rho_\varepsilon := \int f_\varepsilon dv$ et $u_\varepsilon := \frac{\int f_\varepsilon v dv}{\int f_\varepsilon dv}$ suivent l'Ansatz de Lannes, Linares et Saut. Dans notre analyse, nous devons également imposer que la fonction de distribution \tilde{f}_ε s'approche d'une mesure de Dirac en vitesse, de sorte à s'approcher de la dynamique Euler-Poisson. En oubliant volontairement les $\tilde{\cdot}$ pour alléger l'écriture, nous obtenons finalement le système suivant :

$$(2.5) \quad \begin{cases} \varepsilon \partial_t f_\varepsilon - \partial_{x_1} f_\varepsilon + \varepsilon v \cdot \nabla_x f_\varepsilon + \left(E_\varepsilon + \frac{v \wedge b}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \cdot \nabla_v f_\varepsilon = 0, \\ E_\varepsilon = -\nabla_x \phi_\varepsilon, \\ -\varepsilon^2 \Delta_x \phi_\varepsilon + e^{\varepsilon \phi_\varepsilon} = \int_{\mathbb{R}^3} f_\varepsilon dv, \\ f_{\varepsilon, |t=0} = f_{\varepsilon, 0}. \end{cases}$$

Le but de l'article [129] est d'étudier le comportement, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, des solutions de (2.5), qui s'approchent également (dans un sens à rendre précis) au temps initial vers une donnée monocinétique. D'après la discussion précédente, nous nous attendons à dériver l'équation de ZK.

*
* *

Pour prouver ce résultat, nous allons appliquer une stratégie différente de celles de [168, 120, 206]. Nous nous appuyons sur la méthode de l'énergie modulée (ou de l'entropie relative), déjà introduite dans la Section 1.6 du Chapitre 1. Rappelons que le principe fondamental de la stratégie est de *moduler* une fonctionnelle bien choisie qui doit être conservée ou dissipée par le système. Les estimations ainsi obtenues doivent être comprises comme des estimations de *stabilité* : ainsi, les résultats que nous énonçons peuvent être interprétés comme la stabilité des données monocinétiques, dans le régime ondes longues, avec une dynamique dictée par KdV ou ZK. Elles suggèrent également, par analogie avec la limite quasineutre, que des mécanismes de stabilité ou d'instabilité à la Penrose sont en jeu ; il est par exemple naturel de penser que les instabilités à deux bosses peuvent déstabiliser le système et rendre la limite formelle fautive (mais ces instabilités sont bien entendu précisément évitées pour des données monocinétiques).

Pour finir, nous mentionnons que la méthodologie que nous proposons peut aussi être utilisée pour étudier la limite vers KdV pour Euler-Poisson en une dimension d'espace, en partant des solutions globales faibles construites par Cordier et Peng [69].

2.1.2. Dérivation de Zakharov-Kuznetsov. — Nous allons nous concentrer sur la dérivation de Zakharov-Kuznetsov. Nous renvoyons le lecteur vers [129] pour une preuve de la dérivation de KdV en $1D$, écrite principalement à des fins pédagogiques (le principe de la preuve est le même mais les calculs sont moins techniques et par conséquent peut-être plus lisibles).

L'énergie pour le système (2.5) s'écrit

$$(2.6) \quad \mathcal{E}_\varepsilon(t) := \frac{1}{2} \int f_\varepsilon |v|^2 dv dx + \frac{1}{2} \varepsilon \int |\nabla_x \phi_\varepsilon|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon^2} \int (e^{\varepsilon \phi_\varepsilon} (\varepsilon \phi_\varepsilon - 1) + 1) dx,$$

et il s'agit une fonction constante ou décroissante du temps. Nous pouvons observer (comme dans [126]) que le troisième terme a une structure en $L \log L$,

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int (e^{\varepsilon \phi_\varepsilon} (\varepsilon \phi_\varepsilon - 1) + 1) dx = \frac{1}{\varepsilon^2} \int (e^{\varepsilon \phi_\varepsilon} \log(e^{\varepsilon \phi_\varepsilon} / e^0) - e^{\varepsilon \phi_\varepsilon} + e^0) dx,$$

qui est en quelque sorte réminiscente de celle de l'équation de Boltzmann (à ce sujet, nous nous référons aux travaux de Golse [46] et de Saint-Raymond [215, 217], [216] sur la limite vers Euler incompressible) ; une telle structure est également cruciale pour la limite ondes longues.

Nous pouvons énoncer le théorème de dérivation de ZK comme suit.

Théorème 2.1. — *Soit $(f_{\varepsilon,0})_{\varepsilon \in (0,1)}$ une famille de données initiales de L^∞ telles qu'il existe une constante $C > 0$ avec :*

$$(2.7) \quad \mathcal{E}_\varepsilon(0) \leq C, \quad \forall \varepsilon \in (0,1).$$

Notons $(f_\varepsilon)_{\varepsilon \in (0,1)}$ une famille de solutions globales faibles à (2.5) associées à ces données initiales. Soit \mathcal{H}_ε l'entropie relative définie par la formule :

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \mathcal{H}_\varepsilon(t) := & \frac{1}{2} \int f_\varepsilon \left[|v_1 - u_1^{(1)} - \varepsilon u_1^{(2)}|^2 + |v_2 - \sqrt{\varepsilon} u_2^{(1)} - \varepsilon u_2^{(2)}|^2 + |v_3 - \sqrt{\varepsilon} u_3^{(1)} - \varepsilon u_3^{(2)}|^2 \right] dv dx \\ & + \frac{1}{2} \varepsilon \int |\nabla_x \phi_\varepsilon - \nabla_x \phi_1 - \varepsilon \nabla_x \phi_2 - \varepsilon^2 \nabla_x \phi_3|^2 dx \\ & + \frac{1}{\varepsilon^2} \int \left(e^{\varepsilon \phi_\varepsilon} \log(e^{\varepsilon \phi_\varepsilon} / e^{\varepsilon(\phi_1 + \varepsilon \phi_2 + \varepsilon^2 \phi_3)}) - e^{\varepsilon \phi_\varepsilon} + e^{\varepsilon(\phi_1 + \varepsilon \phi_2 + \varepsilon^2 \phi_3)} \right) dx, \end{aligned}$$

où, sur $[0, T_0]$, $u_1^{(1)} = \phi_1$ est solution de l'équation de Zakharov-Kuznetsov

$$(2.9) \quad 2\partial_t \phi_1 + 2\phi_1 \partial_x \phi_1 + \partial_{x_1} (\Delta + \Delta_\perp) \phi_1 = 0$$

et $(u_1^{(2)}, u_2^{(1)}, u_2^{(2)}, u_3^{(1)}, u_3^{(2)}, \phi_2, \phi_3)$ sont des correcteurs vérifiant des relations algébriques explicites dépendant de ϕ_1 . Alors il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$, telles que pour tout $\varepsilon \in (0,1)$,

$$(2.10) \quad \forall t \in [0, T_0[, \quad \mathcal{H}_\varepsilon(t) \leq \int_0^t (C_1 \mathcal{H}_\varepsilon(s) ds + C_2 \sqrt{\varepsilon}) ds + \mathcal{H}_\varepsilon(0).$$

Si on suppose de plus qu'il existe une constante $C_3 > 0$ telle que pour tout $\varepsilon \in (0, 1)$

$$(2.11) \quad \mathcal{H}_\varepsilon(0) \leq C_3 \sqrt{\varepsilon},$$

alors nous obtenons pour tout $\varepsilon \in (0, 1)$:

$$(2.12) \quad \forall t \in [0, T_0[, \quad \mathcal{H}_\varepsilon(t) \leq C_3 e^{C_1 t} \sqrt{\varepsilon} + C_2 \frac{e^{C_1 t} - 1}{C_1} \sqrt{\varepsilon}.$$

Nous avons besoin d'un grand nombre de correcteurs dans l'entropie relative, en particulier à cause du terme semi-linéaire dans l'équation de Poisson. L'existence de ces correcteurs est assurée par les résultats d'existence locale pour ZK.

Nous pouvons en déduire les convergences vagues au sens des mesures :

$$(\rho_\varepsilon, \mathcal{J}_\varepsilon, \phi_\varepsilon) \rightharpoonup_{\varepsilon \rightarrow 0} (1, \phi_1, \phi_1) \text{ dans } L_t^\infty([0, T_0[; \mathcal{M}^1) \text{ faible-}^*,$$

où ϕ_1 la solution de l'équation (2.9). L'équation de ZK (2.9) est en fait équivalente à l'équation de ZK (2.3), après dilatation et translation.

*
* *

Nous allons évoquer en quelques mots la méthodologie suivie. En s'appuyant sur le fait que l'énergie $\mathcal{E}_\varepsilon(t)$ est conservée ou décroissante (et sur le fait que \mathcal{H}_ε est construite comme une modulation de cette énergie), nous avons pour tout $t \in [0, T_0[$ et tout $\varepsilon \in (0, 1)$ l'estimation

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\varepsilon(t) &\leq \mathcal{H}_\varepsilon(0) + \sum_{j=1}^3 \int_0^t \int \partial_t \left[f_\varepsilon \left(\frac{1}{2} |u_j^{(1)} + \varepsilon u_j^{(2)}|^2 - v_j (u_j^{(1)} + \varepsilon u_j^{(2)}) \right) \right] dv dx ds \\ &\quad + \varepsilon \int_0^t \int \partial_t \left[\frac{1}{2} |\nabla_x \phi_1 + \varepsilon \nabla_x \phi_2|^2 - \nabla_x \phi_\varepsilon \cdot (\nabla_x \phi_1 + \varepsilon \nabla_x \phi_2) \right] dx ds \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t \int \partial_t \left[e^{\varepsilon \phi_\varepsilon} \log(1/e^{\varepsilon(\phi_1 + \varepsilon \phi_2 + \varepsilon^2 \phi_3)}) + e^{\varepsilon(\phi_1 + \varepsilon \phi_2 + \varepsilon^2 \phi_3)} \right] dx ds \end{aligned}$$

La stratégie générale de la preuve est d'étudier la structure des contributions apparaissant ci-dessus et de les combiner afin de faire apparaître (sans faire d'approximation, ou de majoration) les termes modulés de la forme

$$\varepsilon^\alpha \int f_\varepsilon \left(\begin{array}{l} u_1^{(1)} + \varepsilon u_1^{(2)} - v_1 \\ \sqrt{\varepsilon} u_2^{(1)} + \varepsilon u_2^{(2)} - v_2 \\ \sqrt{\varepsilon} u_3^{(1)} + \varepsilon u_3^{(2)} - v_3 \end{array} \right) [\dots] dv dx \text{ et } \varepsilon^\alpha \int (-e^{\varepsilon \phi_\varepsilon} + e^{\varepsilon(\phi_1 + \varepsilon \phi_2 + \varepsilon^2 \phi_3)}) [\dots] dx,$$

où $[\dots]$ contient une expression indépendante du paramètre ε , dès que $\alpha < 0$. Ensuite, le système algébrique satisfait par les correcteurs est précisément choisi pour annuler exactement tous ces termes. Pour $\alpha = 0$, on peut directement majorer ces contributions par l'entropie relative. Par opposition, pour $\alpha > 0$, nous pouvons vérifier qu'ils sont d'ordre ε^α (et donc négligeables).

Une difficulté qui apparaît dans la preuve est de comprendre en quel sens il est licite de linéariser le terme exponentiel semilinéaire dans l'équation de Poisson. Elle est résolue grâce au lemme suivant.

Lemme 2.1. — *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\varepsilon \in (0, 1)$:*

$$\frac{1}{\varepsilon} \left| \int (e^{\varepsilon \phi_\varepsilon} - \varepsilon \phi_\varepsilon) \Delta \partial_{x_1} \phi_1 dx \right| \leq C \sqrt{\varepsilon}.$$

L'idée naïve consisterait à se baser sur le développement de Taylor

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + O(x^3),$$

mais nous ne savons pas que $\varepsilon \|\phi_\varepsilon\|_\infty \ll 1$, et n'avons par ailleurs même pas de contrôle uniforme de la norme L^2 de ϕ_ε . Notons d'ailleurs que le taux obtenu dans le Lemme 2.1, en $O(\sqrt{\varepsilon})$, alors qu'un calcul basé sur un développement limité, s'il pouvait être justifié, fournirait un taux en $O(\varepsilon)$.

Comme la preuve de ce résultat illustre assez bien la philosophie de la méthode et qu'elle n'est pas très longue, nous avons choisi de la reproduire ci-dessous. L'idée est d'utiliser uniquement la borne uniforme provenant de la conservation de l'énergie. L'inégalité classique (valable pour $x, y > 0$) nous sera très utile :

$$(2.13) \quad (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \leq x \log(x/y) - x + y.$$

Nous écrivons la décomposition

$$\frac{1}{\varepsilon} \int (e^{\varepsilon\phi_\varepsilon} - \varepsilon\phi_\varepsilon) \Delta \partial_{x_1} \phi_1 dx = \frac{1}{\varepsilon} \int (e^{\varepsilon\phi_\varepsilon} - 2e^{\frac{1}{2}\varepsilon\phi_\varepsilon}) \Delta \partial_{x_1} \phi_1 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int (e^{\frac{1}{2}\varepsilon\phi_\varepsilon} - \frac{1}{2}\varepsilon\phi_\varepsilon) 2\Delta \partial_{x_1} \phi_1 dx.$$

Nous écrivons le premier terme comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \int (e^{\varepsilon\phi_\varepsilon} - 2e^{\frac{1}{2}\varepsilon\phi_\varepsilon}) \Delta \partial_{x_1} \phi_1 dx &= \frac{1}{\varepsilon} \int (e^{\varepsilon\phi_\varepsilon} - 2e^{\frac{1}{2}\varepsilon\phi_\varepsilon} + 1) \Delta \partial_{x_1} \phi_1 dx \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int (e^{\frac{1}{2}\varepsilon\phi_\varepsilon} - 1)^2 \Delta \partial_{x_1} \phi_1 dx. \end{aligned}$$

En utilisant (2.13) et une borne Lipschitz sur la seconde dérivée de ϕ_1 , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \int (e^{\frac{1}{2}\varepsilon\phi_\varepsilon} - 1)^2 \Delta \partial_{x_1} \phi_1 dx &\leq C\varepsilon \int \frac{1}{\varepsilon^2} (e^{\varepsilon\phi_\varepsilon} (\varepsilon\phi_\varepsilon - 1) - 1) dx \\ &\leq \varepsilon \mathcal{E}_\varepsilon(t) \leq \varepsilon \mathcal{E}_\varepsilon(0) \leq C\varepsilon. \end{aligned}$$

Pour le second terme, nous avons par intégration par parties

$$\frac{1}{\varepsilon} \int (e^{\frac{1}{2}\varepsilon\phi_\varepsilon} - \frac{1}{2}\varepsilon\phi_\varepsilon) 2\Delta \partial_{x_1} \phi_1 dx = - \int \nabla_x \phi_\varepsilon (e^{\frac{1}{2}\varepsilon\phi_\varepsilon} - 1) \cdot \nabla_x \partial_{x_1} \phi_1 dx.$$

En utilisant l'inégalité de Young $|ab| \leq \frac{1}{2}(\lambda a^2 + \frac{1}{\lambda} b^2)$, avec α un paramètre à fixer plus tard, nous obtenons

$$\begin{aligned} \left| \int \nabla_x \phi_\varepsilon (e^{\frac{1}{2}\varepsilon\phi_\varepsilon} - 1) \cdot \nabla \partial_{x_1} \phi_1 dx \right| &\leq \varepsilon^\alpha \int |\nabla_x \phi_\varepsilon|^2 + \frac{C}{\varepsilon^\alpha} \int (e^{\frac{1}{2}\varepsilon\phi_\varepsilon} - 1)^2 \\ &\leq \varepsilon^{\alpha-1} \varepsilon \int |\nabla_x \phi_\varepsilon|^2 + C\varepsilon^{-\alpha+2} \int \frac{1}{\varepsilon^2} (e^{\varepsilon\phi_\varepsilon} (\varepsilon\phi_\varepsilon - 1) + 1) dx. \end{aligned}$$

Nous choisissons $\alpha = 3/2$. En utilisant la conservation de l'énergie, il vient

$$\left| \frac{1}{\varepsilon} \int \left(e^{\frac{1}{2}\varepsilon\phi_\varepsilon} - \frac{1}{2}\varepsilon\phi_\varepsilon \right) 2\Delta \partial_{x_1} \phi_1 dx \right| \leq C\sqrt{\varepsilon}.$$

Ceci permet de conclure la preuve du lemme.

2.2. Limite quasineutre du système d'Euler-Poisson et couches limites

2.2.1. Introduction. — Nous nous intéressons à nouveau dans cette section à la limite quasineutre. L'objectif est de comprendre les phénomènes nouveaux qui peuvent apparaître lorsque les équations sont posées dans un domaine à bord. Mais pour cela, nous allons changer de modèle. Ce n'est pas le système de Vlasov-Poisson, mais une version hydrodynamique que nous allons étudier : le système d'Euler-Poisson isotherme pour les ions. Ce changement est motivé par le fait que l'analogie du critère de stabilité de Penrose dans un domaine à bord n'est pas du tout clair (voir cependant [194, 195, 124] pour quelques résultats dans cette direction), ce qui motive une étude préliminaire consacrée à un modèle a priori plus simple. Une perspective naturelle serait bien sûr d'étendre les résultats que nous allons exposer au cas des équations de Vlasov-Poisson.

Dans le cadre du modèle d'Euler-Poisson, les ions sont décrits par leur densité $n \geq 0$ et leur champ de vitesse $u \in \mathbb{R}^3$, tandis que les électrons suivent la désormais habituelle loi de Maxwell-Boltzmann. Le système fait également intervenir un paramètre $T^i > 0$ qui correspond à la température (supposée constante et uniforme) des ions. La quantité $c_s := \sqrt{T^i}$ peut être interprétée comme la vitesse du son du système.

Le système d'Euler-Poisson isotherme pour les ions en régime quasineutre s'écrit alors

$$(2.14) \quad \begin{cases} \partial_t n + \operatorname{div}(nu) = 0, \\ \partial_t u + u \cdot \nabla u + T^i \nabla \ln(n) = -\nabla \phi, \\ -\varepsilon^2 \Delta \phi + e^\phi = n, \end{cases}$$

et sa limite quasineutre formelle obtenue lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, est

$$(2.15) \quad \begin{cases} \partial_t n + \operatorname{div}(nu) = 0, \\ \partial_t u + u \cdot \nabla u + (T^i + 1) \nabla \ln(n) = 0, \end{cases}$$

qui correspond à un système d'Euler isotherme, avec une température égale à $T^i + 1$. Notons que pour ce système, la vitesse du son associé est $c_{s,lim} := \sqrt{T^i + 1}$. Certainement, le changement de nature des systèmes est moins spectaculaire que dans le Chapitre 1 : nous sommes passés d'un système couplé hyperbolique symétrique avec un terme semi-linéaire à un système "purent" hyperbolique symétrique. Ce dernier est donc en particulier bien posé dans les espaces de Sobolev à haute régularité et les problèmes n'apparaissent donc pas dans cette direction. En revanche, ceci devient plus intéressant si on considère que les équations sont posées dans un domaine à bord de l'espace physique. En effet, le changement de nature du système a pour effet de modifier les conditions au bord admissibles à $\varepsilon = 0$ par rapport à $\varepsilon > 0$ (notamment cela modifie le nombre de caractéristiques entrantes et sortantes) et cela suggère l'apparition de *couches limites* pour compenser ces défauts. Au delà des problèmes mathématiques qu'elles soulèvent, ces couches limites, qui portent dans certains cas le nom de *gaines* en physique des plasmas, semblent tout à fait pertinents pour la modélisation de problèmes concrets. Il apparaît en effet que l'étude de ces objets relève de problématiques de grande importance pour les physiciens et ingénieurs travaillant sur les plasmas de tokamaks (voir notamment l'article de revue de K. Riemann [213] et le livre de Lieberman et Lichtenberg [172, Chapitre 6]).

Avec David Gérard-Varet et Frédéric Rousset, nous avons cherché à décrire le plus exhaustivement possible le comportement de ces couches limites. De manière systématique, nous imposons une condition au bord de type Dirichlet (non homogène) pour le potentiel électrique, en prescrivant sa valeur au bord. Nous supposons que le plasma est inclus dans le domaine $\mathbb{R}_+^3 := \{x = (y, x_3) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+\}$. Les équations d'Euler-Poisson isotherme que nous considérons sont donc le système (2.14), pour $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_+^3$, avec la condition au bord $\phi|_{z=0} = \phi_b$ et éventuellement d'autres conditions au bord pour u . Le choix du demi-espace n'est pas restrictif : par des utilisations standard de cartes locales, les estimations peuvent être transposées à un domaine régulier de \mathbb{R}^3 .

*
* *

Donnons quelques éléments de bibliographie concernant ce problème. La limite quasineutre du système d'Euler-Poisson pour les ions (2.14) a été précédemment étudiée par Cordier et Grenier [68] (dans un cadre 1D, sans bord) et Slemrod et Sternberg [223] (sur un segment, dans un cadre stationnaire). Nos travaux peuvent être vus comme une extension de ces articles. Citons également, parmi beaucoup d'autres, [202, 178, 232, 200, 159, 158, 207] qui abordent la limite quasineutre d'autres systèmes de type Euler-Poisson dans des domaines sans bord.

En ce qui concerne la limite quasineutre en présence d'un bord, les travaux se sont faits bien plus rares. Lorsque l'équation de Poisson est considérée seule (donc sans couplage avec une partie fluide, auquel cas la densité des ions est une fonction prescrite), une analyse de couches limites a été réalisée par Brézis, Golse et Sentis [59] ainsi que Ambroso, Méhats et Raviart [12]. Pour le système couplé, il y avait avant nos travaux deux classes de résultats. La première, déjà évoquée, est due à Slemrod et Sternberg [223] (voir aussi [199]). La deuxième classe est due à Peng et Wang [201] et Violet [231], qui ont étudié la limite quasineutre d'un système d'Euler-Poisson pour des flots stationnaires et irrotationnels.

Le problème des *gaines* a été également abordé avec d'autres points de vue. Suzuki [224] puis Nishibata, Ohnawa et Suzuki [197] étudient la stabilité asymptotique de solutions stationnaires à un système

d'Euler-Poisson pour les ions, et ces solutions particulières sont interprétées comme des couches limites (voir également Ambroso [11] pour une étude numérique préliminaire). Dans [124, 89], Feldman, Ha et Slemrod étudient la dynamique des *gaines* vues comme une solution particulière à frontière libre. Plus récemment, Badsì, Campos Pinto et Després ont également étudié une version cinétique de ce problème [21, 20].

*
* *

Nous nous proposons à présent de discuter de façon très informelle les conditions de bord pour le champ de vitesses. Nous nous concentrons sur l'étude de données "sortantes", ce qui signifie que nous ne considérons que le cas de données initiales $u(0) = (u_1(0), u_2(0), u_3(0))$ satisfaisant

$$u_3(0, y, 0) \leq 0.$$

Selon la valeur du module de $u_3(0, y, 0)$, d'après la théorie générale des systèmes hyperboliques quasili-néaires (voir par exemple [37]), un certain nombre de conditions au bord $\{z = 0\}$ doivent être imposées pour assurer que le problème de d'évolution associé à (2.14) soit bien posé (localement en temps).

• **Donnés sous-soniques.** Dans l'article [92], nous étudions le cas de données sous-soniques

$$-c_s = -\sqrt{T^i} < u_3(0, y, 0) \leq 0,$$

auquel cas il y a exactement une caractéristique rentrante à la surface $\{z = 0\}$ (à la fois pour (2.14) et (2.15)), et nous pouvons prescrire le flot de vitesse sortant $u_3(t, y, 0)$, c'est à dire que nous imposons la condition au bord

$$(2.16) \quad u_3(t, y, 0) = \bar{u}(t, y)$$

pour une certaine fonction $\bar{u}(t, y)$ qui prend ses valeurs dans $] -\sqrt{T^i}, 0]$. Dans [92], nous nous concentrons particulièrement sur le cas dit de *non-pénétration* $u_3(0, y, 0) = 0$.

Dans ce cas, *deux conditions au bord sont donc prescrites pour le système* (2.14) tandis que (2.16) est *la seule condition au bord* admissible pour le système (2.15).

• **Donnés super-soniques.** Dans l'article [93], nous étudions le cas de données super-soniques

$$u_3(0, y, 0) < -\sqrt{T^i},$$

auquel cas aucune condition au bord additionnelle ne peut être prescrite pour (2.14), puisque toutes les caractéristiques sont alors sortantes.

Dans ce cas, *une condition au bord est donc prescrite pour le système* (2.14). En ce qui concerne (2.15), il faut distinguer deux sous-cas, en fonction de la vitesse du son $c_{s,lim}$.

★ **Donnés super-soniques/sous-soniques.** $-c_{s,lim} = -\sqrt{T^i + 1} < u_3(0, y, 0) < -\sqrt{T^i}$, auquel cas *une autre condition au bord peut être imposée.*

★ **Donnés super-soniques/super-soniques.** $u_3(0, y, 0) < -\sqrt{T^i + 1}$, auquel cas *aucune condition au bord ne peut être imposée.*

Pour finir la présentation des systèmes étudiés, nous introduisons des états de reference :

$$n_{ref} > 0, \quad u_{ref} = (0, 0, w_{ref}),$$

avec $w_{ref} < 0$ et nous posons

$$\phi_b = \phi_c + (\phi_{ref})|_{x_3=0},$$

avec $\phi_{ref} = \log n_{ref}$, et $\phi_c \in H^\infty(\mathbb{R}^2)$.

En raison de la relation de neutralité $n = e^\phi$ ainsi que la condition de Dirichlet sur ϕ imposée à $\varepsilon > 0$ fixé, nous voudrions imposer, suite au passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, la condition au bord

$$n|_{x_3=0} = e^{\phi_b}.$$

Cependant, au vu de la discussion précédente, cette condition supplémentaire n'est en général pas compatible avec le système hyperbolique (2.15), et nous nous attendons donc à la formation de couches limites au voisinage de la frontière $\{z = 0\}$ pour palier à ce problème.

L'objectif des travaux [92, 93] est précisément de décrire la structure et la stabilité de ces couches limites lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

2.2.2. Enoncé des résultats. — Avec David Gérard-Varet et Frédéric Rousset, nous avons obtenu la classification des couches limites en fonction des vitesses sortantes dans la limite quasineutre des équations de Euler-Poisson. Les résultats principaux de [92, 93] sont résumés dans le tableau et le théorème suivants.

Conditions au bord pour Euler-Poisson (2.14) ($\varepsilon > 0$)	Conditions au bord pour Euler isotherme (2.15) ($\varepsilon = 0$)	Couche limite à l'ordre principal	Résultat de stabilité
$u_3 = 0$ & $\phi = \phi_b$	$u_3 = 0$	Densité et Potentiel	[92, Theorem 2.1]
$u_3 = \bar{u}$, $\bar{u} < 0$ & $\phi = \phi_b$ $ \bar{u} < \sqrt{T^i}$	$u_3 = \bar{u}$	Densité et Potentiel	[92, Section 5.2]
$\phi = \phi_b$ et donnée initiale t.q. $-\sqrt{T^i + 1} < u_3(0, y, 0) < -\sqrt{T^i}$	$n = e^{-\phi_b}$	Pas de couche limite	[93, Proposition 1]
$\phi = \phi_b$ et donnée initiale t.q. $u_3(0, y, 0) < -\sqrt{T^i + 1}$	Aucune	Densité, Potentiel et Vitesse	[93, Theorem 1] (sous une hyp. de petitesse (2.17))

Théorème 2.2. — Pour chacune des conditions au bord précédentes (en ajoutant une hypothèse de petitesse dans le cas super-sonique/super-sonique), pour toute solution (n^0, u^0) , du système d'Euler-Poisson limite (2.15) et telle que $(n^0 - n_{ref}, u^0 - u_{ref}) \in C^0([0, T_0], H^s(\mathbb{R}_+^3))$, avec s assez grand, il existe $T > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$ tels que, pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, il existe des données initiales bien préparées telles que la solution associée $(n^\varepsilon, u^\varepsilon)$ à (2.14) satisfait

$$\sup_{[0, T]} \left(\|n^\varepsilon - n^0\|_{L^2(\mathbb{R}_+^3)} + \|u^\varepsilon - u^0\|_{L^2(\mathbb{R}_+^3)} \right) \rightarrow_{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

De plus, la convergence est au moins en $O(\sqrt{\varepsilon})$.

- Ce théorème peut être compris comme un théorème de dérivation du système d'Euler-Poisson isotherme (2.15), pour des données bien préparées.
- Un aspect peut-être déroutant vient de l'absence de couches limites dans l'énoncé. Mais il ne faut pas s'y tromper : il est crucial de décrire précisément leur structure (en donnant un développement asymptotique en puissances de ε) pour démontrer ce théorème. D'autre part, il est en fait possible de donner des résultats de convergence plus précis faisant intervenir d'autres normes (typiquement des normes H^s) et dans ce cas les couches limites y apparaissent explicitement. Nous renvoyons aux paragraphes qui suivent (et bien entendu aux articles [92, 93] où les détails complets peuvent être trouvés) pour de tels énoncés.
- Dans le cas des données initiales super-sonique/sous-sonique, la convergence est meilleure ; on obtient

$$\sup_{[0, T]} \left(\|n^\varepsilon - n^0\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^3)} + \|u^\varepsilon - u^0\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^3)} \right) \rightarrow_{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

De plus, le taux de convergence est en $O(\varepsilon)$. Cette convergence dans L^∞ est obtenue grâce à l'absence de couches limites pour ces conditions.

- Dans le cas des données initiales super-soniques/super-soniques, la condition de petitesse s'écrit

$$(2.17) \quad \sup_{[0, T]} \sup_{y \in \mathbb{R}^2} (|n^0(t, y, 0) - e^{\phi_b}| + |u_{1,2}(t, y, 0)|) \leq \delta,$$

pour $\delta > 0$ assez petit.

• La condition super-sonique/super-sonique $u_3(0, y, 0) < -\sqrt{T^i + 1}$ est connue sous le nom de *condition de Bohm* (ou *critère de Bohm*), tandis que la couche limite qui apparait dans ce cas est appelée *gaine* dans la littérature physique.

*
* *

Pour prouver le Théorème 2.2, nous nous appuyons sur un argument classique en deux étapes. La première est une étape de *consistence* où nous construisons des solutions approchées à (2.14) vérifiant un développement asymptotique à un ordre élevé. Dans un second temps, nous combinons des estimations linéaires adéquates avec un argument de bootstrap pour déduire la *stabilité* des solutions approchées. La difficulté principale consiste à établir les estimations linéaires.

2.2.3. Sur le cas sous-sonique [92]. — Dans cette section, on décrit brièvement le principe de la preuve dans le cas sous-sonique. Le principe de l'étape de consistance est le suivant. Nous recherchons des solutions approchées au système (2.14) de la forme

$$(2.18) \quad \begin{aligned} (n_a, u_a, \phi_a) &= \sum_{i=0}^K \varepsilon^i (n^i(t, x), u^i(t, x), \phi^i(t, x)) \\ &+ \sum_{i=0}^K \varepsilon^i \left(N^i \left(t, y, \frac{x_3}{\varepsilon} \right), U^i \left(t, y, \frac{x_3}{\varepsilon} \right), \Phi^i \left(t, y, \frac{x_3}{\varepsilon} \right) \right) \end{aligned}$$

où K est un nombre entier assez grand. Les profils (n^i, u^i, ϕ^i) décrivent le comportement macroscopique des solutions. Les profils (N^i, U^i, Φ^i) dépendent de t, y , mais aussi d'une variable "étirée" $z = \frac{x_3}{\varepsilon} \in \mathbb{R}_+$: ils décrivent des couches limites de taille ε^i près de la frontière. Nous devons nous assurer que

$$(2.19) \quad (N^i, U^i, \Phi^i) \rightarrow 0, \quad \text{as } z \rightarrow +\infty$$

très rapidement (i.e. exponentiellement vite). Ces profils sont construits de sorte que (n_a, u_a, ϕ_a) satisfait l'équation (2.14) modulo un reste d'ordre élevé. A l'ordre dominant, nous obtenons que $n^0 = e^{-\phi^0}$ et que (n^0, u^0) satisfait le système d'Euler isotherme (2.15).

En ce qui concerne les profils de couches limites à l'ordre dominant, on obtient pour commencer l'équation suivante pour le potentiel électrique :

$$(2.20) \quad -\partial_z^2 \Phi^0 + \Gamma n^0 \mathcal{S}(\Phi^0) = 0, \quad \mathcal{S}(\Phi) := e^\Phi - e^{-\Phi/T^i}.$$

en notant Γ l'opérateur de trace au bord. Nous y associons les conditions au bord $\Phi^0|_{z=0} = \phi_b - \phi^0|_{x_3=0}$, $\Phi^0|_{z=+\infty} = 0$. Cette équation est résolue grâce à un théorème de Lax-Milgram ; d'autre part, en s'appuyant sur sa structure hamiltonienne, on peut appliquer le théorème de la variété stable, ce qui donne la décroissance exponentielle souhaitée.

Pour la densité, nous obtenons alors

$$(2.21) \quad (N^0 + n^0|_{x_3=0}) = \Gamma n^0 e^{\Phi^0/T^i},$$

tandis que nous observons qu'il n'y a pas de couche limite à l'ordre dominant pour le champ de vitesse, i.e. $U_0 = 0$. On obtient ensuite une cascade d'équations pour tous les profils aux ordres supérieurs.

Le coeur de la preuve consiste à obtenir d'une estimation L^2 pour la solution $(\dot{n}, \dot{\phi})$ au système linéarisé suivant :

$$(2.22) \quad \begin{cases} \partial_t \dot{n} + (u_a + u) \nabla \dot{n} + (n_a + n) \nabla \cdot \dot{u} + \dot{u} \cdot \nabla (n_a + n) + \dot{n} \operatorname{div} (u_a + u) = r_n, \\ \partial_t \dot{u} + (u_a + u) \cdot \nabla \dot{u} + \dot{u} \cdot \nabla u_a + T^i \left(\frac{\nabla \dot{n}}{n_a + n} - \frac{\nabla n_a}{n_a} \left(\frac{\dot{n}}{n_a + n} \right) \right) = -\nabla \dot{\phi} + r_u, \\ -\varepsilon^2 \Delta \dot{\phi} = \dot{n} - e^{\phi_a} \dot{\phi} (1 + h(\phi)) + r_\phi. \end{cases}$$

où $r = (r_n, r_u, r_\phi)$ est une source donnée, $h \in \{h_0, h_1\}$, avec $h_0(\phi) := \frac{e^\phi - 1 - \phi}{\phi}$, $h_1(\phi) := e^\phi - 1$. Nous complétons le système avec les conditions au bord

$$(2.23) \quad \dot{u}_3|_{x_3=0} = 0, \quad \dot{\phi}|_{x_3=0} = 0.$$

L'estimée cruciale est résumée dans la proposition suivante. Le qualificatif "bien préparé" signifie pour (n, u, ϕ) que l'on suppose des bonnes estimations a priori.

Proposition 2.1. — Soit (n_a, u_a, ϕ_a) la solution approchée construite en (2.18) et soit (n, u, ϕ) des fonctions régulières "bien préparées" telles que $u_3|_{x_3=0} = 0$. Alors sur $[0, T]$ on a l'estimation

$$\|(\dot{n}, \dot{u}, \dot{\phi}, \varepsilon \nabla \dot{\phi})(t)\|_{L^2(\mathbb{R}_+^3)}^2 \lesssim \|(\dot{n}, \dot{u}, \dot{\phi}, \varepsilon \nabla \dot{\phi})\|_{L^2(0,t;L^2(\mathbb{R}_+^3))}^2 + \mathcal{R}.$$

en notant \mathcal{R} la contribution des conditions initiales et des termes de reste.

Pour prouver cette estimée, nous étudions

$$(2.24) \quad \mathcal{F}(\dot{n}, \dot{u}, \dot{\phi}, \varepsilon \nabla \dot{\phi}) = \int_{\mathbb{R}_+^3} \left((n_a + n) \frac{|\dot{u}|^2}{2} + T^i \frac{\dot{n}^2}{2(n_a + n)} + \varepsilon^2 \frac{|\nabla \dot{\phi}|^2}{2} + \frac{1}{2} |\dot{\phi}|^2 e^{-\phi_a} (1 + h(\phi)) \right) dx.$$

Cette fonctionnelle correspond au pendant pour le système linéaire (2.22) de l'énergie physique

$$\mathcal{E}_\varepsilon(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^3} n |u|^2 dx + T^i \int_{\mathbb{R}_+^3} n (\log n - 1) dx + \int_{\mathbb{R}_+^3} (1 - \phi) e^{-\phi} dx + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\mathbb{R}_+^3} |\nabla_x \phi|^2 dx.$$

qui est conservée pour le système non-linéaire complet avec une condition de Dirichlet homogène $\phi_b = 0$. Cela signifie que l'énergie physique offre le bon point de vue afin de symétriser le système (linéarisé) d'Euler-Poisson dans le régime quasineutre, et ainsi obtenir de bonnes estimées L^2 . Par ailleurs, il apparaît que la structure des couches limites est bien adaptée à cette symétrisation.

On conclut alors par un argument de *bootstrap dans des espaces de Sobolev co-normaux* (voir à ce sujet [115] ou plus récemment [181]) et on obtient la stabilité non linéaire dans de tels espaces ($m \gg 1$) :

$$\|f\|_{\mathcal{H}_\varepsilon^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \varepsilon^{|\alpha|} \|\partial_t^{\alpha_0} \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \mathcal{Z}^{\alpha_3} f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^3)},$$

avec $\mathcal{Z} = \frac{x_3}{1+x_3} \partial_{x_3}$. L'idée est d'appliquer la Proposition 2.1 en prenant pour $(\dot{n}, \dot{u}, \dot{\phi})$ des ε -dérivées co-normales de $n = n^\varepsilon - n_a$, $u = u^\varepsilon - u_a$, $\phi = \phi^\varepsilon - \phi_a$. Après estimation des restes (dus aux restes dans l'approximation de l'étape de consistance ainsi qu'aux commutateurs), on peut conclure, quitte à réduire le temps T .

Dans le cas de non pénétration $\bar{u} = 0$, la surface $\{z = 0\}$ est caractéristique, ce qui génère une difficulté supplémentaire. L'idée est d'étudier le rotationnel du champ de vitesse, ce qui permet de recouvrir les dérivées dans la direction normale.

2.2.4. Sur le cas super-sonique [93]. — Nous distinguons les deux sous-cas suivants.

Cas $-\sqrt{T^i + 1} < u_3(0, y, 0) < -\sqrt{T^i}$. — Il vient que dans le cas super-sonique/ sous-sonique, on ne peut imposer une condition au bord pour le système limite (2.15). On choisit d'imposer la condition $n|_{x_3=0} = e^{-\phi_b}$ pour (2.15). Cette condition au bord additionnelle permet donc d'assurer la condition de Dirichlet $\phi|_{x_3=0} = \phi_b$ dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ et ainsi, il n'y a pas apparition de couche limite. Dans ce contexte, la convergence des solutions de (2.14) vers la solution de (2.15) est immédiate : il suffit de construire une solution approchée d'ordre suffisamment élevé (mais sans partie couche limite). Une estimation d'énergie permet alors de conclure, comme dans le cas sans bord.

Cas $u_3(0, y, 0) < -\sqrt{T^i + 1}$. — Pour clore ce chapitre, nous nous concentrons sur le cas $u_3(0, y, 0) < -\sqrt{T^i + 1}$, qui correspond à celui qui nécessite l'analyse la plus technique. Dans ce régime, la condition de petitesse (2.17) est importante à la fois pour prouver l'existence des profils de couche limite et pour justifier leur stabilité (voir aussi le papier de Ambroso, Méhats et Raviart [12]). Le point de départ, comme dans le cas sous-sonique, est de construire une solution approchée à un ordre suffisamment élevé.

La différence fondamentale avec le cas sous-sonique vient du fait qu'à l'ordre dominant, la composante normale de taille $O(1)$ de la vitesse dans la couche limite n'est pas nulle : $U_0^3 \neq 0$. Cela a des conséquences importantes sur les estimations de stabilité.

Le coeur de l'argument est à nouveau d'établir des estimées d'énergie L^2 pour les systèmes de la forme (2.22), auxquels on adjoint la condition au bord $\dot{\phi}|_{x_3=0} = 0$. A cause du profil singulier supplémentaire sur la composante normale de la vitesse, il se trouve que des estimations similaires à celles du cas sous-sonique ne permettent pas de conclure. Pour contrôler les termes singuliers supplémentaires, l'idée consiste à s'appuyer sur l'effet stabilisant de la convection dans ce cas super-sonique, en s'inspirant de l'article classique de Goodman [107] sur la stabilité des chocs visqueux dans les lois de conservation. Cela se concrétise par la recherche d'estimations avec des poids dépendant de la variable d'espace. Par ailleurs, on s'inspire d'un travail de Nishibata, Ohnawa et Suzuki [197] qui porte sur la stabilité asymptotique de solutions particulières au système d'Euler-Poisson avec $\varepsilon = 1$. Ces solutions correspondent *grosso modo* à l'ordre dominant dans nos profils de couche limite, mais sans dépendance en y ou en ε . Contrairement au cas sous-sonique où la symétrisation par l'énergie physique était compatible avec la structure des couches limites, dans ce régime on doit s'appuyer sur d'autres fonctionnelles pour contrôler tous les termes singuliers.

Sans rentrer dans les détails, on introduit la *fonction poids*

$$\eta(x_3) := e^{\frac{\delta}{\mu^2}(1 - e^{-\mu x_3/\varepsilon})},$$

où δ mesure la petitesse de nos données et où $\mu, \gamma > 0$ sont des paramètres à choisir.

Les estimations L^2 à poids sont réunies dans la Proposition suivante. Une fois celles-ci obtenues, on conclut par un argument de bootstrap, similaire à celui du cas sous-sonique.

Proposition 2.2. — *Soit (n_a, u_a, ϕ_a) la solution approchée construite en (2.18) et soit (n, u, ϕ) des fonctions régulières suffisamment petites. Alors, il existe $\varepsilon_0 > 0, \delta_0 > 0, \mu_0 > 0$ telles que pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, pour tout $\delta \in (0, \delta_0]$ et tout $\mu \in (0, \mu_0]$ avec δ/μ^2 suffisamment petit, on a l'estimation suivante pour la solution $(\dot{n}, \dot{u}, \dot{\phi})$ de (2.22)*

$$\begin{aligned} & \sqrt{\mu} \left(\|(\dot{n}, \dot{u}, \dot{\phi}, \varepsilon \nabla \dot{n}, \varepsilon \nabla \dot{u}, \varepsilon \nabla \dot{\phi})\|_{L_T^\infty L^2(\mathbb{R}_+^3)}^2 + \|\sqrt{\eta'}(\dot{n}, \dot{u}, \dot{\phi}, \varepsilon \nabla \dot{n}, \varepsilon \nabla \dot{u}, \varepsilon \nabla \dot{\phi})\|_{L_T^2 L^2(\mathbb{R}_+^3)}^2 \right. \\ & \quad \left. + \|\Gamma(\dot{n}, \dot{u}, \dot{\phi}, \varepsilon \nabla \dot{n}, \varepsilon \nabla \dot{u}, \varepsilon \partial_3 \dot{\phi})\|_{L_T^2 L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \right) \lesssim \|(\dot{n}, \dot{u}, \varepsilon \nabla \dot{n}, \varepsilon \nabla \dot{u}, \dot{\phi}, \varepsilon \nabla \dot{\phi})\|_{L_T^2 L^2(\mathbb{R}_+^3)}^2 + \mathcal{R}, \end{aligned}$$

en notant \mathcal{R} la contribution des conditions initiales et des termes de reste et avec la notation $L_T^p H := L^p(0, T; H)$.

La preuve de cette proposition s'appuie sur trois types d'estimation d'énergie.

A. L'estimation à poids provenant de l'énergie physique

$$\begin{aligned} & \|(\dot{n}, \dot{u}, \dot{\phi}, \varepsilon \nabla \dot{\phi})\|_{L_T^\infty L^2(\mathbb{R}_+^3)}^2 + \|\sqrt{\eta'}(\dot{n}, \dot{u}, \dot{\phi}, \varepsilon \nabla \dot{\phi})\|_{L_T^2 L^2(\mathbb{R}_+^3)}^2 + \|\Gamma(\dot{n}, \dot{u}, \varepsilon \partial_{x_3} \dot{\phi})\|_{L_T^2 L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \\ & \quad \lesssim \|\sqrt{\eta'}(\varepsilon \nabla \dot{n}, \varepsilon \operatorname{div} \dot{u})\|_{L_T^2 L^2(\mathbb{R}_+^3)}^2 + \|(\dot{n}, \dot{u}, \dot{\phi}, \varepsilon \nabla \dot{\phi})\|_{L_T^2 L^2(\mathbb{R}_+^3)}^2 + \mathcal{R} \end{aligned}$$

Cette estimation est le pendant de celle qui permet de conclure dans le cas sous-sonique. Ici le problème provient de termes en $\operatorname{div} \dot{u}$ dans le terme de droite, qu'il s'agit de contrôler.

B. La deuxième estimation à poids faisant intervenir $\operatorname{div} \dot{u}$

On est donc invité à obtenir une estimation sur $\operatorname{div} \dot{u}$:

$$\begin{aligned} & \|(\dot{n}, \dot{u}, \varepsilon \nabla \dot{n}, \varepsilon \operatorname{div} \dot{u})\|_{L_T^\infty L^2(\mathbb{R}_+^3)}^2 + \|\sqrt{\eta'}(\dot{n}, \dot{u}, \varepsilon \nabla \dot{n}, \varepsilon \operatorname{div} \dot{u})\|_{L_T^2 L^2(\mathbb{R}_+^3)}^2 + \|\Gamma(\dot{n}, \dot{u}, \varepsilon \partial_{x_3} \dot{n}, \varepsilon \operatorname{div} \dot{u})\|_{L_T^2 L^2(\mathbb{R}^2)} \\ & \lesssim \mu \|\sqrt{\eta'} \varepsilon \nabla \dot{u}\|_{L_T^2 L^2(\mathbb{R}_+^3)}^2 + \|(\dot{n}, \dot{u}, \varepsilon \nabla \dot{n}, \varepsilon \nabla \dot{u}, \dot{\phi}, \varepsilon \nabla \dot{\phi})\|_{L_T^2 L^2(\mathbb{R}_+^3)}^2 + \mathcal{R} \end{aligned}$$

Cette deuxième estimation fait cette fois intervenir la matrice jacobienne complète de \dot{u} .

C. La troisième estimation à poids faisant intervenir $\nabla \dot{u}$

Il est donc naturel de chercher à obtenir une nouvelle estimation sur $\nabla \dot{u}$:

$$\begin{aligned} & \|(\dot{n}, \dot{u}, \varepsilon \nabla \dot{n}, \varepsilon \nabla \dot{u})\|_{L_T^\infty L^2(\mathbb{R}_+^3)}^2 + \|\sqrt{\eta'}(\dot{n}, \dot{u}, \varepsilon \nabla \dot{n}, \varepsilon \nabla \dot{u})\|_{L_T^2 L^2(\mathbb{R}_+^3)}^2 + \|\Gamma(\dot{n}, \dot{u}, \varepsilon \nabla \dot{n}, \varepsilon \nabla \dot{u})\|_{L_T^2 L^2(\mathbb{R}^2)} \\ & \lesssim \|\Gamma(\dot{n}, \dot{u}, \varepsilon \partial_{x_3} \dot{\phi}, \varepsilon \nabla \dot{n}, \varepsilon \operatorname{div} \dot{u})\|_{L_T^2 L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \|(\dot{n}, \dot{u}, \varepsilon \nabla \dot{n}, \varepsilon \nabla \dot{u}, \dot{\phi}, \varepsilon \nabla \dot{\phi})\|_{L_T^2 L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \mathcal{R} \end{aligned}$$

La combinaison de ces trois estimations permet alors de conclure.

Il est intéressant de noter que ces trois estimations ont pour différence principale la manière de traiter le terme

$$\int_{\mathbb{R}_3^+} \eta \nabla \dot{\phi} \cdot (n_a + n) \dot{u} \, dx.$$

La première (la plus habituelle, reliée au calcul de conservation de l'énergie physique) consiste, après intégration par parties, à utiliser les différentes équations pour réécrire les termes faisant intervenir la densité ou la vitesse, afin de faire apparaître des dérivées en temps. Les deux autres approches utilisent plutôt l'équation de Poisson pour exprimer $\dot{\phi}$ en fonction de $\varepsilon^2 \Delta \dot{\phi}$ et \dot{n} .

Dans ces calculs, un soin particulier doit être porté aux contributions des termes de bord. La condition de Bohm est utilisée de manière cruciale à de nombreuses reprises, afin d'assurer la positivité de plusieurs formes quadratiques. La petitesse est également importante afin d'absorber certains termes singuliers.

Chapitre 3

ESTIMATIONS EN TEMPS LONG DANS LES LIMITES NON-RELATIVISTE ET DE CHAMP MOYEN

Nous présentons dans ce chapitre des travaux en collaboration avec Toan Nguyen [140, 139] ainsi que des travaux avec Toan Nguyen et Frédéric Rousset [141].

*
* *

Ce chapitre clot la première partie de ce mémoire. Il traite de deux problèmes de pénalisation singulière dont la limite formelle attendue est le système de Vlasov-Poisson :

- la limite non-relativiste du système de Vlasov-Maxwell, où l'on fait tendre la vitesse de la lumière vers l'infini (Section 3.1) ;
- la limite de champ moyen pour un système de particules en interaction, où l'on fait tendre le nombre de particules vers l'infini (Section 3.2).

Nous nous concentrons en particulier sur l'étude de ces problèmes sur des échelles de temps longues, c'est-à-dire tendant vers l'infini lorsque le petit paramètre tend vers 0. Pour ce faire, nous allons, pour les deux problèmes évoqués, étudier en particulier le cas de données initiales approchant un équilibre homogène en espace, qui est automatiquement un équilibre pour le système de Vlasov-Poisson visé. Il s'agit, dans un certaine mesure, en dehors du cas à données petites, du cas le plus simple que l'on peut envisager. L'idée sous-jacente est la suivante :

- si l'équilibre est *instable* (pour le système de Vlasov-Poisson), alors l'instabilité est en quelque sorte transmise au système pénalisé, et se développe en un temps logarithmiquement croissant ;
- si l'équilibre est *stable* (pour le système de Vlasov-Poisson), alors l'approximation de la dynamique par l'équilibre est valable sur une échelle de temps polynomiale.

Ces idées sont inspirées directement de la manière dont nous avons traité la limite quasineutre dans le Chapitre 1. Nous allons tâcher de les mettre en oeuvre dans ce chapitre.

3.1. Estimations en temps long dans la limite classique de Vlasov-Maxwell à Vlasov-Poisson

Nous nous intéressons dans cette section à la limite non-relativiste pour le système de Vlasov-Maxwell

$$(3.1) \quad \begin{cases} \partial_t f + \hat{v} \cdot \nabla_x f + (E + \frac{1}{c} \hat{v} \times B) \cdot \nabla_v f = 0, & (x, v) \in \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3 \\ \frac{1}{c} \partial_t B + \nabla_x \times E = 0, \quad \nabla_x \cdot E = \rho - 1, \\ -\frac{1}{c} \partial_t E + \nabla_x \times B = \frac{1}{c} j, \quad \nabla_x \cdot B = 0 \end{cases}$$

muni des données initiales

$$f|_{t=0} = f_0, \quad E|_{t=0} = E_0, \quad B|_{t=0} = B_0.$$

Comme il est d'usage, la fonction de distribution $f(t, x, v)$ décrit la distribution statistique d'électrons dans un plasma (relativiste). Dans ces équations, c est la *vitesse de la lumière*,

$$\hat{v} = \frac{v}{\sqrt{1 + |v|^2/c^2}},$$

désigne la vitesse avec correction relativiste, et

$$\rho(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} f \, dv, \quad j(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{v}{\sqrt{1 + |v|^2/c^2}} f \, dv,$$

sont respectivement la charge et le courant. Le champ électro-magnétique (E, B) est calculé grâce aux équations de Maxwell, avec des sources données par ρ et j . Nous allons principalement nous intéresser au comportement des solutions de (3.1) dans le régime $c \rightarrow +\infty$, connu sous le nom de *limite classique* ou *limite non-relativiste*.

La limite formelle dans la limite non-relativiste n'est autre que le système de Vlasov-Poisson

$$(3.2) \quad \begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + E \cdot \nabla_v f = 0, \\ \nabla_x \times E = 0, \quad \nabla_x \cdot E = \rho - 1. \end{cases}$$

L'étude de cette limite (du point de vue mathématique) remonte à des travaux simultanés et indépendants dus à Asano-Ukai [19], Degond [78] et Schaeffer [218]. Ces auteurs prouvent la validité de l'approximation par Vlasov-Poisson sur des temps finis.

Comme évoqué en préambule, notre objectif est d'étudier la limite non-relativiste, sur des échelles de temps longues, en se concentrant sur le cas de données initiales convergeant vers une distribution homogène

$$f_0 \rightarrow \mu(v),$$

où $\mu(v)$ est normalisé de sorte à être automatiquement une solution stationnaire de (3.1) et (3.2). Nous sommes en mesure de mettre en oeuvre le programme annoncé :

- si μ est instable (pour (3.2)), alors une instabilité se développe en temps $\log c$ (Section 3.1.1) ;
- si μ est stable (pour (3.2)), alors l'approximation par μ est valable sur des temps polynomiaux en c (Section 3.1.2).

*
* *

La motivation originelle pour l'étude de ce problème en temps long provient de celle la limite quasi-neutre pour le système de Vlasov-Maxwell, initiée par Brenier, Mauser et Puel [57] puis développée par Puel et Saint-Raymond [208]. Ces auteurs étudient la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ pour le système

$$(3.3) \quad \begin{cases} \partial_t f + \hat{v} \cdot \nabla_x f + (E + \hat{v} \times B) \cdot \nabla_v f = 0, \\ \partial_t B + \nabla_x \times E = 0, \quad \varepsilon^2 \nabla_x \cdot E = \rho - 1, \\ -\varepsilon^2 \partial_t E + \nabla_x \times B = j, \quad \nabla_x \cdot B = 0, \end{cases}$$

avec

$$\hat{v} = \frac{v}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 |v|^2}}, \quad \rho = \int_{\mathbb{R}^3} f \, dv, \quad j = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{v}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 |v|^2}} f \, dv.$$

Ils montrent, soit pour des données bien préparées [57], soit après filtrage d'oscillations [208], dans le régime monocinétique, une convergence vers le système dit de l'*eMHD*

$$(3.4) \quad \begin{cases} \partial_t u^0 + \nabla \cdot (u^0 \otimes u^0) = E^0 + u^0 \times B^0, \\ \partial_t B^0 + \nabla \times E^0 = 0, \quad \rho^0 = 1, \\ \nabla \times B^0 = u^0, \quad \nabla \cdot B^0 = 0. \end{cases}$$

Pour des données générales, de même que l'on avait dérivé Vlasov-Benney et Euler incompressible cinétique dans le Chapitre 1, on dérive formellement ce qu'on a appelé dans [140] le système de l'*eMHD*

cinétique

$$(3.5) \quad \begin{cases} \partial_t f^0 + v \cdot \nabla_x f^0 + (E^0 + v \times B^0) \cdot \nabla_v f^0 = 0, \\ \partial_t B^0 + \nabla_x \times E^0 = 0, \quad \rho^0 = 1, \\ \nabla_x \times B^0 = j^0, \quad \nabla_x \cdot B^0 = 0, \end{cases}$$

avec

$$\rho^0(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} f^0 dv, \quad j^0(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} v f^0 dv.$$

Il est naturel de penser que, de même que pour la limite quasineutre du système de Vlasov-Poisson (voir la Section 1.4, en particulier le Théorème 1.2), les instabilités à deux bosses rendent la limite vers (3.5) non valide en général. Pour se ramener à la limite non-relativiste, l'idée consiste à utiliser le changement de variables hyperbolique

$$(3.6) \quad (t, x, v) \mapsto \left(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}, v \right)$$

et de poser $E^\varepsilon = \varepsilon E$, $B^\varepsilon = B$, et $f^\varepsilon = f$. Nous obtenons alors un système qui n'est autre que (3.1) avec $c = 1/\varepsilon$. Il apparaît donc que la limite quasineutre (3.3) revient en quelque sorte à étudier la limite non-relativiste pour Vlasov-Maxwell sur des temps longs. On considère le cas de données initiales convergeant vers un équilibre homogène instable (pour Vlasov-Poisson). L'apparition d'instabilités en temps $|\log \varepsilon|$ (qui va découler du Théorème 3.1 énoncé ci-après), se traduit, après avoir appliqué le changement de variables inverse à (3.6), par le fait que la limite formelle attendue (3.5), est fautive sur des échelles de temps très courtes en $\varepsilon |\log \varepsilon|$. Autrement dit, la limite vers (3.5) n'a pas lieu en général.

3.1.1. Le cas instable. — Avec Toan Nguyen [140], nous avons examiné le cas de données se trouvant dans un voisinage d'un équilibre instable (pour Vlasov-Poisson). Nous avons prouvé dans l'article [140] le résultat suivant.

Théorème 3.1. — Soit μ un équilibre régulier de la forme $\mu(v_1, v_2, v_3) = \prod \mu_i(v_i^2)$ satisfaisant la condition d'instabilité de Penrose pour Vlasov-Poisson (voir la Section 1.4 du Chapitre 1). Alors, pour tous $m, s_1, s_2, p > 0$, il existe une famille de solutions régulières $(f_c, E_c, B_c)_{c>0}$ à (3.1), avec $f_c \geq 0$, et il y a une suite de temps $t_c = O(\log c)$ tels que

$$\|(1 + |v|^2)^{\frac{m}{2}} (f_c(0) - \mu)\|_{H^s(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)} \leq \left(\frac{1}{c}\right)^p,$$

et

$$\begin{aligned} \liminf_{c \rightarrow +\infty} \|f_c(t_c) - \mu\|_{H^{-s_2}(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)} &> 0, \\ \liminf_{c \rightarrow +\infty} \|\rho_c(t_c) - 1\|_{H^{-s_2}(\mathbb{T}^3)} &> 0, \quad \liminf_{c \rightarrow +\infty} \|j_c(t_c)\|_{H^{-s_2}(\mathbb{T}^3)} > 0, \\ \liminf_{c \rightarrow +\infty} \|E_c(t_c)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} &> 0. \end{aligned}$$

Autrement dit, nous avons montré l'apparition d'instabilités non-linéaires pour le système de Vlasov-Maxwell relativiste, se développant sur des temps de l'ordre de $O(\log c)$. Comme nous l'avons déjà évoqué, cette instabilité est transmise à Vlasov-Maxwell dans la limite non-relativiste par une instabilité au niveau du système de Vlasov-Poisson sous-jacent.

La preuve de ce théorème se base sur la méthode d'instabilité non-linéaire de Grenier [114], que nous avons déjà brièvement évoqué dans la Section 1.4. A cet effet, on commence par chercher une solution de la forme $\mu + \tilde{f}$, et la perturbation \tilde{f} satisfait alors

$$(3.7) \quad \partial_s \tilde{f} + \hat{v} \cdot \nabla_x \tilde{f} + (E + \frac{1}{c} \hat{v} \times B) \cdot \nabla_v (\mu + \tilde{f}) = 0.$$

Le champ électromagnétique (E, B) est obtenu grâce aux potentiels électromagnétiques (A, ϕ)

$$E = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \partial_s A, \quad B = \nabla \times A,$$

avec A vérifiant la jauge de Coulomb $\nabla \cdot A = 0$. Les potentiels électromagnétiques (A, ϕ) sont solutions des équations

$$-\Delta\phi = \rho(\tilde{f}), \quad \left(\frac{1}{c}\right)^2 \partial_s^2 A - \Delta A = \frac{1}{c} j(\tilde{f}) - \frac{1}{c} \partial_s \nabla \phi.$$

avec les conditions initiales $A|_{s=0} = \partial_s A|_{s=0} = 0$.

On introduit l'opérateur de Vlasov-Poisson linéarisé autour de μ

$$Pf := \partial_s f - L_0 f, \quad L_0 f := -v \cdot \nabla_x f - \nabla_v \mu \cdot \nabla_x \Delta_x^{-1} \rho(f).$$

ainsi que les opérateurs suivants, dont la contribution est supposément petite dans la limite $c \rightarrow +\infty$:

$$S(f) := -\frac{1}{c} [\partial_s A(f) - \hat{v} \times (\nabla \times A(f))] \cdot \nabla_v \mu,$$

$$T(f) := -\left(\frac{1}{c}\right)^2 \frac{|v|^2}{\sqrt{1 + |v|^2/c^2} \left(1 + \sqrt{1 + |v|^2/c^2}\right)} v \cdot \nabla_x f.$$

Pour finir on définit l'opérateur quadratique

$$Q(f, g) := -\nabla \phi(f) \cdot \nabla_v g - \frac{1}{c} [\partial_s A(f) - \hat{v} \times (\nabla \times A(f))] \cdot \nabla_v g,$$

Trouver une solution à (3.7) revient donc à résoudre

$$R(f) := Pf + S(f) + T(f) + Q(f, f) = 0.$$

Par la suite, on souhaite voir les termes $S(f) + T(f) + Q(f, f)$ comme des restes. Cependant, des estimations d'énergie pour l'équation des ondes satisfaite par A révèle que le terme $\frac{1}{c} \partial_s A(f)$ dans $S(f)$ est un terme d'ordre 1, et ne peut donc pas être considéré comme une perturbation. Heureusement, il est possible d'extraire la contribution de ce terme et de l'inclure dans la partie principale, en changeant d'inconnue. En effet, en utilisant la définition de P on peut écrire

$$cS(f) = -[\partial_s A - \hat{v} \times (\nabla \times A)] \cdot \nabla_v \mu$$

$$= -P(A \cdot \nabla_v \mu) + \hat{v} \cdot \nabla(A \cdot \nabla_v \mu) + \nabla_v \mu \cdot \nabla \Delta^{-1} (\underbrace{\rho(A \cdot \nabla_v \mu)}_{=0}) + [\hat{v} \times (\nabla \times A)] \cdot \nabla_v \mu$$

$$= -P(A \cdot \nabla_v \mu) + c\tilde{S}(f),$$

en posant

$$\tilde{S}(f) := (\hat{v} \cdot \nabla) A \cdot \nabla_v \mu + [\hat{v} \times (\nabla \times A)] \cdot \nabla_v \mu.$$

Nous sommes donc amenés à étudier

$$(3.8) \quad R(f) = P \left[\tilde{f} - \frac{1}{c} A \cdot \nabla_v \mu \right] + \tilde{S}(f) + T(f) + Q(f, f) = 0.$$

On note que le terme $\frac{1}{c} A \cdot \nabla_v \mu$ est de moyenne nulle en vitesse, ce qui implique que le potentiel ϕ associé à \tilde{f} est le même que celui associé à $\tilde{f} - \frac{1}{c} A \cdot \nabla_v \mu$. On démontre (voir notre article [140] pour des explications) qu'il est possible d'inverser le système

$$\tilde{f} - \frac{1}{c} A \cdot \nabla_v \mu = g, \quad \left(\frac{1}{c}\right)^2 \partial_s^2 A - \Delta A = \frac{1}{c} (j(\tilde{f}) + \partial_s \nabla \Delta^{-1} \rho(\tilde{f})), \quad A|_{s=0} = \partial_s A|_{s=0} = 0,$$

de sorte que l'on peut considérer $\tilde{f} - \frac{1}{c} A \cdot \nabla_v \mu$ comme nouvelle inconnue.

Nous sommes alors en mesure d'appliquer la méthode de Grenier [114]. Nous construisons une solution approchée à un ordre arbitrairement élevé en puissances de $\frac{1}{c}$ à (3.8). Le terme d'ordre dominant dans la solution approchée correspond à la dynamique linéaire (la plus) instable pour Vlasov-Poisson, les autres sont construits de sorte à annuler les contributions des ordres précédents dues aux termes quadratiques, et ainsi obtenir une approximation (formelle) d'ordre élevé. Comme nous l'avons également rapidement signalé dans la Section 1.4, il est nécessaire, pour justifier ensuite l'instabilité non-linéaire, d'avoir des estimations optimales en terme de croissance exponentielle en temps pour l'opérateur linéaire dominant, qui est ici l'opérateur de Vlasov-Poisson 3D, linéarisé autour de μ . Nous démontrons de telles estimations,

mais en autorisant une perte fixe de dérivées et de moments en vitesse. Ces pertes sont néanmoins compensées *in fine* grâce à l'ordre élevé de l'approximation que nous avons construite.

3.1.2. Le cas stable. — Dans la direction opposée, avec Toan Nguyen et Frédéric Rousset, nous avons examiné dans l'article [141] le cas de données dans le voisinage d'un équilibre stable. Nous avons prouvé le résultat suivant (voir [141] pour un énoncé plus précis).

Théorème 3.2. — *Soit $\mu(v)$ un équilibre régulier radial (stable au sens de Penrose-Mouhot-Villani – voir la Définition 1.2 dans le Chapitre 1). Soit $r > 0$ et $M_0 > 0$. Il existe $c_0 > 0$ et $\alpha > 0$, tels que, pour tout $c \geq c_0$, et toute donnée satisfaisant*

$$\|(1 + |v|^2)^{3/2} g_0\|_{H^5} + \|(E_0, B_0)\|_{H_x^2} \leq M_0,$$

alors il existe une unique solution (f_c, E_c, B_c) au système de Vlasov-Maxwell (3.1) avec données initiales

$$\begin{aligned} f_c|_{t=0} &= \mu + \delta f_0, & \delta &:= c^{-r}, \quad r > 0, \\ E_c|_{t=0} &= \delta E_0, \\ B_c|_{t=0} &= \delta B_0, \end{aligned}$$

sur l'intervalle de temps $[0, c^\alpha]$. De plus

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \sup_{t \in [0, c^\alpha]} \|f_c(t, x + t\hat{v}, v) - \mu(v)\|_{H^5} = 0.$$

Autrement dit, nous avons démontré que l'approximation par l'équilibre régulier μ était valable sur des temps polynomiaux en la vitesse de la lumière c . Nous sommes en fait en mesure d'estimer explicitement le paramètre α de l'énoncé du théorème.

Expliquons très brièvement le principe de l'analyse. On écrit

$$f_c(t) = \mu + \delta f(t), \quad E_c(t) = \delta E(t), \quad B_c(t) = \delta B(t),$$

et la perturbation (f, E, B) satisfait

$$\begin{cases} \partial_t f + \hat{v} \cdot \nabla_x f + (E + \frac{1}{c} \hat{v} \times B) \cdot \nabla_v (\mu + \delta f) = 0, \\ E = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \partial_s A, & B = \nabla \times A, \\ \nabla \cdot A = 0, \\ -\Delta \phi = \rho(f), & \left(\frac{1}{c}\right)^2 \partial_s^2 A - \Delta A = \frac{1}{c} j(f) - \frac{1}{c} \partial_s \nabla \phi. \end{cases}$$

Comme pour le théorème dans le cas instable (et pour les mêmes raisons), on va s'intéresser à

$$g := f - \frac{1}{c} A \cdot \nabla_v \mu,$$

qui vérifie l'équation

$$\begin{aligned} (3.9) \quad \partial_t g + \hat{v} \cdot \nabla_x g - \nabla_x \phi \cdot \nabla_v \mu + \delta(E + \varepsilon \hat{v} \times B) \cdot \nabla_v g \\ = -\frac{1}{c} \hat{v} \cdot \nabla_x (A \cdot \nabla_v \mu) - \delta \frac{1}{c} (E + \frac{1}{c} \hat{v} \times B) \cdot \nabla_v (A \cdot \nabla_v \mu). \end{aligned}$$

Notre résultat se base sur un argument de bootstrap, visant à la propagation de normes Sobolev pour la charge et le courant associés à g . On introduit la quantité clé

$$(3.10) \quad \mathcal{N}(t) := \|(\rho(g), j(g))\|_{L^2(0, t; H_x^2)}$$

Pour $M > 0$ à choisir convenablement (assez grand), on pose $T_c := \sup\{T \geq 0, \mathcal{N}(T) \leq M\}$. Le but est de montrer que $T_c \geq c^\alpha$.

L'argument clé est le suivant : sur $[0, T_c]$, pour des temps polynomiaux en c , il est possible d'avoir des estimations améliorées pour $\rho(g)$ et $j(g)$, en suivant la procédure de [142], décrite dans la Section 1.7 du Chapitre 1 (inspirée par [189]), c'est-à-dire en obtenant une équation intégro-différentielle sur $\rho(g)$ et $j(g)$ puis en l'inversant. Rappelant (3.9), on vérifie dans cette procédure que dans le régime de grande

vitesse de la lumière, c'est la partie "Poisson" dans les équations de Maxwell qui prédomine et que le reste peut être considéré comme une petite contribution : à cette fin, il est crucial d'avoir considéré g plutôt que f . On se ramène après un peu de travail à l'étude d'équations de la forme

$$\rho = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla_x \Delta^{-1} \rho)(s, x - (t-s)v) \cdot \nabla_v \mu \, dv ds + R,$$

où R regroupe la contribution des données initiales, ainsi que des termes de reste, petits dans la limite $c \rightarrow +\infty$. C'est pour cette étape que la condition de stabilité de Penrose-Mouhot-Villani est cruciale : elle permet d'inverser cette équation sur ρ , suivant [189, 88]. Une fois une estimation sur ρ obtenue, il est possible d'en obtenir une autre sur j , en inversant à nouveau le transport puis en intégrant contre \hat{v} . Il vient pour un certain $\beta > 0$ les estimations suivantes, pour tout $t \in [0, \min(T_c, c^\beta)]$,

$$\|\rho(g), j(g)\|_{L^2(0,t;H^5)} \lesssim \|f|_{t=0}\|_{H^5} + P_{c,M}(t),$$

où $P_{c,M}$ est un polynôme ayant des coefficients dépendant polynomialement de $1/c$ et M . Ces estimations, après avoir choisi M assez grand, assurent qu'il existe $\alpha \in (0, \beta]$, tel que si jamais $T_c < c^\alpha$, alors on aurait $\mathcal{N}(t) < \frac{1}{2}M$ sur $[0, T_c]$ ce qui est impossible.

Nous renvoyons à l'article [141] pour les détails complets.

3.2. Estimations en temps long dans la limite de champ moyen

Cette section est dédiée à l'étude de la limite de champ moyen. Considérons un système à N particules en interaction, dont la dynamique est régie par les équations de Newton. Il vient que leurs positions et vitesses $(X_{k,N}(t), V_{k,N}(t))_{1 \leq k \leq N}$ dans l'espace des phases $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$ suivent le système d'équations

$$(3.11) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} X_{k,N} = V_{k,N}, \\ \frac{d}{dt} V_{k,N} = -\frac{1}{N} \sum_{j \neq k} \nabla_x \Phi(X_{k,N} - X_{j,N}), \\ X_{k,N}|_{t=0} = X_{k,N}^0, \quad V_{k,N}|_{t=0} = V_{k,N}^0, \end{cases}$$

dans lequel $\Phi \neq 0$ est le potentiel d'interaction, supposé vérifier la relation de symétrie $\Phi(\cdot) = \Phi(-\cdot)$. Nous ne considérerons que des potentiels appartenant aux classes **A1.** et **A2.** :

- Classe **A1.** Les potentiels réguliers $\Phi \in \mathcal{C}^2$, en toute dimension $d \in \mathbb{N}^*$; cela inclut le modèle HMF (Hamiltonian Mean Field).
- Classe **A2.** Le potentiel coulombien en dimension $d = 1$.

On remarque que la mesure empirique

$$\mu_N(t) := \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta_{(X_{k,N}(t), V_{k,N}(t))}$$

vérifie l'équation de Liouville

$$\partial_t \mu_N + v \cdot \nabla_x \mu_N + E_N \cdot \nabla_v \mu_N = 0, \quad E_N(t, X_{k,N}(t)) = -\frac{1}{N} \sum_{j \neq k} \nabla_x \Phi(X_{k,N}(t) - X_{j,N}(t)),$$

Formellement, dans la limite $N \rightarrow \infty$, en supposant que $\mu_N \rightharpoonup f$ dans un certain sens, on obtient l'équation de Vlasov non linéaire

$$(3.12) \quad \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + E \cdot \nabla_v f = 0, \quad E = - \iint_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} \nabla_x \Phi(x-y) f(t, y, v) \, dy dv.$$

Si le potentiel est coulombien, on retrouve le système de Vlasov-Poisson.

Nous dirons que la limite de champ moyen est a lieu si pour toute suite de configurations initiales $(X_{k,N}(t), V_{k,N}(t))_{1 \leq k \leq N, N \geq 1}$ telles que la mesure empirique initiale $\mu_N(0)$ converge faiblement vers une fonction de distribution initiale (régulière) $f_0(x, v)$, alors il existe $T > 0$ tel que, pour tout $t \in [0, T]$,

$\mu_N(t)$ converge également faiblement vers une fonction de distribution $f(t, x, v)$ qui est solution de (3.12) avec condition initiale f_0 .

Nous nous référons au notes de cours de Golse [104] ainsi qu'à l'article de revue de Jabin [154], pour une exploration systématique de cette question. Rappelons que le cas des potentiels réguliers (i.e. les potentiels de la classe **A1**.) est très bien compris : voir Braun et Hepp [48], Neunzert et Wick [193], et Dobrushin [86]. Le travail pionnier de Dobrushin fournit des estimations de stabilité quantitatives remarquables pour l'équation de Vlasov (3.12) en distance de Wasserstein W_1 :

Théorème 3.3 (Dobrushin). — *Cas A1.* Soit $\mu_0, \nu_0 \in \mathcal{P}_1$. En notant $\mu(t)$ (resp. $\nu(t)$) l'unique solution de (3.12) avec condition initiale μ_0 (resp. ν_0), on a, pour tout $t \geq 0$,

$$(3.13) \quad W_1(\mu(t), \nu(t)) \leq e^{C_0 t} W_1(\mu_0, \nu_0),$$

avec $C_0 = 1 + 2\|\nabla^2 \Phi\|_\infty$.

Si on applique cette estimation pour la limite de champ moyen, on peut déduire qu'aussitôt que $W_1(\mu_N(0), f_0) \rightarrow 0$, la convergence suivante a lieu

$$W_1(\mu_N(t), f(t)) \rightarrow 0,$$

pour $N \rightarrow \infty$, et ce pour tout temps $t \geq 0$ fixé au préalable. Plus précisément, si $W_1(\mu_N(0), f_0) \lesssim \frac{1}{N^s}$ pour un certain indice $s > 0$, alors la limite de champ moyen a lieu, uniformément pour des temps d'ordre $\log N$.

Le cas des potentiels singuliers, qui inclut le cas coulombien, est nettement moins bien compris. Nous n'évoquons pas le cas des hautes dimensions $d \geq 2$ qui est redoutable et pour lequel seuls des résultats partiels sont connus : voir [146, 147, 177, 156] pour des progrès récents remarquables. Nous nous concentrons sur le cas de la dimension $d = 1$, qui est beaucoup plus simple. En effet, la singularité coulombienne est alors assez faible et la limite peut être justifiée, comme prouvé par Trocheris [227], Cullen, Gangbo et Pisante [75], et récemment, Hauray [145]. Hauray démontre ce résultat en exhibant une estimation quantitative de stabilité, tout à fait remarquable, dans le même esprit que celle de Dobrushin.

Théorème 3.4 (Hauray). — *Cas A2.* Soit $f_0(x, v)$ une condition initiale telle que la solution associée $f(t)$ à (3.12) satisfait pour un certain $T > 0$,

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\rho(t)\|_\infty < +\infty,$$

où on a noté $\rho(t) = \int f dv$. Alors, il existe $C_1 > 0$ tel que pour tout $\mu_0 \in \mathcal{P}_1$, en notant $\mu(t)$ toute solution à (3.12) avec la condition initiale μ_0 , et pour tout $t \in [0, T]$,

$$W_1(\mu(t), f(t)) \leq e^{C_1(t + \int_0^t \|\rho(s)\|_\infty ds)} W_1(\mu_0, f_0).$$

Il s'agit d'une estimation de stabilité fort/faible, permettant de comparer une solution suffisamment régulière à une autre éventuellement très faible. Une application de ce théorème permet à nouveau de justifier la limite de champ moyen pour des temps d'ordre $\log N$, lorsque $W_1(\mu_N(0), f_0)$ décroît avec un taux polynomial.

3.2.1. Le cas instable. — Avec Toan Nguyen [139], nous avons considéré la limite de champ moyen sur des échelles de temps longues (i.e. tendant vers l'infini lorsque $N \rightarrow +\infty$), dans le but d'étudier l'optimalité des temps en $\log N$ atteints grâce aux Théorèmes 3.3 et 3.4.

Notre motivation dans l'article [139] est de comprendre la situation au voisinage d'équilibre homogènes *instables*. Nous considérons des équilibres $\mu(v)$ suffisamment réguliers et décroissants à l'infini, et normalisés de sorte à avoir $\int_{\mathbb{R}^d} \mu(v) dv = 1$.

Soit $(\hat{\Phi}_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ les coefficients de Fourier de Φ . En singeant la Définition 1.1 du Chapitre 1, on introduit une condition d'instabilité de Penrose adaptée au problème.

Définition 3.1. — L'équilibre homogène μ satisfait la condition d'instabilité de Penrose s'il existe $k_0 = (k_{0,1}, 0, \dots, 0) \neq 0$ tel que $\widehat{\Phi}_{k_0} > 0$, pour tout (v_2, \dots, v_d) la fonction $v_1 \mapsto \mu(v_1, v_2, \dots, v_d)$ atteint un minimum local en 0 et

$$(3.14) \quad \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\mu'(v)}{v_1} dv > \frac{1}{\widehat{\Phi}_{k_0}}.$$

Bien entendu, d'autres variantes (plus générales) sont possibles. L'hypothèse selon laquelle $k_{0,1} \neq 0$, $\widehat{\Phi}_{(k_{0,1}, 0, \dots, 0)} > 0$, est vérifiée automatiquement pour HMF ainsi que Coulomb en dimension 1. Dans le cas général des potentiels réguliers, on supposera systématiquement que cette hypothèse est bien vérifiée.

Le résultat principal de [139] montre que pour de tels équilibres μ satisfaisant la condition d'instabilité de Penrose, on peut trouver des configurations initiales telles que $W_1(\mu_N(0), \mu(v))$ converge polynomialement vite vers 0 lorsque $N \rightarrow +\infty$, mais telles que $W_1(\mu_N(t), \mu(v))$ n'est pas proche de 0 pour des temps en $\log N$. Cela implique les temps en $\log N$ obtenus via les Théorèmes 3.3 et 3.4 sont optimaux en général.

Théorème 3.5. — Soit $\mu(v)$ satisfaisant la condition d'instabilité de Penrose. Il existe un indice $\alpha_0 > 0$ tel que, pour tout $\alpha \in (0, \alpha_0]$, il existe une suite de configurations initiales $(X_{k,N}^0, V_{k,N}^0)_{1 \leq k \leq N, N \geq 1}$ telles que, lorsque $N \rightarrow \infty$,

$$W_1(\mu_N(0), \mu) \sim \frac{1}{N^\alpha},$$

en notant $\mu_N(0) := \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta_{(X_{k,N}^0, V_{k,N}^0)}$, et

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} W_1(\mu_N(T_N), \mu) > 0,$$

avec $T_N = O(\log N)$, en notant $\mu_N(t) := \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta_{(X_{k,N}(t), V_{k,N}(t))}$, où $(X_{k,N}, V_{k,N})$ vérifie (3.11) avec donnée initiale $(X_{k,N}^0, V_{k,N}^0)$.

- Le fait que la vitesse de convergence initiale ($\alpha \leq \alpha_0$) ne puisse être arbitrairement rapide apparaît comme cruciale dans la construction; nous ignorons ce qui se passe lorsqu'on impose une vitesse polynomiale arbitraire. Il est possible dans certains cas d'avoir une borne supérieure sur α_0 (voir [139, Remark 1.7]); celle-ci dépend typiquement du potentiel d'interaction et de la partie réelle maximale des valeurs propres instables.
- Le mécanisme d'instabilité qui sous-tend ce théorème avait été précédemment exposé par Jain, Bouchet et Mukamel dans [157]; ces auteurs ne traitaient en revanche que de l'analyse linéaire.

L'idée est ainsi de s'appuyer sur une instabilité des équations de Vlasov linéarisées autour de l'équilibre μ . On considère une valeur propre λ_0 avec partie réelle maximale. Pour simplifier la discussion, on va supposer ici que λ_0 est un nombre réel. Considérons $g(x, v)$ une fonction propre associée. Cela signifie qu'il existe une solution aux équations linéarisées, qui croît comme $\varepsilon(N)e^{\lambda_0 t}$, où $\varepsilon(N) > 0$ est la taille de la perturbation initiale. On fait le choix $\varepsilon(N) = \frac{1}{N^\alpha}$ avec $\alpha > 0$ à être choisi (assez petit) ultérieurement.

En prenant une telle donnée initiale, on s'attend par conséquent à générer une solution $f(t)$ aux équations de Vlasov complètes, avec une croissance similaire, mais en faisant une erreur due aux termes non linéaires. Afin de montrer que cette erreur peut être obtenue à un ordre K arbitrairement élevé en $\varepsilon(N)e^{\lambda_0 t}$, nous expliquons dans [139] comment utiliser la méthode d'instabilité non-linéaire de Grenier [114] pour construire une approximation f_{app} convenable.

Pour obtenir une suite adéquate de configurations initiales, on s'appuie sur une construction probabiliste qui assure que pour un certain indice (explicite),

$$W_1 \left(\mu_N(0), \mu + \frac{1}{N^\alpha} g \right) \lesssim \frac{1}{N^s}, \quad W_1(\mu_N(0), \mu) \lesssim \frac{1}{N^\alpha}.$$

Nous devons nous assurer que $\alpha < s$. Notons $\lambda > 0$ la meilleure constante que l'on peut obtenir dans l'exponentielle en temps des estimations de stabilité de Dobrushin ou Hauray. On obtient des estimations

de la forme

$$\begin{aligned} W_1(\mu_N(t), \mu) &\geq W_1(f(t), \mu) - W_1(\mu_N(t), f(t)) \\ &\geq W_1(f_{app}(t), \mu) - W_1(f(t), f_{app}(t)) - W_1(\mu_N(t), f(t)) \\ &\geq \frac{1}{N^\alpha} e^{\lambda_0 t} - \left(\frac{1}{N^\alpha} e^{\lambda_0 t} \right)^K - W_1(\mu_N(t), f(t)) \end{aligned}$$

et

$$W_1(\mu_N(t), f(t)) \lesssim e^{\lambda t} W_1(\mu_{N,0}, f(0)),$$

sur lesquelles on peut alors s'appuyer pour prouver une instabilité sur le système à N particules. En effet, on a

$$W_1(\mu_N(t), \mu) \geq \frac{1}{N^\alpha} e^{\lambda_0 t} - \left(\frac{1}{N^\alpha} e^{\lambda_0 t} \right)^K - \frac{1}{N^s} e^{\lambda t}.$$

On peut finalement choisir $K > 0$ assez grand et α assez petit pour imposer

$$W_1(\mu_N(t), \mu) \geq \frac{1}{2} \frac{1}{N^\alpha} e^{\lambda_0 t},$$

ce qui prouve le résultat d'instabilité en temps $\log N$ annoncé.

3.2.2. Le cas stable. — Caglioti et Rousset [63, 64] ont prouvé, dans le cas des potentiels de la classe **A1**, qu'il est possible d'obtenir des estimations de stabilité en temps long, polynomial en N , si on se restreint au voisinage d'équilibres homogènes radiaux (donc *stables*) ; il semble cependant que ces articles ne peuvent traiter ni le cas des potentiels plus singuliers, ni celui des équilibres non radiaux. Il semble naturel de chercher à étendre ces résultats au cas coulombien en dimension 1 ainsi que pour des données stables au sens de Penrose-Mouhot-Villani, sans hypothèse de symétrie. Ces problèmes restent ouverts, du moins à ma connaissance. Les raisons sont multiples : les méthodes de Caglioti-Rousset reposent sur un argument de dualité qui ne semble pas compatible avec le cas des potentiels non réguliers ; par ailleurs on ignore comment mettre en oeuvre la méthode de stabilité de [141] pour des solutions qui sont des mesures.

Dans une direction assez proche, avec Laure Saint-Raymond, nous travaillons à l'obtention rigoureuse de l'équation de Lenard-Balescu, qui est supposément une correction à l'ordre supérieur de Vlasov dans la limite de champ moyen (voir par exemple [196]). Pour ce faire, on a considéré le cas de distributions dont la mesure empirique est proche de la distribution Maxwellienne, de sorte que c'est une version linéarisée de Lenard-Balescu qui est la limite attendue. Cette question peut en quelque sorte être interprétée comme une justification en temps long de la limite de champ moyen autour de la mesure de Gibbs.

Chapitre 4

CONDITIONS DE CONTRÔLE GÉOMÉTRIQUE POUR LES ÉQUATIONS DE VLASOV

Nous décrivons dans ce chapitre des résultats obtenus en collaboration avec Olivier Glass [100, 101], ainsi que Olivier Glass et Ayman Moussa [102].

*
* *

Nous abordons avec ce chapitre la deuxième partie de ce mémoire, qui est tournée vers des problématiques issues de et inspirées par la *théorie du contrôle*. Dans ce chapitre, nous étudions, dans deux contextes bien distincts, la dynamique d'équations de Vlasov, pour laquelle des *conditions géométriques* jouent un rôle clé :

- dans la Section 4.1, nous traitons des propriétés de contrôlabilité du système de Vlasov-Maxwell sur le tore \mathbb{T}^2 (ces résultats ont fait l'objet d'un acte de conférence [127], sur lequel ce texte est largement basé) ;
- dans la Section 4.2, nous examinons le comportement en temps long des solutions du système de Vlasov-Navier-Stokes dans un tuyau bidimensionnel.

4.1. Contrôlabilité de l'équation de Vlasov-Maxwell

4.1.1. Introduction. — Considérons le système de Vlasov-Maxwell (relativiste), déjà introduit dans le Chapitre 3, Section 3.1, ici posé sur le tore plat \mathbb{T}^2 , en présence d'une source à support en espace inclus dans un ouvert $\omega \subset \mathbb{T}^2$:

$$(4.1) \quad \begin{cases} \partial_t f + \hat{v} \cdot \nabla_x f + \left(E + \frac{1}{c} \hat{v}^\perp B \right) \cdot \nabla_v f = \mathbb{1}_\omega(x) G(t, x, v), & x \in \mathbb{T}^2, v \in \mathbb{R}^2, \\ \partial_t E + c \nabla^\perp B = \int_{\mathbb{R}^2} f \hat{v} dv, \\ \partial_t B + c \operatorname{curl} E = 0, \\ \operatorname{div} E = \int_{\mathbb{R}^2} f dv - \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^2} f dv dx, \\ f|_{t=0} = f_0, \quad E|_{t=0} = E_0, \quad B|_{t=0} = B_0, \end{cases}$$

où $\hat{v} := v / \sqrt{1 + \frac{|v|^2}{c^2}}$ et $c > 0$ est la vitesse de la lumière. Dans cette géométrie 2D, $B(t, x)$ est un scalaire (en effet on considère que le champ magnétique est dirigé selon un vecteur perpendiculaire à \mathbb{R}^2 vu comme un hyperplan de \mathbb{R}^3) ; d'autre part le vecteur v^\perp (resp. l'opérateur ∇^\perp) désigne le vecteur v (resp. l'opérateur ∇) ayant subi une rotation d'angle $-\pi/2$. Enfin, le terme $\mathbb{1}_\omega G$ désigne une source dans l'équation de Vlasov, qui peut être interprétée comme une création ou absorption de particules chargées.

Avec Olivier Glass, nous nous sommes intéressés aux propriétés de *contrôlabilité* du système de Vlasov-Maxwell, par le biais d'un contrôle localisé dans ω . La question fondamentale que nous considérons est

la suivante : étant donné une cible (f_1, E_1, B_1) et un temps de contrôle $T > 0$, est-il possible de choisir G de sorte que la solution à (4.1) satisfasse

$$(4.2) \quad f|_{t=T} = f_1, \quad E|_{t=T} = E_1, \quad B|_{t=T} = B_1 ?$$

Une telle question a été étudiée au préalable pour d'autres équations cinétiques non-linéaires : pour l'équation de Vlasov-Poisson par O. Glass dans [98] puis pour l'équation de Vlasov-Poisson avec des champs de forces extérieurs par O. Glass et l'auteur dans [100]. Cette dernière équation peut être considérée comme un bébé modèle pour Vlasov-Maxwell, et il se trouve que cette étude jouera un rôle clé pour un de nos résultats présentés dans ce chapitre. Signalons également que les méthodes que nous avons développées peuvent être adaptées pour traiter de la contrôlabilité d'autres systèmes de Vlasov, comme cela a été fait par Iván Moyano⁽¹⁾ pour les systèmes de Vlasov-Stokes [190] et Vlasov-Navier-Stokes [191].

*
* *

Comme les équations de Maxwell peuvent être vues comme un système de deux équations d'onde linéaire couplées, il est utile de commencer par un rappel sur la contrôlabilité des équations des ondes. A ce sujet, nous allons évoquer les résultats à présent classiques de Rauch-Taylor [210] et Bardos-Lebeau-Rauch [28], qui font appel à une *condition de contrôle géométrique* pour la zone de contrôle ω , que nous introduisons ci-dessous.

Définition 4.1. — *L'ouvert ω de \mathbb{T}^2 satisfait la condition de contrôle géométrique (GCC) s'il existe $T > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{T}^2$ et toute direction $e \in \mathbb{S}^1$, il existe $y \in [0, T]$ tel que $x + ye \in \omega$.*

Informellement, ceci signifie que tout rayon de lumière rencontre la zone de contrôle en temps uniforme, et que donc toute l'information peut être observée à partir de ω . Il s'agit de la première apparition d'une condition de contrôle géométrique dans ce mémoire ; d'autres feront bientôt leur apparition. Un résultat célèbre de Bardos, Lebeau et Rauch [28] exprime que l'équation des ondes $\partial_t^2 \varphi - \Delta_x \varphi = \mathbb{1}_\omega G$ est contrôlable en temps $T > 0$ si l'ouvert ω vérifie GCC en temps T . Dans [28] et [61], il est démontré que GCC est également une condition nécessaire pour ce problème de contrôlabilité. Au vu de ces résultats, il est naturel pour notre problème (le système de Vlasov-Maxwell n'est rien d'autre qu'un couplage entre une équation de transport hyperbolique et des équations d'onde) de supposer que ω satisfait GCC. Nous prouvons effectivement le théorème suivant [100].

Théorème 4.1. — *Supposons que ω satisfasse la condition de contrôle géométrique. Il existe $T_0 > 0$, tel que pour tout $T > T_0$, si pour $i = 0, 1$, $(f_i, E_i, B_i) \in H^3(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2) \times H^3(\mathbb{T}^2) \times H^3(\mathbb{T}^2)$ sont telles que f_i est à support compact en vitesse et satisfont les conditions de compatibilité :*

$$(4.3) \quad \operatorname{div} E_i = \int_{\mathbb{R}^2} f_i dv - \int_{\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2} f_i dv dx,$$

$$(4.4) \quad \int_{\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2} f_0 dv dx = \int_{\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2} f_1 dv dx,$$

ainsi que la condition de petitesse

$$(4.5) \quad \|(f_i, E_i, B_i)\|_{H^3} \leq \kappa, \quad i = 0, 1,$$

pour $\kappa > 0$ suffisamment petit, alors il existe un contrôle $G \in H^2([0, T] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$, à support dans ω , qui conduit la dynamique de Vlasov-Maxwell de (f_0, E_0, B_0) à (f_1, E_1, B_1) en temps T .

Il s'agit d'un résultat à données petites : on parle de contrôlabilité *locale*. La limitation sur le temps de contrôle est attendue, à cause de la propagation à vitesse finie de l'information dans les équations de Maxwell. Un problème ouvert intéressant serait d'estimer le temps minimal dans ce résultat.

1. dont j'ai co-dirigé la thèse, en collaboration avec Karine Beauchard. Cette thèse a été soutenue le 29 Septembre 2016.

La suite de cette section est organisée de la manière suivante : la section 4.1.2 est d’abord dédiée à la preuve de ce théorème. Ensuite, dans la section 4.1.3, nous énonçons et expliquons un autre résultat de contrôle, pour des situations où l’ouvert de contrôle ω ne satisfait pas la condition de contrôle géométrique.

4.1.2. Le cas avec condition de contrôle géométrique. — Nous esquissons dans cette section la preuve du Théorème 4.1.

Préliminaire 1 : La méthode du retour de Coron. — Pour prouver le théorème, qui rappelons-le concerne des solutions à données petites, la première idée naturelle est de suivre le schéma de preuve suivant :

- linéariser les équations autour de l’état trivial $(0, 0, 0)$ et prouver des propriétés de contrôlabilité pour ces équations linéaires ;
- prouver que ces propriétés sont préservées après petite perturbation et finalement démontrer par un argument de point fixe que ceci permet de trouver un contrôle pour le problème non-linéaire.

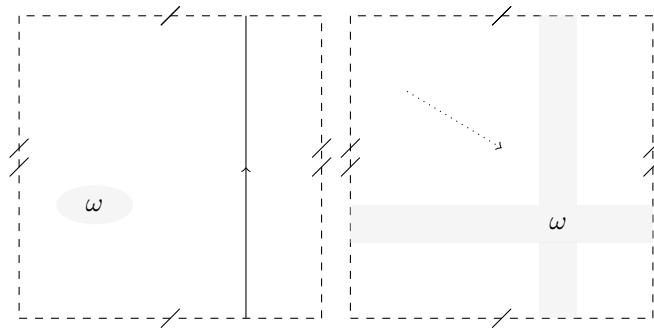
Malheureusement, nous sommes dans une situation où cette stratégie usuelle de preuve échoue. En effet, après linéarisation autour de l’état trivial, nous obtenons l’équation de transport libre relativiste

$$\begin{cases} \partial_t f + \hat{v} \cdot \nabla_x f = \mathbb{1}_\omega(x)G(t, x, v), \\ f_{t=0} = f_0, \end{cases}$$

qui n’est pas contrôlable en général. Par la formule de Duhamel, nous avons en effet la formule de représentation

$$f(t, x, v) = f_0(x - t\hat{v}, v) + \int_0^t \mathbb{1}_\omega(x - (t - \tau)\hat{v})G(\tau, x - (t - \tau)v, v) d\tau.$$

Pour influencer la valeur de f à un certain temps $T > 0$, il est clairement nécessaire que $\mathbb{1}_\omega(x - (T - \tau)\hat{v})$ doit être non nul pour tout $(x, v) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$, au moins pour un $\tau \in [0, T]$. Nous déduisons de cette observation que pour l’équation de transport, il y a une obstruction à la contrôlabilité qui provient de la géométrie des trajectoires. Il se peut que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x + t\hat{v}$ ne rencontre ω : c’est l’obstruction dues aux *mauvaises directions*. Bien entendu, ce problème n’apparaît pas dès que ω satisfait la condition de contrôle géométrique, mais nous gardons en tête cette considération, en vue du deuxième théorème qui sera discuté à la fin du chapitre. En revanche, une autre obstruction qui existe toujours (sauf dans le cas trivial où $\omega = \mathbb{T}^d$) provient du fait qu’une vitesse v peut avoir un module arbitrairement petit, de sorte que même si $x + t\hat{v}$ rencontre toujours ω pour un certain $t \in \mathbb{R}$, il se pourrait que cela aie lieu pour de très grandes valeurs de $|t|$ (en particulier plus grandes que le temps de contrôle espéré T) : il s’agit de l’obstruction dues aux *particules lentes*.



Afin de surmonter cette difficulté, nous allons nous appuyer la méthode du retour de Coron, initialement introduite dans [70]. Nous nous référons particulièrement au livre de Coron [72] pour de nombreuses applications de cette méthode, en particulier pour l’équation d’Euler incompressible (voir également [71, 97]), ainsi qu’à l’exposé de Glass au Séminaire Bourbaki [99]. Le principe est le suivant : au lieu de linéariser autour de l’état trivial, nous cherchons une solution homocline particulière du système de Vlasov-Maxwell complet, en autorisant des sources supportées dans ω , partant de $(0, 0, 0)$ et atteignant à nouveau $(0, 0, 0)$ après un certain temps $T > 0$. Dans l’intervalle de temps, la solution est

non triviale (et en particulier n'est pas nécessairement à données petites). Nous demandons alors que les équations linéarisées autour de cette solution particulière soient contrôlables.

Cette méthode s'appuie ainsi sur la *non-linéarité* des équations étudiées, en particulier ici sur le caractère quasi-linéaire des équations. Dans le contexte cinétique, nous recherchons une solution $(\bar{f}, \bar{E}, \bar{B})$ du système de Vlasov-Maxwell system, avec une source bien choisie à support dans ω , partant de $(0, 0, 0)$ et retournant à $(0, 0, 0)$ telle que les caractéristiques

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt}(t, x, v) = \hat{V}(t, X(t, x, v)) \text{ et } X(0, x, v) = x, \\ \frac{dV}{dt}(t, x, v) = \bar{E}(t, X) + \frac{\hat{V}^\perp}{c} \bar{B}(t, X) \text{ et } V(0, x, v) = v, \end{cases}$$

satisfont, pour un $T > 0$ assez grand :

Toute trajectoire X rencontre la zone de contrôle ω' durant $[0, T]$.

où ω' est un ouvert satisfaisant GCC et tel que $\bar{\omega}' \subset \omega$. Cette propriété sera suffisante pour prouver des résultats de contrôle pour les équations complètes.

Préliminaire 2 : Contrôle régulier des équations de Maxwell avec GCC. — Avec l'objectif d'implémenter cette stratégie, nous allons utiliser des résultats de contrôlabilité pour les équations de Maxwell. Nous avons déjà mentionné que ces équations peuvent être écrites comme un système d'équations d'ondes linéaires :

$$\begin{cases} \partial_t^2 E - c^2 \Delta_x E = -c^2 \nabla \rho - \partial_t j, \\ \partial_t^2 B - c^2 \Delta_x B = c \operatorname{curl} j. \end{cases}$$

Le contrôle est espéré par le biais de la source (ρ, j) , qui est à support dans ω (qui vérifie GCC). Une difficulté provient du fait que cette source doit satisfaire, pour des raisons de consistance, la conservation locale de la charge :

$$(4.6) \quad \partial_t \rho + \nabla \cdot j = 0.$$

Ceci a été surmonté par Phung dans [205], où il a montré qu'il était en fait possible de contrôler le système en utilisant uniquement des courants j à divergence nulle (et $\rho = 0$). En fait, Phung traite le cas beaucoup plus complexe de domaines de \mathbb{R}^3 avec un bord, pour des données L^2 .

Etape 1 : Construction de la solution de référence. — A présent, nous pouvons décrire formellement la construction de la solution de référence :

1. Dans un premier temps nous prenons $(0, 0, 0)$ comme solution de référence. En observant que les trajectoires libres avec une grande vitesse rencontrent "rapidement" ω' , nous trouvons un temps $T_0 > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{T}^2, \forall v \in \mathbb{R}^2, |v| \gg 1, \quad \bar{X}(t, x, v) \text{ rencontre } \omega' \text{ durant } [0, T_0].$$

Il reste donc à s'occuper des trajectoires dont la vitesse n'est pas assez élevée.

2. A cet effet, nous appliquons un théorème de contrôle pour Maxwell ([205]) : nous obtenons ainsi j_1 vérifiant $\nabla \cdot j_1 = 0$, à support dans ω , qui mène la solution aux équations de Maxwell de $(0, 0)$ à $(E_1 := (1, 1), B_1 := 0)$ en un certain temps T_1 . Il est facile d'associer au courant j_1 , une solution aux équations de Vlasov-Maxwell avec une source à support dans ω . En effet, soit $Z_i(v) \geq 0$ (pour $i = 1, 2$) une fonction régulière telle que $\int Z_i(v) dv = 0$ et $\int Z_i(v) \hat{v} dv = (\delta_{i=1}, \delta_{i=2})$. Nous posons :

$$\bar{f}(t, x, v) := Z_1(v) j_1^1(t, x) + Z_2(v) j_1^2(t, x), \quad \text{avec } j_1 = (j_1^1, j_1^2)$$

et (\bar{E}, \bar{B}) les solutions aux équations de Maxwell avec une source $\bar{\rho} = 0$ et $\bar{j} = j_1$. Nous observons alors que $(\bar{f}, \bar{E}, \bar{B})$ est une solution de Vlasov-Maxwell avec une certaine source dans ω . Notons en effet que

$$\bar{G} := \partial_t \bar{f} + \hat{v} \cdot \nabla_x \bar{f} + (\bar{E} + \frac{\hat{v}^\perp}{c} \bar{B}) \cdot \nabla_v \bar{f}$$

est à support dans ω , par définition de \bar{f} et j_1 . On remarque par ailleurs que l'état atteint en temps $T_0 + T_1$ est exactement $(0, E_1, 0)$, qui est une solution stationnaire de Vlasov-Maxwell (sans aucune source). L'effet du champ électrique E_1 est d'accélérer les trajectoires; puisque la solution atteinte est

stationnaire, nous pouvons alors attendre suffisamment de temps, de sorte que le module des vitesses atteintes excède celui dont on a besoin dans l'étape **1**. Ceci implique alors que pour un temps $T_2 > 0$ assez grand, nous avons la propriété

$$\forall x \in \mathbb{T}^2, \forall v \in \mathbb{R}^2, \quad \bar{X}(t, x, v) \text{ rencontre } \omega' \text{ durant } [0, T_2].$$

3. Pour finir, avec une procédure similaire à l'étape **2**, nous ramenons le système à l'état trivial $(0, 0, 0)$.

Etape 2 : Procédure d'absorption et de point fixe. — La dernière grande étape de la preuve consiste en la mise en place d'un schéma de point fixe. Commençons par expliquer comment définir un opérateur de point fixe adéquat \mathcal{V} . Soit $g \in H^3$ une fonction de distribution proche de la solution référence \bar{f} , et vérifiant la conservation locale de la charge.

Nous définissons d'abord (E^g, B^g) comme la solution aux équations de Maxwell avec des conditions initiales (E_0, B_0) et une source $(\rho^g, j^g) := (\int g \, dv, \int g \hat{v} \, dv)$. Nous définissons ensuite f_1 de la manière suivante :

$$(4.7) \quad \begin{cases} f_1(t=0) = f_0, \\ \partial_t f_1 + \hat{v} \cdot \nabla_x f_1 + \left(E^g + \frac{\hat{v}^\perp}{c} B^g \right) \cdot \nabla_v f_1 = 0, \\ + \text{Procédure d'absorption sur } \partial\omega'. \end{cases}$$

Nous avons choisi de ne pas décrire précisément la procédure d'absorption (et renvoyons à [101] pour les détails complets). De manière informelle, le principe est d'absorber les "particules" dont les trajectoires rentrent dans ω' . Cette procédure crée de nouvelles difficultés par rapport à la résolution du problème de Cauchy usuel ([233, 234, 18, 103] et beaucoup d'autres).

Ensuite, nous considérons la restriction de f_1 à $\mathbb{T}^2 \setminus \overline{\omega'}$ et appliquons un théorème d'extension pour prolonger de manière régulière les données à l'intérieur de ω' . Dans cette procédure, nous devons faire attention de préserver la conservation locale de la charge dans ω' . Nous obtenons de cette manière une fonction de distribution, notée f_2 , définie sur $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$. Nous posons finalement

$$(4.8) \quad \mathcal{V}(g) := \bar{f} + f_2.$$

La stratégie est ensuite d'appliquer le théorème de point fixe de Schauder pour cet opérateur. A cette fin, nous avons besoin en particulier d'obtenir des estimations H^3 pour $\mathcal{V}(g)$, qui nécessitent un soin particulier. La difficulté principale provient de la discontinuité des gradients au niveau des hypersurfaces $\partial\omega'$, qui apparaît à cause de la procédure d'absorption.

Notons maintenant f un point fixe pour \mathcal{V} , ainsi que (E, B) le champ électro-magnétique associé : il s'agit, par construction, d'une solution à Vlasov-Maxwell avec une source à support dans ω , et cette solution est par construction proche de la solution de référence. Par un argument de type Gronwall, ceci a pour conséquence que les caractéristiques (X, V) associées à (E, B) sont proches de celles associées à (\bar{E}, \bar{B}) et nous pouvons nous assurer qu'elles sont toutes absorbées. Ceci signifie qu'après un certain temps, $f \equiv 0$ en dehors de ω' . Après quelques autres manipulations mineures (à l'intérieur de ω , nous avons beaucoup de liberté), nous produisons ainsi une solution de Vlasov-Maxwell qui va de (f_0, E_0, B_0) à $(0, 0, 0)$ avec une source supportée dans ω .

De même, nous pouvons construire une solution qui va de (f_1, E_1, B_1) vers $(0, 0, 0)$. En s'appuyant sur la réversibilité des équations (si f est une solution, alors $f(-t, x, -v)$ aussi), cela fournit une solution qui va de $(0, 0, 0)$ à (f_1, E_1, B_1) . Ainsi, en juxtaposant ces deux solutions, nous obtenons finalement une solution à Vlasov-Maxwell qui va de (f_0, E_0, B_0) à (f_1, E_1, B_1) , avec une source à support dans ω . Nous considérons comme définition de la fonction de contrôle cette source. Nous concluons de cette manière la preuve du Théorème 4.1.

4.1.3. Le cas d'une bande. — Sans la condition de contrôle géométrique, qui joue un rôle crucial dans les arguments précédents, il semble sans espoir de parvenir à prouver un résultat de contrôle pour le système de Vlasov-Maxwell, principalement à cause de la partie Maxwell. L'idée qui sous-tend le résultat suivant est qu'en revanche, nous avons plus de flexibilité en ce qui concerne l'équation de Vlasov. Ainsi,

si nous nous focalisons sur la fonction de distribution (et abandonnons l'idée de contrôler le champ électro-magnétique), le résultat suivant peut être démontré [101].

Théorème 4.2. — *Supposons que ω contienne une bande du tore (i.e. un ouvert contenant l'image par la projection canonique d'une droite de \mathbb{R}^2). Soit $(f_0, E_0) \in H^3(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2) \times H^3(\mathbb{T}^2)$ des données initiales et soit $f_1 \in H^3(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$ une cible telles que f_0, f_1 sont à support compact en v et vérifient les conditions de compatibilité :*

$$(4.9) \quad \text{curl } E_0 = 0, \quad \text{div } E_0 = \int_{\mathbb{R}^2} f_0 dv - \int_{\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2} f_0 dv dx,$$

$$(4.10) \quad \int_{\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2} f_0 dv dx = \int_{\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2} f_1 dv dx.$$

Soit $b_0 \in H^3(\mathbb{T}^2)$ un champ magnétique tel que $\int_{\mathbb{T}^2} b_0 \neq 0$. Il existe $T_0 > 0$ tel que pour tout $T > T_0$, il existe $c_T > 0$ telle que pour tout $c > c_T$, si la condition de petitesse est vérifiée

$$(4.11) \quad \|(f_0, E_0)\|_{H^3} \leq \kappa, \quad \|f_1\|_{H^3} \leq \kappa,$$

avec κ assez petit, alors il existe un contrôle G tel que la solution (f, E, B) au système de Vlasov-Maxwell avec une donnée initiales $(f_0, E_0, B_0 := cb_0)$ satisfait :

$$(4.12) \quad f_{t=T} = f_1.$$

La stratégie pour montrer ce théorème est assez différente de celle du résultat précédent (si ce n'est qu'elle s'appuie également sur la méthode du retour, et que l'argument de point fixe final soit le même). En l'absence de condition de contrôle géométrique, il n'y a pas de résultat de contrôlabilité exacte pour les équations de Maxwell. A la place, l'idée que nous suivons est inspirée par le comportement des solutions du système de Vlasov-Maxwell lorsque la vitesse de la lumière c tend vers l'infini : comme on l'a déjà évoqué et étudié dans le Chapitre 3, Section 3.1, on sait en effet que dans la limite $c \rightarrow +\infty$, les solutions à Vlasov-Maxwell tendent dans un certain sens vers des solutions à Vlasov-Poisson. Le choix du scaling en c du champ magnétique initial correspond à la bonne échelle si l'on souhaite retrouver un champ magnétique non nul à la limite.

Le principe est alors de s'appuyer sur des résultats de contrôlabilité que nous avons obtenus dans [100] (plus précisément sur la construction de solutions de référence) pour l'équation de Vlasov-Poisson avec des champs électrique et magnétique extérieurs supplémentaires.

Un lemme d'approximation. — Un premier résultat clé est un lemme d'approximation dont nous expliquons la teneur ci-dessous. Il exprime comment les solutions des équations de Maxwell sont approximées, dans le régime où c devient grand, par un champ électrique solution à une équation de Poisson et un champ magnétique pouvant être considéré comme fixe. Supposons que le champ E_0 initial soit irrotationnel et que la loi de conservation locale soit vérifiée pour tous temps

$$(4.13) \quad \forall x \in \mathbb{T}^d, \quad \partial_t \rho + \nabla_x \cdot j = 0,$$

ainsi qu'un condition de courant en moyenne nul

$$(4.14) \quad \int_{\mathbb{T}^2} j dx = 0.$$

Alors, en notant $E_\infty = \nabla_x \Delta^{-1}(\rho - 1)$ le champ électrique obtenu avec l'équation de Poisson, on a, pour tout $t > 0$:

$$\begin{aligned} \left\| B - \int_{\mathbb{T}^d} B_0 dx - \tilde{B} \right\|_{L^\infty([0,t] \times \mathbb{T}^d)} &\leq \frac{C_{\rho,j}(t+1)}{c}, \\ \left\| E - E_\infty - \int_{\mathbb{T}^d} E_0 dx - \tilde{E} \right\|_{L^\infty([0,t] \times \mathbb{T}^d)} &\leq \frac{C'_{\rho,j}(t+1)}{c}, \end{aligned}$$

où $C_{\rho,j}$ et $C'_{\rho,j}$ sont des constantes dépendant seulement de ρ et j et (\tilde{E}, \tilde{B}) est un champ fortement oscillant dans la limite $c \rightarrow \infty$. Grâce à ces oscillations, ce champ n'a pas d'incidence lorsqu'on comparera les caractéristiques associées à (E, B) à celles associées à $(E_\infty + \int_{\mathbb{T}^d} E_0 dx, \int_{\mathbb{T}^d} B_0 dx)$.

La solution de référence dans le cas Vlasov-Poisson. — Ce lemme suggère d'étudier le cas Poisson à la place du cas Maxwell, ce qui semble plus abordable. Une raison fondamentale vient du fait que pour l'équation de Poisson, il y a en quelque sorte une vitesse infinie de propagation de l'information. D'après les résultats de [98, 100], on sait que l'équation de Vlasov-Poisson est localement contrôlable, sans condition sur l'ouvert ω (si ce n'est qu'il doit être non vide).

En suivant cette idée, nous commençons par rechercher une solution de référence (\bar{f}, \bar{E}) pour le système de Vlasov-Poisson avec un champ magnétique extérieur B_0 , telle que les caractéristiques (\bar{X}, \bar{V}) associées au champ de force $\bar{E} + \int_{\mathbb{T}^d} E_0 dx + \hat{v}^\perp B_0/c$ satisfassent :

$$\text{Toute trajectoire } X \text{ rencontre } B(x_0, r_0) \text{ durant } [0, T],$$

où $B(x_0, r_0)$ est une petite boule incluse dans ω .

La construction d'une telle solution est similaire à celle de [100], si ce n'est que les relations de consistance (4.13) et (4.14) doivent être satisfaites dans le but d'appliquer le lemme d'approximation ; ceci crée des difficultés techniques nouvelles et c'est pour cette raison que nous faisons l'hypothèse que ω contient une bande du tore.

Comme précédemment, la première obstruction vient des petites vitesses. Dans le cas Poisson, cette obstruction peut être surmontée de la façon suivante. Notons D une droite de \mathbb{T}^2 qui ne rencontre pas la zone de contrôle ω (nous réduisons ω si nécessaire) et n un vecteur unitaire, orthogonal à D . Nous avons la proposition suivante.

Proposition 4.1. — *Supposons que ω contienne une bande. Il existe une fonction $\theta \in C^\infty(\mathbb{T}^2; \mathbb{R})$ telle que*

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= \rho \text{ in } \mathbb{T}^2, \quad \text{Supp } \rho \subset \omega, \\ \forall x \in \mathbb{T}^2 \setminus \omega, \quad |\nabla\theta(x)| &> 0, \\ \int_D \nabla\theta \cdot n dx &= 0. \end{aligned}$$

La preuve de ce résultat, essentiellement contenue dans [98], s'appuie sur des outils d'analyse complexe. La deuxième condition exprime le fait que le champ $\nabla\theta$ accélère les trajectoires en dehors de ω . D'autre part, il se trouve qu'assurer les relations de consistance (4.13) et (4.14) revient à résoudre des équations elliptiques avec des contraintes. La troisième condition est utile pour résoudre ces équations et c'est précisément pour assurer cette condition que nous avons besoin de supposer que ω contient une bande.

Contrairement au cas avec GCC, il faut également s'occuper de l'obstruction venant des *mauvaises directions*. Nous pouvons d'abord observer qu'il n'y a qu'un nombre fini de directions v_i de \mathbb{S}^1 telles que :

$$\exists x \in \mathbb{T}^2, \forall t \in \mathbb{R}^+, x + tv_i \notin B(x_0, r_0).$$

Pour corriger ce défaut, nous nous appuyons sur un effet de courbure dû aux champs magnétiques satisfaisant ce qu'on nous avons appelé la "bending condition". Cet effet peut être facilement compris dans le bébé-modèle où $c = +\infty$ et $b_0 \equiv 1$. Dans ce cas très simple, les équations des caractéristiques s'écrivent

$$\frac{dX}{dt} = V, \quad \frac{dV}{dt} = V^\perp, \quad X_{t=0} = x, \quad V_{t=0} = v.$$

et les solutions, explicites sont $V = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} v$, $X = \begin{pmatrix} \sin t & \cos t - 1 \\ 1 - \cos t & \sin t \end{pmatrix} v + x$. Nous nous focalisons uniquement sur les vitesses assez grandes. Fixons un petit paramètre $\delta > 0$. Nous distinguons les deux possibilités :

- **"Bonne" direction initiale :** $|\frac{v}{|v|} - v_i| > \delta$. *Grosso modo*, quand $|v|$ est très élevé, la courbure des trajectoires est très faible et ces dernières ressemblent donc à des lignes droites, sur des temps grands. Il est possible de montrer que l'approximation par les lignes droites est valable sur un temps de l'ordre de $O_{|v| \rightarrow +\infty}(\frac{1}{|v|})$, ce qui implique que X rencontre $B(x_0, r_0)$.

- **“Mauvaise” direction initiale** : $|\frac{v}{|v|} - v_i| \leq \delta$. L'idée est de s'appuyer sur l'effet de rotation induit par le champ magnétique. Après un temps (petit) τ d'ordre $O_{|v| \rightarrow +\infty}(1)$, nous observons que $V_{t=\tau}$ n'est plus une mauvaise direction. Nous sommes ramenés au cas précédent.

Cet effet a lieu avec la vitesse relativiste, ainsi que pour une classe assez générale de champs magnétiques, satisfaisant la propriété appelée “bending condition” (dont une version un peu moins générale a été introduite dans notre article préliminaire [100]). Informellement, on demande à ce que le champ magnétique soit strictement positif sur un ouvert vérifiant la condition de contrôle géométrique. Sur cette zone, les caractéristiques sont “courbées”. Ailleurs, b peut être négatif, mais on requiert que b soit convenablement minoré afin d'assurer que l'effet de courbure n'est pas trop perturbé lorsque les caractéristiques traversent ces zones.

Avec ces ingrédients, il est possible de construire une bonne solution de référence (\bar{f}, \bar{E}) pour le système de Vlasov-Poisson system avec un champ magnétique extérieur B_0 , pour une source à support dans ω . Une telle construction peut être réalisée de sorte que les deux premiers moments (charge et courant) sont indépendants de c .

La solution de référence dans le cas Vlasov-Maxwell. — Appelons (\tilde{E}, \tilde{B}) la solution aux équations de Maxwell avec une source $(\bar{\rho}, \bar{j} := \int \bar{f} dv, \int \bar{f} \hat{v} dv)$. Nous obtenons ainsi une solution $(\bar{f}, \tilde{E}, \tilde{B})$ à Vlasov-Maxwell avec une source dans ω . L'idée est ensuite d'appliquer le lemme d'approximation par Poisson pour montrer qu'il s'agit d'une bonne solution de référence lorsque c est assez grand. Malheureusement, les conditions (4.13) et (4.14) ne sont pour le moment pas forcément satisfaites par \bar{f} . L'idée est d'ajouter une correction g à \bar{f} qui ne modifie pas la charge locale $\bar{\rho}$ mais modifie le courant. A cette fin, comme nous l'avons déjà mentionné, nous utilisons la troisième condition de la Proposition 4.1. Notons que puis que la charge locale n'est pas modifiée, le champ électrique créé via l'équation de Poisson reste inchangé. Grâce au lemme d'approximation par Poisson, nous pouvons montrer que la nouvelle solution de référence obtenue a ses caractéristiques vérifiant la propriété souhaitée.

Invariance d'échelle du système de Vlasov-Maxwell. — Pour conclure cette section, mentionnons qu'il est possible d'utiliser les propriétés d'invariance d'échelle de l'équation de Vlasov-Maxwell afin de déduire du Théorème 4.2 un autre résultat où la vitesse de la lumière est considérée comme fixe (disons $c = 1$) et dans lequel la condition $B_0 = cb_0$ est remplacée par une condition de petitesse peut-être plus conventionnelle. Nous nous référons une dernière fois à [101] pour l'énoncé et la preuve d'un tel résultat.

4.1.4. Perspectives. — Parmi les problèmes ouverts (concernant le contrôle d'équations cinétiques non linéaires) qui me semblent le plus pertinents, je citerais :

- le problème de contrôle et de stabilisation par la frontière (quand les équations sont posées dans un domaine à bord) ;
- le cas des équations collisionnelles, c'est-à-dire avec de surcroît un opérateur de Fokker-Planck ou de Boltzmann dans la partie cinétique. Cela modifie la structure des équations, et les stratégies présentées ici ne semblent pas directement applicables. La clé semble être de comprendre le problème linéarisé autour de données contenues dans une petite boule centrée en 0. En ce qui concerne le cas Fokker-Planck, il y a eu dans cette direction quelques progrès récents tout à fait significatifs dus à Le Rousseau et Moyano [170] et Beauchard et Pravda-Starov [32, 33].

4.2. Comportement en temps long pour le système de Vlasov-Navier-Stokes dans un tuyau

4.2.1. Contexte. — On s'intéresse à présent au système de Vlasov-Navier-Stokes en dimension 2

$$(4.15) \quad \begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \operatorname{div}_v((u - v)f) = 0 \text{ pour } (t, x, v) \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{R}^2, \\ \partial_t u + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \nabla p = \int_{\mathbb{R}^2} f(t, x, v)(v - u(t, x)) dv, \quad \operatorname{div} u = 0, \\ f|_{t=0} = f_0, \\ u|_{t=0} = u_0, \quad \operatorname{div} u_0 = 0, \end{cases}$$

qui modélise la dynamique d'un spray, décrit par sa fonction de distribution $f(t, x, v)$, et d'un fluide décrit par son champ de vitesse $u(t, x)$, évoluant dans un domaine Ω de \mathbb{R}^2 . Dans le cadre de ce modèle, le spray et le fluide peuvent interagir via des forces de trainée. Nous renvoyons à l'article récent [47] ainsi qu'à ses références pour les questions de modélisation liées à ces équations. Il s'agit d'un système dissipatif, contrairement à tous les autres modèles précédemment introduits dans ce mémoire.

Pour expliquer nos motivations, il est instructif de regarder le comportement de solutions à l'équation de Vlasov avec friction autour du champ de vitesses de fluide 0, sur l'espace entier \mathbb{R}^2 . Elle s'écrit

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f - \operatorname{div}_v(vf) = 0$$

et la solution, explicite, est donnée par la formule

$$f(t, x, v) = e^{2t} f_{|t=0}(x - (e^t - 1)v, e^t v).$$

Il y a donc une compétition entre transport/dispersion et friction. Le comportement lorsque $t \rightarrow +\infty$ peut être obtenu par un calcul explicite :

$$f(t, x, v) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^2} f_{|t=0}(x - v, v) dv \right) \delta_{v=0},$$

où δ est la mesure de Dirac, ce qui montre que c'est toujours la friction qui l'emporte, créant un phénomène de concentration en vitesse. Cela signifie par ailleurs qu'en dehors de l'équilibre trivial 0, les seules solutions stationnaires sont des mesures. On s'attend à des effets tout à fait similaires, i.e. une convergence en temps long vers une mesure de Dirac, pour les équations de Vlasov-Navier-Stokes complètes. Il s'agit cependant, à notre connaissance, d'un problème toujours largement ouvert très intéressant (voir [153, 67] pour des réponses partielles). Le comportement en temps grand est en revanche bien compris en présence d'un opérateur de Fokker-Planck dans l'équation de Vlasov ; l'ajout d'un tel terme dissipatif change beaucoup la dynamique, et on s'attend cette fois à une convergence vers une Maxwellienne (voir en particulier [108]).

4.2.2. Vlasov-Navier-Stokes dans un tuyau. — Avec Olivier Glass et Ayman Moussa [102], nous avons essayé de comprendre s'il existait des cadres géométriques où l'on pouvait construire des solutions stationnaires régulières avec une partie cinétique non identiquement nulle. Nous avons étudié à cet effet le système posé dans un tuyau

$$\Omega := \{(x_1, x_2) \in (-L, L) \times (-1, 1)\}.$$

On introduit les notations suivante pour le bord

$$\begin{aligned} \Gamma^l &:= \{-L\} \times (-1, 1) \times \{v_1 > 0\} \quad \text{et} \quad \Gamma^r := \{L\} \times (-1, 1) \times \{v_1 < 0\}, \\ \Gamma^u &:= (-L, L) \times \{1\} \times \{v_2 < 0\} \quad \text{et} \quad \Gamma^d := (-L, L) \times \{-1\} \times \{v_2 > 0\}. \end{aligned}$$

Les conditions au bord que nous imposons sont les suivantes :

$$(4.16) \quad \begin{cases} u = 0 \text{ pour } x \text{ sur } (-L, L) \times \{-1, 1\}, & u = u_p(x) \text{ pour } x \text{ sur } \{-L, L\} \times [-1, 1], \\ f = \psi(x_2, v) \text{ pour } (x, v) \text{ sur } \Gamma^l, & f = 0 \text{ pour } (x, v) \text{ sur } \Gamma^r \cup \Gamma^u \cup \Gamma^d, \end{cases}$$

où ψ est un flux rentrant de particules de spray, supposé à support compact, et u_p est un flot de Poiseuille,

$$u_p(x) := (1 - x_2^2)u_{\max}e_1,$$

en notant (e_1, e_2) la base canonique de \mathbb{R}^2 . Le paramètre $u_{\max} > 0$ est l'intensité du Poiseuille. Noter que u_p est nul sur les bords horizontaux, et que u_p est donc une solution des équations de Navier-Stokes dans le tuyau avec les conditions que l'on a choisies en (4.16). La condition de Dirichlet homogène sur les bords horizontaux est motivée par des considérations de modélisation : elle semble en effet pertinente en vue de la modélisation de l'évolution de sprays dans un poumon humain. Du point de vue mathématique, elle sera à la source de problèmes dans l'analyse qui va suivre. Observons enfin que l'on impose que les particules arrivant transversalement sur les bords horizontaux et le bord de "droite" sont absorbées. C'est ce mécanisme d'absorption que l'on souhaite utiliser pour contrer l'effet de concentration en vitesse dû à la friction.

Les résultats principaux de [102] sont réunis dans le théorème suivant (l’adjectif “adéquat” utilisé dans les énoncés est volontairement vague est reste encore à définir).

Théorème 4.3. — *Pour le système de Vlasov-Navier-Stokes dans le tuyau :*

1. *il y a existence de solutions globales faibles à la Leray au problème de Cauchy ;*
2. *pour u_{\max} assez petit, et pour des données rentrantes ψ adéquates, il existe une solution stationnaire régulière (\bar{u}, \bar{f}) , non triviale au sens où \bar{f} n’est pas identiquement nul ;*
3. *pour u_{\max} assez petit, et pour des données rentrantes ψ adéquates, il y a la stabilité asymptotique dans l’espace d’énergie L^2 , des solutions stationnaires précédemment construites, par rapport à des perturbations à support compact adéquat.*

Nous n’allons pas évoquer dans ce texte la construction des solutions à la Leray et renvoyons le lecteur à [102] ainsi qu’à ses références pour d’autres résultats dans un contexte voisin. Nous allons plutôt nous concentrer sur les deux points suivants, qui constituent notre apport le plus original pour le système de Vlasov-Navier-Stokes.

Une conséquence intéressante du point 3. est une propriété d’unicité locale (pour la topologie associée à une norme lipschitzienne à poids) des solutions stationnaires que l’on a construites .

*
* *

L’originalité de notre approche vient de notre utilisation de *conditions de contrôle géométrique*. De manière informelle, de telles conditions vont permettre d’assurer que les particules rejoignent toutes les bords horizontaux ou de droite, et sont donc absorbées.

Nous allons travailler dans un voisinage suffisamment petit d’un champ de vitesse de référence (qui sera précisément le flot de Poiseuille) dont les caractéristiques associées vérifient des propriétés géométriques remarquables : précisément que toutes les trajectoires partant du support de ψ et suivent la dynamique dictée par le flot et la friction atteignent les bords latéraux ou le bord de droite en un temps fixé à l’avance. C’est le contenu de ce que l’on a appelé dans [102] la *condition de sortie géométrique* (EGC pour exit geometric condition).

Commençons par rappeler la définition des caractéristiques $(X(s, t, x, v), V(s, t, x, v))$ dans ce contexte :

$$(4.17) \quad \begin{cases} \dot{X} = V, \\ \dot{V} = u(t, X) - V, \\ X|_{t=s} = x, V|_{t=s} = v, \end{cases}$$

pour $(x, v) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^2$. Pour être précis, ce n’est pas u mais un prolongement à un compact contenant Ω que l’on doit considérer, ce qui permet de traiter de manière commode la frontière $\partial\Omega$.

On définit alors le temps de sortie

$$\tau_+(s, x, v) := \inf\{t \in (s, +\infty) : X(s, t, x, v) \notin \bar{\Omega}\}.$$

Nous sommes maintenant en mesure d’introduire la condition de sortie géométrique, qui est réminiscente de la condition de contrôle géométrique de Bardos, Lebeau et Rauch (voir la Définition 4.1) :

Définition 4.2. — *Soit K un compact de $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^2$ et J un sous-intervalle de \mathbb{R}_+ . On dit que u satisfait la condition de sortie géométrique (EGC) en temps T par rapport à K sur J , si*

$$(4.18) \quad \sup_{(s, x, v) \in J \times K} (\tau_+(s, x, v) - s) < T,$$

et de plus, pour tout $(s, x, v) \in J \times K$, $(X, V)(s, \tau_+(s, x, v), x, v) \in \Sigma^+$, où Σ^+ désigne le bord sortant.

C’est à une telle propriété que l’adjectif “adéquat” fait référence dans les points 2. et 3. du Théorème 4.3 (le compact K étant alors le support de ψ ou de la perturbation). Elle va s’avérer cruciale dans toutes les étapes de l’analyse. En ce qui concerne un flot de Poiseuille u_p , on peut vérifier que u_p satisfait EGC

en un certain temps $T > 0$ par rapport à un compact $K \subset \Gamma^l$ sur \mathbb{R}_+ si K satisfait en particulier la propriété

$$(4.19) \quad \forall (x, v) \in K, \quad |x_2 + v_2| \neq 1.$$

En particulier, on voit que si K est inclus dans une boule en x_2, v_2 suffisamment petite, alors EGC est automatiquement vérifiée. Une propriété telle que (4.19) semble nécessaire afin d'éviter des effets de concentration des caractéristiques sur les bords horizontaux. Ce problème provient précisément du fait que le champ de vitesse s'annule sur ces bords.

Une propriété importante de cette EGC est qu'elle est stable par rapport à des petites perturbations, petites faisant référence à des normes L^1 locales en temps et L^∞ en espace. C'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 4.1. — *Soit $T > 0$. Soit u^\sharp un champ stationnaire vérifiant EGC en temps T par rapport à K sur \mathbb{R}^+ et soit J un intervalle de \mathbb{R}_+ . Pour tout $\alpha > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que tout $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+; \text{Lip}(\Omega))$ vérifiant*

$$\forall t \in J, \quad \int_t^{t+T+\alpha} \|u(\tau, \cdot) - u^\sharp\|_\infty d\tau \leq \delta,$$

vérifie EGC en temps $T + \alpha$ par rapport à K sur l'intervalle J .

4.2.3. Sur l'existence des équilibres. — Avec ces ingrédients géométriques, il est possible de démontrer l'existence d'une solution stationnaire régulière (\bar{u}, \bar{f}) , avec \bar{u} proche du Poiseuille u_p dans une norme Lipschitz à poids. On suppose que u_p vérifie EGC par rapport au support de la donnée entrante ψ . Nous nous appuyons sur un argument basé sur le théorème de point fixe de Schauder. Les estimations de stabilité adéquates sont obtenues comme des une conséquence de la propriété EGC. Précisons que l'on a besoin que la norme Lipschitz de ψ soit contrôlée, ce que l'on a également caché dans l'adjectif "adéquat". Les solutions stationnaires que l'on construit ont leur champ de vitesse satisfaisant la propriété EGC par rapport au support de ψ . Nous ne rentrerons pas dans les détails et renvoyons à [102].

4.2.4. Sur la stabilité des équilibres. — Nous allons expliquer plus en détails la preuve de la stabilité asymptotique des solutions stationnaires obtenues au point précédent. Considérons une donnée initiale (u_0, f_0) telle que

$$\|(u_0, f_0) - (\bar{u}, \bar{f})\| \ll 1,$$

dans une norme à poids adéquate. On suppose également que f_0 est à support compact, et que \bar{u} satisfait une variante de l'EGC par rapport au support de $\bar{f} - f_0$: c'est ce que l'on entend ici par "adéquat" dans l'énoncé du théorème. Cette variante de l'EGC demande seulement la propriété de sortie en partant du temps 0 uniquement.

Considérons (u, f) une solution à la Leray correspondante et notons

$$\hat{f} := f - \bar{f}, \quad \hat{u} := u - \bar{u}.$$

Il s'agit de démontrer la décroissance exponentielle des normes L^2 de \hat{f} et \hat{u} .

Notre preuve est basée sur un argument de continuité. On introduit

$$t^* := \sup\{t \geq T : \|u - \bar{u}\|_{L^1(s-T, s; L^\infty(\Omega))} < \delta, \forall s \in [T, t]\},$$

où $T > 0$ est tel que EGC est vérifié en temps $T - 1$ pour le flot de référence \bar{u} et $\delta > 0$ est un petit paramètre à fixer, principalement de sorte à ce qu'on puisse appliquer le Lemme 4.1. Il s'agit de montrer que $t^* = +\infty$. On remarque que la norme que l'on veut propager est précisément les normes L^1 locales en temps et L^∞ en espace intervenant dans le Lemme 4.1. Autrement dit, on cherche à propager la condition de sortie géométrique.

On commence par montrer que nécessairement $t^* \geq 3T/2$, en traitant le cas des petits temps :

Lemme 4.2. — Pour tout $t \in [T, 3T/2]$,

$$\|u - \bar{u}\|_{L^1(t-T, t; L^\infty(\Omega))} < \delta.$$

Pour démontrer ce lemme, on s'appuie sur un effet de régularisation parabolique pour Navier-Stokes. Un problème se pose néanmoins pour traiter l'intégrabilité en temps au voisinage de $t = 0$; on sait en effet que $\sqrt{t}\|u - \bar{u}\|_{H^2}$ appartient à L^2 en temps, mais le poids en t ne permet pas de contrôler directement, après utilisation de l'injection de Sobolev, la norme $\|u - \bar{u}\|_{L^1(0, T; L^\infty(\Omega))}$. D'autre part, nous avons un meilleur contrôle sur la norme H^1 grâce à l'énergie physique du système, mais l'injection H^1 dans L^∞ est fautive en dimension 2. L'idée consiste à utiliser l'inégalité de Brézis-Gallouet [58] qui est un raffinement de cette inégalité de Sobolev avec une correction logarithmique faisant intervenir la norme H^2 . La présence du log, qui lui est intégrable en 0, permet de contrôler le poids en temps qui nous posait problème.

Supposons que $t^* < +\infty$. On sait donc que u satisfait

$$\forall t \in [T, t^*], \quad \|u - \bar{u}\|_{L^1(t-T, t; L^\infty(\Omega))} < \delta.$$

Par continuité, on a aussi $\|u - \bar{u}\|_{L^1(t^*-T, t^*; L^\infty(\Omega))} = \delta$. Grâce au Lemme 4.1, on en déduit que u satisfait EGC en temps T par rapport au support de la donnée rentrante ψ , sur $[T, t^*]$. De même, on montre que u satisfait toujours la variante de l'EGC par rapport au support de la donnée initiale.

Grâce à ces informations, on démontre en partant d'une formule de représentation et en s'appuyant l'EGC que pour $t \in [T, t^*]$,

$$\hat{f}(t, x, v) = - \int_{t-T}^t e^{2(t-s)} (\hat{u} \cdot \nabla_v \bar{f})(s, X(t, s, x, v), V(t, s, x, v)) \mathbb{1}_{\tau_-(t, x, v) < s} ds,$$

où (X, V) sont les caractéristiques associées à u . On en déduit l'inégalité améliorée

$$\|\hat{f}(t)\|_{L_{x,v}^2} \leq C e^{2T} \|\nabla_v \bar{f}\|_\infty \int_{t-T}^t \|\hat{u}(s)\|_{L_x^2} ds.$$

Il vient alors, par une estimation d'énergie sur les équations de Navier-Stokes,

$$(4.20) \quad \frac{d}{dt} \|\hat{u}(t)\|_{L_x^2} + K_\Omega \|\hat{u}(t)\|_{L_x^2} \leq C e^{2T} \|\nabla_v \bar{f}\| \int_{t-T}^t \|\hat{u}(s)\|_{L_x^2} ds,$$

où $K_\Omega > 0$ est une constante dépendant seulement de Ω . Il s'agit d'une inégalité différentielle "à retard". Le lemme de type Gronwall avec retard que nous démontrons et utilisons est le suivant.

Lemme 4.3. — Soit $\kappa, \alpha, T > 0$ tels que $\alpha < \kappa/T$. Soit $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+)$ satisfaisant pour tout $t \in (\frac{3T}{2}, t^*)$ l'inégalité à retard

$$y'(t) + \kappa y(t) \leq \alpha \int_{t-T}^t y(s) ds.$$

Alors il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout $t \in [0, t^*)$,

$$y(t) \leq H_{\lambda, T} e^{-\lambda t}, \quad H_{\lambda, T} := \sup_{t \in [0, \frac{3T}{2}]} |y(t)| e^{\lambda t}.$$

On en déduit que, si α est assez petit (fait que l'on peut assurer avec les bonnes hypothèses sur l'état stationnaire (\bar{u}, \bar{f})), pour tout $t \in [0, t^*)$,

$$\|\hat{u}(t)\|_{L_x^2} \leq H_{\lambda, T} e^{-\lambda t}, \quad H_{\lambda, T} := \sup_{t \in [0, \frac{3T}{2}]} \|\hat{u}(t)\|_{L_x^2} e^{\lambda t}.$$

On peut donc rendre $\|\hat{u}(t^* - T/2)\|_{L_x^2}$ aussi petit que l'on veut, quitte à réduire la taille de la perturbation initiale. Par un argument de régularité parabolique pour Navier-Stokes 2D, on voit alors qu'on peut rendre la norme $\|\hat{u}\|_{L^1(t^*-T, t^*; L^\infty)}$ strictement inférieure à δ , ce qui est une contradiction avec la définition de t^* , et permet d'assurer que nécessairement $t^* = +\infty$.

Une fois que l'on sait que $t^* = +\infty$, on en déduit la décroissance exponentielle de $\|\hat{u}\|_{L_x^2}$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ grâce à (4.20) et au Lemme 4.3.

Chapitre 5

COMPORTEMENT EN TEMPS LONG POUR DES ÉQUATIONS DE BOLTZMANN LINÉAIRES

Nous décrivons dans ce chapitre des résultats obtenus en collaboration avec Matthieu Léautaud [135].

*
* *

Ce chapitre est dans la lignée directe du précédent. Nous caractérisons la dynamique en temps long pour des équations de Boltzmann linéaires *dégénérées*. Nous introduisons plusieurs *conditions de contrôle géométrique*, qui permettent de comprendre les interactions entre les mécanismes de transport et de collision, donnant un point de vue original sur le phénomène d'hypocoercivité. Le texte de ce chapitre s'appuie en grande partie sur l'acte de conférence [134].

5.1. Introduction

Nous étudions dans ce chapitre l'équation de Boltzmann linéaire

$$(5.1) \quad \partial_t f + v \cdot \nabla_x f - \nabla_x V \cdot \nabla_v f = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} [k(x, v', v) f(v') - k(x, v, v') f(v)] dv'}_{=:\mathcal{C}(f)},$$

pour $(t, x, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$ et $d \in \mathbb{N}^*$. Nous nous concentrerons sur ce cadre géométrique simple pour l'espace des phases, mais plusieurs généralisations sont possibles (telles qu'un cadre riemannien général ou encore le cas d'un domaine borné de \mathbb{R}^d avec réflexion spéculaire).

L'équation (5.1) constitue un modèle classique de la physique statistique et a de nombreuses applications, par exemple en neutronique, en transfert radiatif ou pour les gaz raréfiés. Elle permet de décrire la dynamique dans l'espace des phases d'une population de particules, via l'étude de l'évolution de leur fonction de distribution $f(t, x, v) \geq 0$.

La dynamique de ces particules est la conséquence de deux effets de nature très différente : elles sont d'une part *transportées* selon les trajectoires de l'hamiltonien $H(x, v) = \frac{|v|^2}{2} + V(x)$, où V est un potentiel extérieur fixé, et assez régulier, i.e. $V \in W^{2,\infty}(\mathbb{T}^d)$. On peut supposer, quitte à rajouter une constante, que $\int_{\mathbb{T}^d} e^{-V} dx = 1$. D'autre part, les particules subissent des *collisions*, ce qui signifie ici qu'elles peuvent interagir avec un arrière plan fixe, et ces collisions sont décrites grâce au noyau de collision $k(x, v, v')$, supposé ici de régularité $C^0(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$. Cela correspond à l'opérateur intégral \mathcal{C} apparaissant dans la partie droite de (5.1).

Deux premières propriétés importantes de (5.1) sont la conservation de la masse totale

$$\forall t \geq 0, \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} f(t, x, v) dv dx = 0,$$

et le principe du maximum

$$f|_{t=0} \geq 0 \implies \forall t \geq 0, f(t) \geq 0.$$

L'équation de Boltzmann linéaire est intéressante à étudier car elle constitue un prototype d'EDP hypocoercive au sens de Villani [230]. Le concept d'hypocoercivité réfère à la situation où une interaction dans une équation entre une partie coercive dégénérée (ici les collisions) et une partie conservative (ici le transport) conduit à une convergence vers un équilibre, alors que chaque partie considérée seule n'est pas suffisante pour garantir cette convergence. La dénomination fait bien sûr écho au concept d'hypoellipticité à la Hörmander [151].

Il est assez instructif de regarder l'exemple le plus simple d'équation de Boltzmann linéaire

$$(5.2) \quad \partial_t f + v \cdot \nabla_x f = \sigma \left[\left(\int_{\mathbb{S}^{d-1}} f \, dv \right) - f \right],$$

pour $(t, x, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{T}^d \times \mathbb{S}^{d-1}$, $d \in \mathbb{N}^*$, où σ est une constante **positive**. Nous avons le résultat classique suivant.

Théorème 5.1 (Ukai, Point et Ghidouche [229]). — *Il existe $C, \gamma > 0$ tels que, pour tout $f_0 \in L^1$,*

$$(5.3) \quad \forall t \geq 0, \quad \left\| f(t) - \int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{S}^{d-1}} f_0 \, dv \, dx \right\|_{L^1} \leq C e^{-\gamma t} \left\| f_0 - \int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{S}^{d-1}} f_0 \, dv \, dx \right\|_{L^1}.$$

où $f(t)$ est la solution de (5.2) avec donnée initiale f_0 .

Quand une inégalité telle que (5.3) est vraie, on parle de convergence uniforme/exponentielle vers l'équilibre. A la fin des années 90, Desvillettes et Villani ont initié un programme dont le but était d'étudier de tels phénomènes pour une large classe d'équations cinétiques. Ils ont introduit des méthodes pour prouver vers la convergence vers l'équilibre avec un taux plus rapide que tout (inverse) de polynôme, pour l'équation de Fokker-Planck cinétique (linéaire) [82] puis pour l'équation de Boltzmann non linéaire, avec l'hypothèse d'estimations *a priori* sur la solution [83]. Suite à ces travaux, de nombreuses contributions, dues notamment à Hérau et Nier [149], Hérau [148], Mouhot et Neumann [188], Villani [230], Dolbeault, Mouhot et Schmeiser [87], parmi d'autres, ainsi que les travaux plus récents [116], puis [226, 65, 186, 60], ont développé de nouvelles techniques ayant conduit à des avancées remarquables (permettant notamment d'atteindre des convergences exponentielles, de réduire la régularité demandée, ou bien encore de traiter de modèles plus complexes).

Insistons également sur le fait que ces travaux que l'on vient d'évoquer proposent pour la plupart des méthodes constructives, permettant d'obtenir des constantes en principe calculables dans leurs résultats de convergence, si bien que cette exigence est parfois incluse implicitement dans la définition même du concept d'hypocoercivité. Nous ne suivrons pas cette convention ici.

Remarquons également que bien que l'hypocoercivité ait spécifiquement été développée pour les équations cinétiques, il englobe en réalité des phénomènes de stabilité pour d'autres EDP ayant été largement étudiées dans la littérature, en particulier les systèmes hyperboliques partiellement dissipatifs satisfaisant la condition de Kawashima [161], ou l'équation des ondes amorties [210, 28, 171]. Ce dernier exemple sera une inspiration importante pour ce qui va suivre.

Dans les références citées précédemment, en ce qui concerne l'équation de Boltzmann linéaire, les noyaux de collision considérés satisfont systématiquement une condition de non-dégénérescence. Avec une telle hypothèse, en notant $\mathcal{M}(v) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} e^{-\frac{|v|^2}{2}}$ l'équilibre maxwellien normalisé, on a, suivant Dolbeault, Mouhot et Schmeiser [87], convergence exponentielle dans un espace L^2 à poids, note \mathcal{L}^2 .

Définition 5.1. — *On définit la norme \mathcal{L}^2 par*

$$\|f\|_{\mathcal{L}^2} := \left(\int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} |f|^2 \frac{e^{V(x)}}{\mathcal{M}(v)} \, dv \, dx \right)^{1/2}$$

et on note $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{L}^2}$ le produit scalaire associé.

Théorème 5.2 (Dolbeault, Mouhot et Schmeiser [87]). — *Supposons que*

$$\exists \lambda > 0, \forall (x, v, v') \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \frac{k(x, v, v')}{\mathcal{M}(v')} \geq \lambda$$

Alors, il existe $C, \gamma > 0$ tels que, pour tout $f_0 \in \mathcal{L}^2$, en notant $f(t)$ la solution de (5.1) associée,

$$\forall t \geq 0, \left\| f(t) - \left(\int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} f_0 \, dv \, dx \right) e^{-V} \mathcal{M}(v) \right\|_{\mathcal{L}^2} \leq C e^{-\gamma t} \left\| f_0 - \left(\int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} f_0 \, dv \, dx \right) e^{-V} \mathcal{M}(v) \right\|_{\mathcal{L}^2}.$$

L'hypothèse de non-dégénérescence implique en particulier qu'il y a des collisions sur tout l'espace des phases. Ceci est peu réaliste dans certaines situations physiques. Sans rentrer dans les détails, car ce n'est en aucun cas le but de ce texte de discuter un tel sujet, on trouve dans les réacteurs nucléaires, selon le médium (uranium ou eau, par exemple) dans lequel se propagent les neutrons, une assez grande disparité dans les ordres de grandeur des sections efficaces (qui caractérisent les interactions avec le médium en question). Typiquement, les sections efficaces dépendent aussi de la vitesse des particules incidentes. Par ailleurs, certains media tels que l'eau lourde favorisent la "création" de particules lentes. C'est sur ce principe que reposent les modérateurs de neutrons (qui permettent de les ralentir sans pour autant les absorber). Cela invite à considérer l'existence de régions de l'espace des phases où il n'y a pas de collisions. Il semble donc raisonnable, afin de pouvoir appréhender de tels exemples physiques, de supposer que k puisse s'annuler.

C'est ce problème en particulier que nous avons souhaité explorer avec Matthieu Léautaud de manière systématique. Avant nos travaux, Bernard et Salvarani [39, 38] (voir aussi Desvillettes et Salvarani [81]) ont donné les premiers résultats dans cette direction, en considérant le cas dégénéré suivant :

$$(5.4) \quad \partial_t f + v \cdot \nabla_x f = \sigma(x) \left[\left(\int_{\mathbb{S}^{d-1}} f \, dv \right) - f \right]$$

pour $(t, x, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{T}^d \times \mathbb{S}^{d-1}$, $d \in \mathbb{N}^*$, où $\sigma \geq 0$ peut s'annuler sur \mathbb{T}^d . Dans l'article [38], Bernard et Salvarani ont introduit une condition de contrôle géométrique :

Définition 5.2. — *La condition de contrôle géométrique est satisfaite s'il existe $T > 0$ tel que*

$$\inf_{(x, v) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{S}^{d-1}} \int_0^T \sigma(x + tv) > 0.$$

Comme les vitesses vivent ici sur la sphère, cette condition est équivalente au fait que toutes les trajectoires (libres) atteignent la zone où il y a des collisions, c'est à dire $\{\sigma > 0\}$, avant un temps $T > 0$ fixé au préalable (ce qui correspond précisément à la Définition 4.1 introduite dans le chapitre précédent de ce mémoire). Bernard et Salvarani prouvent alors le résultat suivant.

Théorème 5.3 (Bernard et Salvarani [38]). — *Il y a convergence exponentielle (dans L^1) pour (5.4) si et seulement si la condition de contrôle géométrique est satisfaite.*

5.2. Cadre de l'analyse

Donnons à présent les hypothèses sur le noyau de collision k que nous avons considérées dans [135].

- **A1.** Le noyau de collision k est positif ou nul sur $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.
- **A2.** La maxwellienne $\mathcal{M}(v)$ annule l'opérateur de collision, i.e. $\mathcal{C}(\mathcal{M}) = 0$. Cette hypothèse de structure entraîne que la fonction $(x, v) \mapsto e^{-V(x)} \mathcal{M}(v)$ est une solution stationnaire de (5.1).
- **A3.** On a la régularité $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} k^2(x, v', v) \frac{\mathcal{M}(v')}{\mathcal{M}(v)} \, dv' \, dv \in L^\infty(\mathbb{T}^d)$. Cette hypothèse est en particulier vérifiée dès que k croît au plus polynomialement en v et v' . On se réfère à [135] pour une discussion plus complète.

Nous voyons par conséquent qu'avec ces hypothèses, le noyau de collision peut être dégénéré aux deux sens suivants :

- il peut s'annuler sur un grand sous-ensemble de l'espace des phases ($k = 0$ est même autorisé) ;

– la fonction $\frac{k(x,v,v')}{\mathcal{M}(v')}$ n'est pas supposée être minorée par une constante positive à l'infini.

Le but est d'obtenir des critères de nature géométrique (portant sur l'hamiltonien H et le noyau de collision k) permettant de caractériser :

- **Q1** la convergence vers l'équilibre (pas forcément avec un taux),
- **Q1'** quand cette convergence a bien lieu, la convergence exponentielle vers cet équilibre.

Nous donnerons une réponse à ces questions avec un point de vue directement inspiré par la théorie du contrôle.

Une question connexe naturelle qui se pose est la suivante :

- **Q2** décrire la structure et les propriétés de localisation (dans le plan complexe) du spectre de l'opérateur associé à l'équation de Boltzmann linéaire.

Ce chapitre est organisé comme suit. Nous allons introduire dans la Section 5.3 les concepts géométriques clés. Ensuite, les Sections 5.4 and 5.5 seront respectivement consacrées aux questions **Q1** et **Q1'**. Finalement, nous évoquerons dans la section 5.6 quelques travaux en cours, consacrés à la généralisation au cas des domaines bornés avec condition de réflexion spéculaire, ainsi qu'à la question **Q2**.

5.3. Définitions géométriques

Les deux objets naturels pouvant être associés au transport et aux collisions sont respectivement les caractéristiques et l'ensemble où les collisions sont effectives.

Définition 5.3. — Les caractéristiques associées à l'hamiltonien $H(x, v) = \frac{|v|^2}{2} + V(x)$ sont la famille de difféomorphismes $(\phi_t)_{t \geq 0}$ définis pour tout $(x, v) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$ par $\phi_t(x, v) := (X_t(x, v), \Xi_t(x, v))$ avec

$$\begin{cases} \frac{dX_t(x, v)}{dt} = \Xi_t(x, v), & \frac{d\Xi_t(x, v)}{dt} = -\nabla_x V(X_t(x, v)), \\ X_{t=0} = x, & \Xi_{t=0} = v. \end{cases}$$

Définition 5.4. — L'ensemble ouvert ω de $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$ où les collisions sont effectives est

$$\begin{aligned} \omega &:= \left\{ (x, v) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d, \int_{\mathbb{R}^d} k(x, v, v') dv' > 0 \right\} \\ &= \left\{ (x, v) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d, \exists v' \in \mathbb{R}^d, k(x, v, v') > 0 \right\} = \left\{ (x, v) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d, \exists v' \in \mathbb{R}^d, k(x, v', v) > 0 \right\}. \end{aligned}$$

Les deux dernières égalités sont la conséquence de la positivité de k et de l'hypothèse **A2**.

Afin de comprendre comment le transport et les collisions peuvent interagir, nous allons introduire :

- plusieurs conditions de contrôle géométrique ;
- une notion structuro-géométrique, faisant intervenir une relation d'équivalence adéquate.

5.3.1. Conditions de contrôle géométrique. — Dans cette section, U va désigner un ouvert de $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$.

La notion de condition de contrôle géométrique la plus naturelle est la généralisation de la Définition 5.2 ou 4.1, en incluant le potentiel V dans la dynamique.

Définition 5.5. — Nous disons que U satisfait la condition de contrôle géométrique (GCC) par rapport à H s'il existe $T > 0$ tel que, pour tout $(x, v) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$, il existe $t \in [0, T]$ avec $\phi_t(x, v) \in U$.

Il sera utile d'introduire une notion plus faible, comme suit :

Définition 5.6. — Nous disons que U satisfait la condition de contrôle géométrique faible (GCC faible)⁽¹⁾ par rapport à H si pour presque tout $(x, v) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$, il existe $t \in [0, +\infty)$ avec $\phi_t(x, v) \in U$.

En raison de la non compacité de l'espace des phases $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$, il apparaît que la condition de contrôle géométrique n'est pas adaptée à l'analyse. Cela conduit à l'introduction des constantes de Lebeau :

1. que nous avons appelée "almost everywhere infinite time (aeit) Geometric Control Condition" dans [135]

Définition 5.7. — Les constantes de Lebeau⁽²⁾ (introduites par Lebeau dans [171] pour l'analyse de l'équation des ondes amorties) sont les

$$C^-(\infty) := \sup_{T \in \mathbb{R}^+} \inf_{(x,v) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{1}{T} \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^d} k(\phi_t(x,v), v') dv' \right) dt$$

Une propriété de contrôle géométrique qui sera adaptée s'écrira

$$C^-(\infty) > 0.$$

Notons la chaîne d'implications :

$$C^-(\infty) > 0 \implies \omega \text{ satisfait GCC} \implies \omega \text{ satisfait GCC faible.}$$

5.3.2. Une relation d'équivalence. — Nous abordons à présent une notion structuro-géométrique, dont le but est de tenir compte de manière plus fine des propriétés non-locales de l'opérateur de collision. Dans cette section, U_1 et U_2 désigneront des ouverts de $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$.

Nous définissons tout d'abord une relation binaire \mathcal{R}_k .

Définition 5.8. — Nous disons que $U_1 \mathcal{R}_k U_2$ s'il existe $(x, v_1, v_2) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ avec $(x, v_1) \in U_1$, $(x, v_2) \in U_2$ et tels que $k(x, v_1, v_2) > 0$ ou $k(x, v_2, v_1) > 0$.

Nous sommes à présent en mesure de définir la relation d'équivalence clé sur l'ensemble des composantes connexes de $\bigcup_{t \geq 0} \phi_{-t}(\omega)$.

Définition 5.9. — Etant données Ω_1 and Ω_2 deux composantes connexes de $\bigcup_{t \geq 0} \phi_{-t}(\omega)$, nous disons que $\Omega_1 \sim \Omega_2$ s'il existe $N \in \mathbb{N}$ et N composantes connexes $(\Omega^{(i)})_{1 \leq i \leq N}$ de $\bigcup_{t \geq 0} \phi_{-t}(\omega)$ telles que

- $\Omega_1 \mathcal{R}_k \Omega^{(1)}$
- pour tout $1 \leq i \leq N - 1$, $\Omega^{(i)} \mathcal{R}_k \Omega^{(i+1)}$,
- $\Omega^{(N)} \mathcal{R}_k \Omega_2$.

Dit autrement, deux composantes connexes sont équivalentes si on peut passer de l'une à l'autre par une chaîne finie de collisions.

La relation \sim est une relation d'équivalence sur l'ensemble des composantes connexes de $\bigcup_{t \geq 0} \phi_{-t}(\omega)$. Dans [135], nous définissons également une relation d'équivalence sur l'ensemble des composantes connexes de ω , et exhibons une bijection naturelle, permettant de relier ces deux notions. Il s'avère parfois plus commode dans les preuves de s'appuyer sur l'une ou l'autre.

5.4. Sur la convergence vers l'équilibre

Commençons par rappeler le caractère bien posé de l'équation de Boltzmann linéaire dans l'espace \mathcal{L}^2 .

Proposition 5.1. — Soit $f_0 \in \mathcal{L}^2$. Alors, il existe une unique solution $f \in C^0(\mathbb{R}; \mathcal{L}^2)$ à (5.1) avec $f|_{t=0} = f_0$, et nous avons

$$(5.5) \quad \forall t \geq 0, \quad \frac{d}{dt} \|f(t)\|_{\mathcal{L}^2}^2 = -D(f(t)),$$

avec

$$D(f) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^d} e^V \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{k(x, v', v)}{\mathcal{M}(v)} + \frac{k(x, v, v')}{\mathcal{M}(v')} \right) \times \mathcal{M}(v) \mathcal{M}(v') \left(\frac{f(t, x, v)}{\mathcal{M}(v)} - \frac{f(t, x, v')}{\mathcal{M}(v')} \right)^2 dv' dv dx.$$

2. L'indice – vient du fait que Lebeau introduit également

$$C^+(\infty) := \inf_{T \in \mathbb{R}^+} \sup_{(x,v) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{1}{T} \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^d} k(\phi_t(x,v), v') dv' \right) dt$$

qui ne sera pas utile dans l'analyse décrite dans ce chapitre.

Notons que le terme de dissipation $D(f)$ provient de la relation $D(f) := -2\langle \mathcal{C}(f), f \rangle_{\mathcal{L}^2}$; il est toujours positif ou nul d'après l'expression donnée ci-dessus. Avec l'hypothèse de croissance **A3.**, la preuve de cette proposition est en fait assez technique, nous renvoyons à [135].

Notre premier résultat principal ([135]) est la caractérisation de la convergence vers l'équilibre.

Théorème 5.4. — *Les deux énoncés suivants sont équivalents.*

1. L'ensemble ω satisfait la condition de contrôle géométrique faible.
2. Pour tout $f_0 \in \mathcal{L}^2$, il existe un équilibre Pf_0 tel que

$$\|f(t) - Pf_0\|_{\mathcal{L}^2} \rightarrow_{t \rightarrow +\infty} 0,$$

où $f(t)$ est la solution de (5.1) avec donnée initiale f_0 .

Quand l'énoncé 1. ou 2. a lieu, nous sommes également en mesure de décrire précisément l'ensemble des équilibres atteints, en termes des classes d'équivalence de la relation d'équivalence \sim . Ecrivons $\bigcup_{s \in \mathbb{R}^+} \phi_{-s}(\omega_{col}) = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$ la partition en composantes connexes, puis notons $([\Omega_j])_{j \in J}$ les classes d'équivalence pour \sim . Définissons alors

$$\forall j \in J, \quad U_j := \bigcup_{\Omega' \in [\Omega_j]} \Omega', \quad f_j := \frac{\mathbb{1}_{U_j} e^{-V} \mathcal{M}}{\|\mathbb{1}_{U_j} e^{-V} \mathcal{M}\|_{\mathcal{L}^2}}.$$

L'équilibre Pf_0 est donné par la formule

$$Pf_0 = \sum_{j \in J} \frac{1}{\|\mathbb{1}_{U_j} e^{-V} \mathcal{M}\|_{\mathcal{L}^2}} \left(\int_{U_j} f_0 \, dv dx \right) f_j,$$

(voir le paragraphe 5.4.1 qui suit pour un exemple explicite). En fait, cette description précise joue également un rôle crucial dans notre preuve.

Parmi tous les équilibres possibles, l'équilibre maxwellien occupe bien entendu une place très particulière. Comme cas particulier du Théorème 5.4, nous avons le

Théorème 5.5. — *Les deux énoncés suivants sont équivalents.*

- (i.) L'ensemble ω satisfait la condition de contrôle géométrique faible et il existe une seule et unique classe d'équivalence pour la relation d'équivalence \sim .
- (ii.) Pour tout $f_0 \in \mathcal{L}^2$, nous avons

$$\left\| f(t) - \left(\int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} f_0 \, dv \, dx \right) e^{-V} \mathcal{M}(v) \right\|_{\mathcal{L}^2} \rightarrow_{t \rightarrow +\infty} 0.$$

où $f(t)$ est la solution de (5.1) avec donnée initiale f_0 .

Dans le cas où le noyau de collision k satisfait la propriété selon laquelle pour tout $x \in p_{\mathbb{T}^d}(\omega)$ (où $p_{\mathbb{T}^d} : \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$ désigne la projection canonique), l'ensemble $p_{\mathbb{T}^d}^{-1}(\{x\}) \cap \omega$ est contenu dans une composante connexe de ω (c'est en particulier vérifié si ω est connexe ou si $\omega = \omega_x \times \mathbb{R}^d$), alors (i.) est équivalente à la propriété (plus facile à vérifier) :

- (i'.) L'ensemble ω satisfait la condition de contrôle géométrique faible et $\bigcup_{t \geq 0} \phi_{-t}(\omega)$ est connexe.

Les Théorèmes 5.4 et 5.5 sont également valables pour l'espace des phases T^*M , où M est une variété riemannienne compacte sans bord, modulo une adaptation des définitions géométriques, voir [135].

5.4.1. Un exemple de plusieurs classes d'équivalence. — Dans ce paragraphe, nous décrivons un exemple explicite pour lequel il y a convergence vers un équilibre, mais l'équilibre atteint Pf_0 n'est pas la projection de la donnée initiale f_0 vers l'équilibre maxwellien. En d'autres termes, il s'agit d'un théorème où le Théorème 5.4 s'applique, mais il y a plusieurs classes d'équivalence pour \sim , de sorte que le Théorème 5.5 ne s'applique pas. Ceci motive un étude approfondie des classes d'équivalence et de leur lien avec le noyau de l'opérateur de Boltzmann linéaire, pour laquelle nous nous référons à [135].

Considérons l'espace des phases $(x, v) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}$ (une construction similaire en plus haute dimension peut également être réalisée) et supposons $V = 0$, de sorte à avoir $\phi_t(x, v) = (x + tv, v)$. Choisissons $\varphi_{\pm} \in C^0 \cap L^\infty(\mathbb{R})$, tel que $\varphi_{\pm}(v) > 0$ pour tout $v \in \mathbb{R}_*^{\pm}$ et $\varphi_{\pm}(v) = 0$ pour tout $v \in \mathbb{R}^{\mp}$.

Définissons alors le noyau de collision

$$k(x, v', v) = \mathcal{M}(v) [\varphi_+(v)\varphi_+(v') + \varphi_-(v)\varphi_-(v')].$$

Nous avons donc $\omega := \{\mathbb{T} \times \mathbb{R}_*^-\} \cup \{\mathbb{T} \times \mathbb{R}_*^+\}$ et par conséquent, il vient $\bigcup_{t \geq 0} \phi_{-t}(\omega) = \{\mathbb{T} \times \mathbb{R}_*^-\} \cup \{\mathbb{T} \times \mathbb{R}_*^+\}$. Il en résulte que la condition de contrôle géométrique faible est vérifiée, mais que \sim a exactement deux classes d'équivalence.

Pour l'équation de Boltzmann linéaire associée à ce noyau de collision k , on a donc convergence vers

$$Pf_0 = \left(\int_{\mathbb{T} \times \mathbb{R}_*^-} f_0 \, dv dx \right) \mathcal{M}(v) \mathbb{1}_{v < 0} + \left(\int_{\mathbb{T} \times \mathbb{R}_*^+} f_0 \, dv dx \right) \mathcal{M}(v) \mathbb{1}_{v > 0}.$$

5.4.2. Le cas du transport libre sur le tore. — Comme corollaire du Théorème 5.5, nous avons le résultat suivant.

Corollaire 5.1. — *Supposons $V = 0$, et que $\omega = \omega_x \times \mathbb{R}^d$, $\omega_x \neq \emptyset$. Alors, pour tout $f_0 \in \mathcal{L}^2$, il vient*

$$\left\| f(t) - \left(\int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} f_0 \, dv dx \right) \mathcal{M}(v) \right\|_{\mathcal{L}^2} \rightarrow_{t \rightarrow +\infty} 0,$$

où $f(t)$ est la solution de (5.1) avec donnée initiale f_0 .

Il s'agit d'une conséquence des bonnes propriétés (presque ergodiques) du flot géodésique sur le tore plat \mathbb{T}^d . En revanche, cette situation n'est en aucun cas générique. En effet, pour tout $\omega_x \neq \mathbb{T}^d$, on peut exhiber un potentiel extérieur V arbitrairement petit pour lequel les conclusions du Corollaire 5.1 sont fausses (voir encore [135]).

Le Corollaire 5.1 s'applique en particulier à l'équation (5.4) : il y a convergence vers la maxwellienne, dès que σ n'est pas identiquement nul.

5.4.3. Éléments de preuve du théorème 5.5. — Nous allons donner quelques idées menant à la preuve du Théorème 5.5. Le Théorème 5.4 est basé sur les mêmes idées, mais requiert de surcroît une analyse reliée aux classes d'équivalence de \sim ; cet aspect ne sera pas évoqué dans ce texte.

Introduisons d'abord une propriété de *continuation unique*, qui sera en fait équivalente à (i.) et (ii.).

Définition 5.10. — *Nous disons que l'ensemble ω satisfait la propriété de continuation unique (UCP) si la seule solution $f \in C_t^0(\mathcal{L}^2)$ à*

$$(5.6) \quad \begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f - \nabla_x V \cdot \nabla_v f = 0, \\ \mathcal{C}(f) = 0, \end{cases}$$

$$\text{est } f = \left(\int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} f \, dv dx \right) \frac{e^{-V}}{\int_{\mathbb{T}^d} e^{-V} dx} \mathcal{M}(v).$$

Nous prouvons que (i.) implique UCP via une analyse du noyau de \mathcal{C} et un argument de propagation de l'information le long des caractéristiques. Pour la preuve de (ii.) implique (i.), nous pouvons raisonner par contraposée. En supposant que (i.) n'ait pas lieu, nous sommes capables de construire des solutions à (5.1) qui ne convergent pas vers l'équilibre maxwellien lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Nous allons plus insister sur la preuve du fait que la propriété de continuation unique implique (ii.). Elle est basée sur l'identité de dissipation (5.5).

Une difficulté vient du fait que contrairement au cas classiques, nous n'avons pas un contrôle du type

$$D(f) \gtrsim \left\| f - \left(\int f dv \right) \mathcal{M}(v) \right\|_{\mathcal{L}^2} \quad \text{ou} \quad D(f) \gtrsim \|\mathcal{E}(f)\|_{\mathcal{L}^2},$$

précisément à cause de la dégénérescence potentielle du noyau de collision. En revanche, nous sommes en mesure de prouver, grâce à une étude détaillée de la dissipation D , que la propriété de coercivité *faible* suivante est vraie :

$$D(f) = 0 \implies \mathcal{E}(f) = 0.$$

Cette propriété est également vérifiée dans le cas général de plusieurs classes d'équivalence.

Nous raisonnons par contradiction. Supposons l'existence d'une donnée initiale g_0 à moyenne nulle, niant la convergence attendue. Considérons alors la suite de fonctions $h_n(t, x, v) := g(t_n + t, x, v)$, où $t_n \rightarrow +\infty$ et vérifie

$$(5.7) \quad \|h_n(0)\|_{\mathcal{L}^2} = \|g(t_n)\|_{\mathcal{L}^2} \rightarrow \alpha > 0.$$

On peut également imposer sans perte de généralité que $t_{n+1} - t_n \rightarrow +\infty$.

Grâce à l'identité de dissipation (5.5), nous déduisons que

$$(5.8) \quad \int_0^{t_{n+1}-t_n} D(h_n) dt \rightarrow 0.$$

Le coeur de l'analyse est un argument d'unicité-compacité : supposons (quitte à extraire), que $h_n \rightharpoonup h$. Comme h_n est une solution de l'équation de Boltzmann linéaire, la limite faible h vérifie également (5.1) ; de plus, grâce à (5.8), un argument de semi-continuité inférieure et à la propriété de coercivité faible, on a $\mathcal{E}(h) = 0$. En outre, comme h_n est de moyenne nulle, h l'est également. Par conséquent, en utilisant la propriété de continuation unique et le fait que h est à moyenne nulle, nous concluons que $h = 0$.

L'étape suivante consiste à étudier la suite de mesures de défaut $\nu_n = |h_n|^2$ et montrer que la limite faible est forcément $\nu = 0$. Cela conduira à une contradiction avec (5.7). L'équation satisfaite par ν_n s'écrit

$$(5.9) \quad \frac{1}{2} (\partial_t \nu_n + v \cdot \nabla_x \nu_n - \nabla_x V \cdot \nabla_v \nu_n) = - \left(\int_{\mathbb{R}^d} k(x, v, v') dv' \right) \nu_n + \left(\int_{\mathbb{R}^d} k(x, v', v) h_n(v') dv' \right) h_n$$

L'analyse repose sur la structure de l'équation de Boltzmann linéaire, qui est constituée d'une partie comportant le transport cinétique et un amortissement (le terme de perte) et d'une partie relativement compacte (le terme de gain, i.e. le terme faisant intervenir une moyenne en vitesse de la fonction de distribution). Le fait que le terme moyenné en vitesse soit relativement compact peut être prouvé grâce à des versions convenables des lemmes de moyenne de Golse, Lions, Perthame, Sentis [105] et DiPerna, Lions, Meyer [84].

En rappelant que $h_n \rightharpoonup 0$, on obtient donc que toute limite faible ν satisfait

$$\partial_t \nu + v \cdot \nabla_x \nu - \nabla_x V \cdot \nabla_v \nu = -2 \left(\int_{\mathbb{R}^d} k(x, v, v') dv' \right) \nu.$$

En écrivant l'identité

$$(5.10) \quad \left(\int_{\mathbb{R}^d} k(x, v, v') dv' \right) |h_n|^2 = -\mathcal{E}(h_n) h_n + \left(\int_{\mathbb{R}^d} k(x, v', v) h_n(t, x, v') dv' \right) h_n,$$

nous pouvons en fait montrer en rappelant (5.8) que $(\int_{\mathbb{R}^d} k(x, v, v') dv') \nu = 0$. La propriété de continuation unique permet alors de conclure que nécessairement, $\nu = 0$.

Pour être un peu plus précis, dans cette analyse de la suite de mesures de défaut, il y a une possible perte de masse à l'infini en vitesse. Pour éviter cette difficulté, l'idée est de s'appuyer sur le principe du maximum satisfait par l'équation de Boltzmann linéaire et une procédure d'approximation de la donnée initiale \mathcal{L}^2 par des données L^∞ à poids.

5.5. Sur la convergence exponentielle vers l'équilibre

En ce qui concerne la convergence exponentielle vers l'équilibre, nous prouvons dans [135] le résultat suivant.

Théorème 5.6. — *Les deux énoncés suivants sont équivalents.*

(a.) $C^-(\infty) > 0$.

(b.) *Il existe $C > 0, \gamma > 0$ tels que, pour tout $f_0 \in \mathcal{L}^2$, l'unique solution $f(t)$ à (5.1) avec donnée initiale f_0 satisfait pour tout $t \geq 0$,*

$$\left\| f(t) - \left(\int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} f_0 dv dx \right) e^{-V} \mathcal{M}(v) \right\|_{\mathcal{L}^2} \leq C e^{-\gamma t} \left\| f_0 - \left(\int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} f_0 dv dx \right) e^{-V} \mathcal{M}(v) \right\|_{\mathcal{L}^2}.$$

• On rappelle que Bernard et Salvarani [39] ont obtenu l'exact analogue de ce résultat, pour l'équation (5.4); leurs méthodes, basées sur des techniques de théorie spectrale, sont différentes de celles présentées ici.

• Dans l'article [187], Mokhtar-Karroubi a également étudié cette question dans le cas où $V = 0$, $(x, v) \in \mathbb{T}^d \times U$, et U est un ouvert borné de \mathbb{R}^d ; il a indépendamment introduit des quantités analogues aux constantes de Lebeau.

• Nous sommes ici encore en mesure de prouver un analogue riemannien du Théorème 5.6.

L'étude générale précédente sur la convergence vers l'équilibre (i.e. le Théorème 5.4) permet de prouver une propriété de rigidité de l'équilibre maxwellien, par rapport au phénomène de convergence exponentielle vers l'équilibre. Il s'agit de la proposition suivante (voir encore [135]).

Proposition 5.2. — *Supposons qu'il existe $C > 0, \gamma > 0$ tel que, pour tout $f_0 \in \mathcal{L}^2$, il existe un équilibre Pf_0 pour lequel on a*

$$\|f(t) - Pf_0\|_{\mathcal{L}^2} \leq C e^{-\gamma t} \|f_0 - Pf_0\|_{\mathcal{L}^2},$$

où $f(t)$ est la solution de (5.1) avec donnée initiale f_0 .

Alors, on a $C^-(\infty) > 0$. En particulier Pf_0 est nécessairement la projection de f_0 sur l'équilibre maxwellien, i.e.

$$Pf_0 = \left(\int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} f_0 dv dx \right) \frac{e^{-V}}{\int_{\mathbb{T}^d} e^{-V} dx} \mathcal{M}(v).$$

5.5.1. Eléments de preuve du théorème 5.6. — Pour conclure cette section, nous allons expliquer quelques idées de la preuve du Théorème 5.6

• Preuve de (a.) \implies (b.). Rappelant l'identité de dissipation (5.5), nous nous appuyons sur le fait (bien connu en théorie du contrôle) que la décroissance exponentielle est équivalente à l'inégalité d'observabilité suivante (mettant en relation la dissipation et l'énergie au temps initial) :

Il existe $K, T > 0$ tels que, pour tout $f_0 \in \mathcal{L}^2$ à moyenne nulle, on a

$$(5.11) \quad K \int_0^T D(f(t)) dt \geq \|f_0\|_{\mathcal{L}^2}^2,$$

où f est la solution de (5.1) avec la donnée initiale f_0 .

L'inégalité d'observabilité est démontrée via un raisonnement par l'absurde, dont la trame rappelle celle déjà utilisée pour le Théorème 5.5. On suppose que l'inégalité d'observabilité n'est pas vraie. Cela signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $f_{0,n} \in \mathcal{L}^2$, à moyenne nulle, tel que

$$\int_0^n D(f_n) dt < \frac{1}{n} \|f_{0,n}\|_{\mathcal{L}^2}^2,$$

en notant f_n la solution de (5.1) associée. Après renormalisation, on peut supposer que $\|f_{0,n}\|_{\mathcal{L}^2} = 1$. Grâce à l'identité de dissipation (5.5), on sait que pour tout $T > 0$, pour n assez grand,

$$\|f_n(T)\|_{\mathcal{L}^2}^2 = \|f_{0,n}\|_{\mathcal{L}^2}^2 - \int_0^T D(f_n) dt \geq 3/4.$$

Comme $\|f_n\|_{L_t^\infty \mathcal{L}^2} \leq 1$, on peut supposer (quitte à extraire), que $f_n \rightharpoonup f$. Nous avons alors $D(f) = 0$, puis $\mathcal{C}(f) = 0$ et finalement grâce à la propriété de continuation unique, $f = 0$, de sorte que $f_n \rightharpoonup 0$.

L'idée est ensuite d'étudier la suite de mesures de défaut $\nu_n = |f_n|^2$. A nouveau, il y a une perte possible de masse à l'infini en vitesse. L'argument que nous avons utilisé pour surmonter ce problème a consisté à étudier directement l'évolution des normes \mathcal{L}^2 . Par une formule de Duhamel, nous obtenons que $\nu_n = |f_n|^2$ vérifie

$$\begin{aligned} \nu_n(t, x, v) = & e^{-2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} k(\phi_{s-t}(x, v), v') dv' ds} \nu_{0,n}(\phi_{-t}(x, v)) \\ & + \int_0^t 2 \left(\int_{\mathbb{R}^d} k(X_{s-t}(x, v), v', \Xi_{s-t}(x, v)) f_n(s, X_{s-t}(x, v), v') dv' \right) f_n(s, \phi_{s-t}(x, v)) \\ & \times e^{-2 \int_s^t \int_{\mathbb{R}^d} k(\phi_{\tau-t}(x, v), v') dv' d\tau ds}. \end{aligned}$$

et nous pouvons ainsi directement étudier la norme \mathcal{L}^2 de f_n . En utilisant l'information clé $C^-(\infty) > 0$ (pour traiter le premier terme du membre de droite) et $f_n \rightharpoonup 0$ combiné à un lemme de moyenne (pour traiter le second), nous concluons que pour T et n assez grands, $\|f_n(T)\|_{\mathcal{L}^2}^2 \leq 1/2$. Il s'agit d'une contradiction manifeste avec $\|f_n(T)\|_{\mathcal{L}^2}^2 \geq 3/4$.

• Preuve de (a.) \implies (b.). Par contraposée, on suppose $C^-(\infty) = 0$. Cela signifie qu'il existe au moins une trajectoire non amortie (i.e. ne subissant pas de collision). Le principe est d'utiliser une construction de type optique géométrique, en considérant une suite de données initiales se concentrant sur une trajectoire non amortie, afin de montrer que l'inégalité d'observabilité (5.11) ne peut pas être vraie.

5.6. Prolongements

Dans des projets en cours avec Matthieu Léautaud, nous cherchons à donner des compléments à ces résultats :

- tout d'abord, nous étendons ces résultats au cas de domaines avec bord, avec une condition de réflexion spéculaire [136]. Le problème dû au possible manque de compacité jusqu'au bord pour les moyennes en vitesse est surmonté en adaptant des arguments dus à Guo [117]. Se posent aussi des problèmes d'approximation, de trace et de représentation pour les solutions L^2 d'une équation de transport dans un domaine à bord.
- Nous étudions également le spectre de l'opérateur associée à l'équation de Boltzmann linéaire. Plus précisément, nous cherchons à montrer l'appartenance au spectre de quantités "géométriques", faisant intervenir des points fixes pour la dynamique hamiltonienne, ou des moyennes sur des trajectoires fermées [137]. Nous avons obtenu plusieurs résultats partiels, mais cherchons encore à obtenir une description aussi complète que possible.

Plusieurs résultats préliminaires ont été annoncé dans les actes du séminaire Laurent Schwartz [134].

*
* *

Dans une direction proche, avec François Golse, nous avons également un projet en cours sur le comportement en temps long pour des équations de transport libre, posées dans des domaines avec réflexion de Maxwell (i.e. une combinaison convexe entre réflexion spéculaire et réflexion diffuse), voir à ce sujet les travaux [15, 14, 164]. Le mécanisme dissipatif provient donc des parties du bord où il y a réflexion diffuse. Nous avons mis en évidence plusieurs cadres géométriques où l'on a convergence exponentielle vers l'équilibre maxwellien. La méthodologie est proche de celle exposée dans ce chapitre, mais l'analyse requiert des propriétés de compacité qui ne sont pas directement données par les lemmes de moyenne.

Chapitre 6

CONTRÔLE DE L'ÉQUATION DES WATER WAVES 2D AVEC TENSION DE SURFACE

Nous décrivons dans ce chapitre des résultats obtenus en collaboration avec Thomas Alazard et Pietro Baldi [4].

*
* *

Ce chapitre met un terme à ce mémoire. Il est différent des précédents dans la mesure où les équations que nous étudions ne sont pas des équations cinétiques. Nous y étudions les propriétés de contrôlabilité du système des water waves 2D avec tension de surface, à l'aide de méthodes microlocales.

6.1. Introduction

On s'intéresse à la dynamique des water waves, c'est-à-dire à l'évolution des perturbations de la surface libre d'un liquide (par exemple les vagues, dans un contexte marin). Ces perturbations peuvent être générées par exemple par l'immersion d'un corps solide ou par un souffle appliqué sur la surface libre. La question mathématique que l'on s'est posé avec Thomas Alazard et Pietro Baldi est la suivante : quelles sont les ondes qui peuvent être générées si l'on s'autorise à souffler uniquement sur une portion localisée de la surface libre ? Il s'agit d'un problème de contrôlabilité exacte.

De nombreux modèles sont disponibles pour modéliser les vagues ; en partant de l'équation d'Euler incompressible à surface libre qui constitue le modèle le plus fondamental, on peut dériver, en fonction du régime considéré, plusieurs modèles simplifiés, tels que Saint-Venant, KdV, NLS, Benjamin-Ono, etc. (voir en particulier le livre de Lannes [167]). Le problème de contrôlabilité exacte a été largement étudié pour ces équations, voir en particulier le livre de Coron [72] pour un exposé de plusieurs résultats ou encore l'article récent de Laurent, Linares, Rosier [169] sur Benjamin-Ono.

L'originalité de notre travail vient de notre volonté à considérer les équations complètes valables en tout régime, autrement dit, nous cherchons à prouver des propriétés de contrôlabilité exacte pour les équations d'Euler incompressible à surface libre.

Plus précisément, on se propose donc de considérer la dynamique d'un fluide incompressible, irrotationnel,

- se déplaçant sous l'effet de la force de gravitation et de la tension de surface,
- dans un domaine $\Omega(t)$, dépendant du temps, avec une frontière libre $\partial\Omega(t)$,

qui est décrite par un système d'équations complètement non linéaires (par opposition aux modèles asymptotiques évoqués précédemment, qui sont semi-linéaires⁽¹⁾).

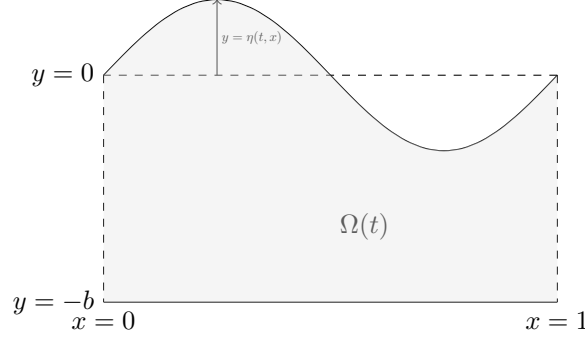
Dans tout ce qui va suivre, on va considérer que le fluide est bidimensionnel, et périodique dans une direction. Au temps $t \geq 0$, on suppose qu'il occupe le domaine $\Omega(t)$ avec une surface libre paramétrée

1. à l'exception de Saint-Venant, qui est quasi-linéaire

par un graphe :

$$\Omega(t) = \{(x, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}, -b < y < \eta(t, x)\},$$

où $b \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ permet de modéliser un fond plat (ou infini) et le graphe fait partie des inconnues.



Le champ de vitesse $v: \Omega(t) \rightarrow \mathbb{R}^2$ est solution des équations d'Euler incompressibles, et satisfait les contraintes d'incompressibilité et d'irrotationalité :

$$\partial_t v + v \cdot \nabla v + \nabla(P + gy) = 0, \quad \operatorname{div} v = 0, \quad \operatorname{curl} v = 0 \quad \text{dans } \Omega(t),$$

où $g > 0$ est la gravité et $P(t, x)$ est la pression.

Les conditions au bord sont les suivantes

$$\begin{aligned} \partial_t \eta &= \sqrt{1 + |\partial_x \eta|^2} v \cdot n && \text{sur } y = \eta(t, x), \\ P &= \underbrace{\partial_x \left(\frac{\partial_x \eta}{\sqrt{1 + (\partial_x \eta)^2}} \right)}_{=: H(\eta)} + P_{ext}(t, x) && \text{sur } y = \eta(t, x), \end{aligned}$$

en notant $n(t, x)$ la normale extérieure à la surface, et

$$v_y = 0 \quad \text{sur } y = -b.$$

La première équation est la condition cinématique, qui exprime que les particules de fluides qui sont à la surface le restent. La deuxième exprime l'équilibre des forces à la surface libre ; le terme $H(\eta)$, qui n'est autre que la courbure du graphe, représente l'effet de la tension de surface, tandis que P_{ext} modélise une force extérieure, qui sera le contrôle par lequel on souhaite agir sur la dynamique du fluide.

Puisque $\operatorname{curl} v = 0$, on peut écrire $v = \nabla \phi$ et on obtient

$$\Delta_{x,y} \phi = 0, \quad \partial_t \phi + \frac{1}{2} |\nabla_{x,y} \phi|^2 + P + gy = 0, \quad \partial_y \phi|_{y=-b} = 0.$$

Finalement, en posant $\psi(t, x) = \phi(t, x, \eta(t, x))$, et en introduisant l'opérateur de Dirichlet-Neumann $G(\eta)$ qui à ψ associe la dérivée normale $\partial_n \phi$ du potentiel à la surface, via la formule

$$(G(\eta)\psi)(t, x) = \sqrt{1 + (\partial_x \eta)^2} \partial_n \phi|_{y=\eta(t,x)},$$

on obtient finalement que (η, ψ) vérifie la formulation de Zakharov-Craig-Sulem [237, 74]

$$(6.1) \quad \begin{cases} \partial_t \eta = G(\eta)\psi, \\ \partial_t \psi + g\eta + \frac{1}{2} (\partial_x \psi)^2 - \frac{1}{2} \frac{(G(\eta)\psi + (\partial_x \eta)(\partial_x \psi))^2}{1 + (\partial_x \eta)^2} = H(\eta) + P_{ext}. \end{cases}$$

Notons que Alazard, Burq et Zuily ont vérifié que ces équations étaient bien équivalentes à la formulation initiale, même pour des données peu régulières [6].

*
* *

Avec Thomas Alazard et Pietro Baldi, nous avons étudié la contrôlabilité exacte du système (6.1) avec un contrôle uniquement dans l'équation sur ψ , et avons prouvé dans l'article [4] le résultat suivant. On pose $H_0^s := \{u \in H^s, \int_{\mathbb{T}} u dx = 0\}$.

Théorème 6.1. — Soit $T > 0$ et soit $\omega \subset \mathbb{T}$ un ouvert non vide quelconque. Il existe $\sigma > 0, M_0 > 0$ tels que, pour tout $(\eta_{in}, \psi_{in}), (\eta_{final}, \psi_{final})$ dans $H_0^{\sigma+1/2}(\mathbb{T}) \times H^\sigma(\mathbb{T})$ satisfaisant

$$\|\eta_{in}\|_{H^{\sigma+1/2}} + \|\psi_{in}\|_{H^\sigma} < M_0, \quad \|\eta_{final}\|_{H^{\sigma+1/2}} + \|\psi_{final}\|_{H^\sigma} < M_0,$$

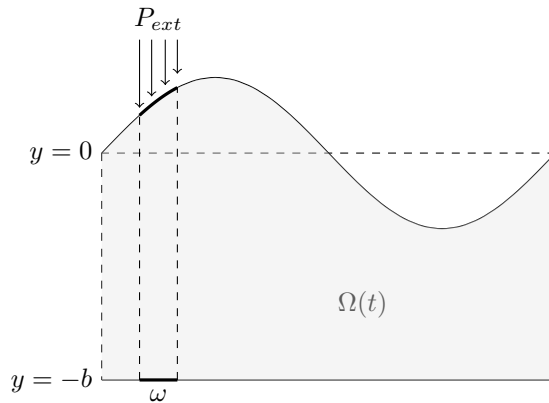
il existe P_{ext} in $C^0([0, T]; H^\sigma(\mathbb{T}))$ satisfaisant

$$\text{supp } P_{ext}(t, \cdot) \subset \omega, \quad \forall t \in [0, T],$$

tel que le système (6.1) avec les données initiales (η_{in}, ψ_{in}) admet une unique solution

$$(\eta, \psi) \in C^0([0, T]; H_0^{\sigma+1/2}(\mathbb{T}) \times H^\sigma(\mathbb{T})),$$

et cette solution (η, ψ) satisfait $(\eta|_{t=T}, \psi|_{t=T}) = (\eta_{final}, \psi_{final})$.



Autrement dit, on a donc montré que le système des water waves 2D avec tension de surface, périodique en espace, est localement exactement contrôlable, en un temps arbitrairement court.

*
* *

L'analyse que nous menons s'appuie sur un calcul pseudo-différentiel ; à cet égard elle est fortement influencée par l'approche de Lannes [166]. La première étape consiste à suivre Alazard, Burq, Zuily [5], et obtenir une écriture quasi-linéaire de (6.1) grâce à une approche para-différentielle, qui permet de symétriser le système des water waves. Le système (6.1) se réduit alors à une unique équation para-différentielle dispersive, d'ordre 3/2 (comme l'équation linéarisée autour de 0), avec un terme sous-principal d'ordre 1. Cette différence seulement "d'une demi-dérivée" entre le terme principal et le sous-principal traduit le caractère quasi-linéaire des équations. Le principe de l'analyse consiste alors à linéariser cette équation autour de toutes les données contenues dans une petite boule centrée en 0. Cela nous conduit à étudier les propriétés de contrôlabilité (qui par les arguments classiques HUM, se ramènent à étudier l'observabilité des systèmes duaux) pour une certaine classe d'équations dispersives à coefficients non-constants. Cette étude est menée en effectuant plusieurs réductions (transformations pseudo-différentielles, changements de variables, etc.), pour se ramener à l'étude d'équations linéaires à coefficients constants (modulo des opérateurs d'ordre 0). Insistons sur le fait qu'il n'est pas suffisant ici d'étudier l'équation linéarisée autour de 0, puis d'utiliser un théorème de point fixe pour en déduire un résultat sur les équations complètes : une telle approche est en effet plutôt adaptée pour des équations semi-linéaires. Nous nous appuyons à la place sur un schéma d'approximation quasi-linéaire, où, à chaque étape, nous résolvons un problème de contrôle linéaire pour une équation dispersive à coefficients non constants. Pour montrer que ce schéma converge, nous avons à démontrer plusieurs estimations de stabilité dans tous les problèmes de contrôle considérés. Concernant ce problème, mentionnons les travaux ultérieurs de Baldi, Florida et Haus [22, 23], qui dans le contexte de la contrôlabilité d'équations de KdV généralisées, ont montré comment utiliser des théorèmes de type Nash-Moser à la place du calcul para-différentiel.

Signalons en guise de conclusion que les propriétés de contrôlabilité locale du système des water waves *sans* tension de surface demeurent à ce jour inconnues. Le problème principal vient du fait que dans ce cas, les équations sont dispersives d'ordre 1/2 seulement.

Nous nous proposons dans la suite de ce chapitre de décrire informellement les grandes étapes de notre approche.

6.2. Diagonalisation des équations

Il est instructif dans un premier temps d'écrire les équations linéarisées, autour de l'état $(0, 0)$:

$$\begin{cases} \partial_t \eta = G(0)\psi, \\ \partial_t \psi + g\eta - \partial_x^2 \eta = P_{ext}. \end{cases}$$

avec $G(0) := |D_x| \tanh(b|D_x|)$. On introduit le multiplicateur de Fourier (d'ordre 3/2)

$$L := ((g - \partial_x^2)G(0))^{\frac{1}{2}}.$$

Alors l'inconnue (à valeurs complexes) $u = \psi - iLG(0)^{-1}\eta$ satisfait l'équation dispersive linéaire

$$(6.2) \quad \partial_t u + iLu = P_{ext}.$$

Les propriétés de contrôlabilité de cette équation sont bien connues, voir entre autres Reid [211]. Malheureusement, comme nous l'avons déjà expliqué, en raison du caractère complètement non linéaire des équations, il n'est pas possible de les exploiter directement pour étudier les équations complètes. L'idée consiste en revanche à se rapprocher au maximum de ce modèle d'équation.

Le but est d'obtenir une diagonalisation des équations, similaire à celle pouvant être obtenue pour les équations linéarisées autour de 0. A cet effet, nous appliquons l'analyse de Alazard-Burq-Zuily [5]. Suivant [5], nous utilisons le calcul para-différentiel (associé à des symboles peu réguliers) de Bony [45].

Définition 6.1 (Classe de symboles). — Soit $\rho \geq 0$ et $m \in \mathbb{R}$; on note Γ_ρ^m l'espace des symboles $a(x, \xi)$ sur $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ qui sont C^∞ par rapport à ξ , et tels que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ et tout ξ , la fonction $x \mapsto \partial_\xi^\alpha a(x, \xi) \in W^{\rho, \infty}(\mathbb{T})$ vérifie

$$\|\partial_\xi^\alpha a(\cdot, \xi)\|_{W^{\rho, \infty}} \leq C_\alpha (1 + |\xi|)^{m - |\alpha|}.$$

On fixe une fonction χ de classe C^∞ , homogène de degré 0, satisfaisant pour $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ assez petits,

$$\chi(\theta, \eta) = 1 \quad \text{si} \quad |\theta| \leq \varepsilon_1 |\eta|, \quad \chi(\theta, \eta) = 0 \quad \text{si} \quad |\theta| \geq \varepsilon_2 |\eta|.$$

Imposons également la condition de symétrie $\chi(\xi_1, \xi_2) = \chi(-\xi_1, -\xi_2) = \chi(-\xi_1, \xi_2)$.

Définition 6.2 (Quantification para-différentielle). — Etant donné un symbole a , on définit l'opérateur para-différentiel T_a par la formule

$$(6.3) \quad \widehat{T_a u}(\xi) = (2\pi)^{-1} \sum_{\eta \in \mathbb{Z}} \chi(\xi - \eta, \eta) \widehat{a}(\xi - \eta, \eta) \widehat{u}(\eta),$$

où $\widehat{a}(\theta, \xi) = \int e^{-ix \cdot \theta} a(x, \xi) dx$ désigne la transformée de Fourier de a par rapport à la variable x .

Lorsque $a = a(x)$ est une fonction de x uniquement, l'opérateur T_a est appelé un paraproduit. Rappelons le lien entre produits (classiques) de fonctions et paraproduits : grâce à la transformée de Fourier, on peut écrire le produit entre deux fonctions $a(x)$ et $b(x)$

$$a(x)b(x) = (2\pi)^{-1} \sum_{\eta, \xi \in \mathbb{Z}} e^{ix \cdot (\eta + \xi)} \widehat{a}(\eta) \widehat{b}(\xi) d\eta d\xi.$$

On a alors la décomposition

$$a(x)b(x) = T_a b + T_b a + R(a, b), \quad R(a, b) := a(x)b(x) - T_a b + T_b a,$$

de sorte que $T_a b$ (resp. $T_b a$) correspond au morceau de produit ab faisant intervenir la partie basses fréquences de a (resp. b) par rapport à celles de b (resp. a).

Nous renvoyons à l'article original de Bony [45], au livre de Taylor [225], et aux notes de cours de Métivier [184] pour un exposé du calcul symbolique associé à cette quantification. Pour la suite, on a fait le choix de ne pas évoquer avec précision la régularité nécessaire pour les symboles. Les problèmes fins de régularité ne constitueront pas, en tout état de cause, le coeur de l'analyse qui va suivre. On a, suivant Alazard, Burq et Zuily [5], le résultat suivant, qui est l'analogue de la diagonalisation (6.2) des équations linéarisées autour de 0.

Théorème 6.2. — Soit $s > 5/2$ et considérons $(\eta, \psi) \in C^0([0, T]; H_0^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{T}) \times H^s(\mathbb{T}))$.

Il existe un symbole p d'ordre 0 et un symbole q d'ordre $1/2$ (dépendant de (η, ψ)) tels que l'inconnue à valeurs complexes

$$u := T_p \psi + iT_q \eta$$

satisfait

$$\partial_t u + T_V \partial_x u + iL^{\frac{1}{2}}(T_c L^{\frac{1}{2}} u) + R(u)u = T_p P_{ext}$$

avec $V = \partial_x \psi - \frac{G(\eta)\psi + (\partial_x \eta)(\partial_x \psi)}{1 + (\partial_x \eta)^2} \partial_x \eta$, $c := (1 + (\partial_x \eta)^2)^{-\frac{3}{4}}$ et $R(u)u$ est un reste d'ordre 0.

De plus, (p, q) peut être choisi de sorte que $(\eta, \psi) \mapsto u$ est inversible de $H_0^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{T}) \times H^s(\mathbb{T})$ vers

$$\tilde{H}^s(\mathbb{T}) = \left\{ u \in H^s, \int_{\mathbb{T}} \text{Im } u(x) dx = 0 \right\}.$$

6.3. Schéma d'approximation quasi-linéaire

Nous introduisons un schéma d'approximation quasi-linéaire, en définissant par récurrence une suite de fonctions $(u_n, f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de la manière suivante.

- **Étape 0** : on pose $(u_0, f_0) = (0, 0)$.
- **Étape $n + 1$** : pour $n \geq 0$, f_{n+1} est déterminée de sorte que l'unique solution u_{n+1} du problème de Cauchy

$$(\partial_t + T_{V(u_n)} \partial_x + iL^{\frac{1}{2}} T_{c(u_n)} L^{\frac{1}{2}}) u_{n+1} + R(u_n) u_{n+1} = T_{p(u_n)} \chi_\omega \text{Re } f_{n+1}, \quad u_{n+1}|_{t=0} = u_{in},$$

satisfait $u_{n+1}|_{t=T} = 0$. Nous avons à prouver qu'à chaque étape, le problème admet bien une solution (résolution d'un problème de contrôlabilité exacte linéaire) puis que le schéma converge (estimations de stabilité dans le problème de contrôle).

Nous posons alors $P_{ext} := \lim_{n \rightarrow +\infty} \chi_\omega \text{Re } f_n$ et résolvons le système des water-waves (en (η, ψ)) avec des données initiales (η_{in}, ψ_{in}) et cette pression P_{ext} comme terme source. Alors, comme $u = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ vérifie $u|_{t=T} = 0$, cela implique finalement que $(\eta, \psi)|_{t=T} = 0$. On obtient finalement le Théorème 6.1 par réversibilité de l'équation des water-waves.

6.4. Contrôlabilité d'une classe d'équations dispersives linéaires à coefficients non constants

Considérons un opérateur linéaire

$$P(\underline{u}) = \partial_t + T_{V(\underline{u})} \partial_x + iL^{\frac{1}{2}}(T_{c(\underline{u})} L^{\frac{1}{2}} \cdot) + R(\underline{u})$$

où $R(\underline{u})$ est un opérateur d'ordre 0, et tel que,

$$(6.4) \quad \text{si } P(\underline{u})v \text{ est à valeurs réelles, alors } \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{T}} \text{Im } v(t, x) dx = 0.$$

Cette propriété est à rapprocher des propriétés d'invariance de la hauteur de fluide moyenne $\int_{\mathbb{T}} \eta dx$ pour le système complet des water waves.

Le coeur du problème consiste à démontrer la proposition suivante, qui permet de montrer que pour chaque étape du schéma d'approximation quasi-linéaire, le problème linéaire est bien résoluble, et que les solutions convergent vers une solution du problème final.

Proposition 6.1. — Soit $T > 0$. Il existe s_0 tel que, si $\|\underline{u}\|_{C^0([0,T];H^{s_0})}$ est assez petit, alors on a les propriétés suivantes.

i) **(Contrôlabilité)** Pour tout $\sigma \geq s_0$ et tout $u_{in} \in \tilde{H}^\sigma(\mathbb{T})$ il existe f satisfant $\|f\|_{C^0([0,T];H^\sigma)} \leq K(T) \|u_{in}\|_{H^\sigma}$ tel que l'unique solution u à

$$P(\underline{u})u = T_p \chi_\omega \operatorname{Re} f, \quad u|_{t=0} = u_{in},$$

satisfait $u|_{t=T} = 0$.

ii) **(Stabilité)** Considérons un autre état \underline{u}' en supposant que $\|\underline{u}'\|_{C^0([0,T];H^{s_0})}$ est assez petit et notons f' le contrôle associé à \underline{u}' . Alors

$$\|f - f'\|_{C^0([0,T];H^{\sigma-\frac{3}{2}})} \lesssim \|u_{in}\|_{H^\sigma} \|\underline{u} - \underline{u}'\|_{C^0([0,T];H^{s_0})}.$$

Cette proposition est démontrée grâce à plusieurs réductions successives.

6.4.1. Réduction à une équation régularisée. — Dans cette discussion, on n'écrira pas la dépendance en \underline{u} pour simplifier les notations. La première réduction de l'analyse consiste à prouver qu'il est suffisant de

- prouver un résultat pour des données à régularité L^2 au lieu de Sobolev ;
- de considérer une équation classique au lieu d'une équation para-différentielle.

L'idée est de composer l'équation avec un opérateur semi-classique elliptique, choisi pour ses bonnes propriétés de commutation avec l'opérateur para-différentiel $T_V \partial_x$. On se ramène ainsi à l'étude de l'opérateur

$$\tilde{P} = \partial_t + V \partial_x + iL^{\frac{1}{2}}(cL^{\frac{1}{2}} \cdot) + R,$$

où R est un opérateur d'ordre 0 ; tous les opérateurs d'ordre 0 n'ont aucune incidence dans l'analyse et seront systématiquement considérés comme des restes. Il s'agit alors de démontrer la proposition suivante.

Proposition 6.2. — Soit $T > 0$. Il existe s_0 tel que, si $\|\underline{u}\|_{C^0([0,T];H^{s_0})}$ est assez petit, alors on a les propriétés suivantes.

i) **(Contrôlabilité modulo les constantes imaginaires pures)** Pour tout $v_{in} \in L^2(\mathbb{T})$, il existe f avec $\|f\|_{C^0([0,T];L^2)} \lesssim \|v_{in}\|_{L^2}$ tel que l'unique solution v to $\tilde{P}(\underline{u})v = \chi_\omega \operatorname{Re} f$, $v|_{t=0} = v_{in}$ est telle que $v(T)$ est une constante imaginaire pure :

$$\exists b \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{T}, \quad v(T, x) = ib.$$

ii) **(Régularité)** En outre, $\|f\|_{C^0([0,T];H^{\frac{3}{2}})} \lesssim \|v_{in}\|_{H^{\frac{3}{2}}}$.

iii) **(Stabilité)** Considérons un autre état \underline{u}' tel que $\|\underline{u}'\|_{C^0([0,T];H^{s_0})}$ est assez petit et notons f' le contrôle associé à \underline{u}' . Alors,

$$\|f - f'\|_{C^0([0,T];L^2)} \lesssim \|v_{in}\|_{H^{\frac{3}{2}}} \|\underline{u} - \underline{u}'\|_{C^0([0,T];H^{s_0})}.$$

La Proposition 6.2 implique la Proposition 6.1. Notons que le point i) ne donne qu'un résultat de contrôlabilité modulo les constantes imaginaires pures. Pour s'en débarrasser au final, on s'appuie sur la propriété d'invariance (6.4).

Nous nous concentrerons par la suite sur la preuve du résultat de contrôlabilité de la Proposition 6.2 et renvoyons à [4] pour les preuves des estimations de stabilité, qui s'appuient sur les mêmes considérations, mais sont plus techniques.

6.4.2. Réduction à une équation à coefficients constants. — La réduction suivante consiste à redresser la partie dispersive, en remplaçant $\tilde{P} = \partial_t + V \partial_x + iL^{\frac{1}{2}}(cL^{\frac{1}{2}} \cdot) + R_2$ par

$$(6.5) \quad Q := \Phi \tilde{P} \Phi^{-1} = \partial_t + W \partial_x + iL + R,$$

où $W = W(t, x)$ satisfait $\int_{\mathbb{T}} W(t, x) dx = 0$. L'opérateur Φ est obtenu comme la composition de trois changements de variables (préservant tous la norme L^2 en x), de la forme

$$\begin{aligned} h(t, x) &\mapsto (1 + \partial_x \kappa(t, x))^{\frac{1}{2}} h(t, x + \kappa(t, x)), \\ h(t, x) &\mapsto h(a(t), x), \\ h(t, x) &\mapsto h(t, x - b(t)). \end{aligned}$$

Remarquons qu'il n'y a pas d'opérateur d'ordre $1/2$ dans Q , ce qui provient d'une annulation remarquable due à un choix convenable des changements de variables. En vue de l'application de la méthode HUM (qui sera bientôt évoquée, dans la Section 6.6), il est naturel d'étudier les propriétés d'observabilité pour l'opérateur dual

$$Q^* := -\partial_t - W\partial_x - iL + R.$$

Nous cherchons encore à simplifier Q^* ; à cette fin, nous recherchons un opérateur \mathcal{A} tel que $i[\mathcal{A}, L] + W\mathcal{A}$ est un opérateur d'ordre 0. Suivant Alazard-Baldi [3], nous trouvons que la composition par un opérateur non-local \mathcal{A} , associé à un symbole (appartenant à une classe exotique) de la forme $q(t, x, \xi)e^{i\beta(t, x)|\xi|^{\frac{1}{2}}}$ permet de se ramener à l'étude de l'opérateur

$$\partial_t + iL + R.$$

Avec cette réduction en tête, le but est alors d'obtenir l'inégalité d'observabilité suivante.

Proposition 6.3. — *Soit ω un ouvert non vide de \mathbb{T} et soit $T > 0$. Supposons que W soit assez petit. Il existe $\varepsilon, K > 0$ tel que, pour toute donnée initiale v_0 dont la moyenne $\langle v_0 \rangle = \int_{\mathbb{T}} v_0(x) dx$ satisfait*

$$(6.6) \quad |\operatorname{Re}\langle v_0 \rangle| \geq \frac{1}{2} |\langle v_0 \rangle| - \varepsilon \|v_0\|_{L^2},$$

la solution v de

$$\partial_t v + iLv = 0, \quad v(0) = v_0,$$

satisfait

$$(6.7) \quad \int_0^T \int_{\omega} |\operatorname{Re}(\mathcal{A}v)(t, x)|^2 dx dt \geq K \int_{\mathbb{T}} |v_0(x)|^2 dx,$$

où \mathcal{A} est l'opérateur permettant de se ramener de Q^* à $\partial_t + iL + R$.

Insistons qu'une hypothèse telle que (6.6) est nécessaire dans ce résultat. En effet, dans le cas le plus simple où $W = 0$, auquel cas on peut prendre $\mathcal{A} = I$, la propriété (6.7) est fausse si on considère $v_0(x) = C$, où C est une constante imaginaire pure.

6.5. Inégalités de type Ingham

Pour démontrer la Proposition 6.3, à cause de la présence de l'opérateur \mathcal{A} dans l'estimation, on est amené à estimer la norme L^2 de sommes de fonctions oscillantes dont la phase n'est pas celle correspondant à l'équation linéarisée (et ne peut pas être considérée comme une perturbation de celle-ci). Cela reflète le caractère quasi-linéaire des équations.

A cette fin, nous étudions des inégalités de type Ingham pour des sommes de fonctions oscillantes de la forme suivante. Pour une fonction réelle $\beta \in C^3(\mathbb{R})$ donnée, on pose

$$\mu_n(t) = \operatorname{sign}(n) \left[\langle n \rangle |n|^{\frac{1}{2}} t + \beta(t) |n|^{\frac{1}{2}} \right].$$

avec $\langle n \rangle = (1 + n^2)^{1/2}$.

Pour $\beta = 0$, rappelons le résultat classique suivant.

Lemme 6.1. — *Pour tout $T > 0$, il existe $C_1, C_2 > 0$ tels que, pour toute suite $(w_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, on a*

$$C_1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |w_n|^2 \leq \int_0^T \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} w_n e^{i \operatorname{sign}(n) \langle n \rangle |n|^{\frac{1}{2}} t} \right|^2 \leq C_2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |w_n|^2.$$

Cet lemme découle des inégalités d’Ingham (voir Kahane [160], Ball-Slemrod [24], Haraux [144]), qui sont une généralisation de l’inégalité de Parseval.

Lemme 6.2 (Inégalité d’Ingham). — Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de réels tels qu’il existe $\gamma > 0$ pour lequel

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \lambda_{n+1} - \lambda_n \geq \gamma.$$

Soit $\gamma_\infty := \liminf_{|n| \rightarrow +\infty} |\lambda_{n+1} - \lambda_n|$. Pour tout $T > \pi/\gamma_\infty$, il existe $C_1, C_2 > 0$ tels que, pour toute suite $(w_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, on a

$$C_1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |w_n|^2 \leq \int_0^T \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} w_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 \leq C_2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |w_n|^2.$$

On vérifie en effet que $\liminf_{|n| \rightarrow +\infty} \left[\text{sign}(n+1) \langle n+1 \rangle |n+1|^{\frac{1}{2}} - \text{sign}(n) \langle n \rangle |n|^{\frac{1}{2}} \right] = +\infty$.

Pour étudier le cas β non identiquement nul, on ne peut malheureusement ni s’appuyer directement sur une inégalité d’Ingham connue, ni employer une approche perturbative puisque les quantités $e^{i\beta(t)|n|^{\frac{1}{2}}} - 1$ ne sont en général pas petites, même si β est petit. Notre démarche a consisté à adapter les stratégies pour prouver le Lemme 6.2 (voir en particulier Micu-Zuazua [185]); nous avons obtenu l’exact analogue du Lemme 6.1 :

Lemme 6.3. — Pour tout $T > 0$, il existe $C_1, C_2 > 0$ tels que pour toute suite (w_n) ,

$$C_1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |w_n|^2 \leq \int_0^T \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} w_n e^{i\mu_n(t)} \right|^2 \leq C_2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |w_n|^2.$$

Il a également été nécessaire de prouver l’inégalité de gauche en rajoutant une amplitude $\zeta_n(t)$ dont les dérivées d’ordre k peuvent croître par rapport à la fréquence en $|n|^k/2$. Finalement, nous obtenons la Proposition 6.3 grâce à de telles estimations.

6.6. Application de la méthode HUM

La conclusion vient d’une application de la très classique méthode HUM (“Hilbert Uniqueness Method”) de J.-L. Lions [175]. Considérons une fonction réelle M , telle que $M - 1$ est assez petit et introduisons l’espace associé

$$L_M^2 := \left\{ \varphi \in L^2(\mathbb{T}; \mathbb{C}); \text{Im} \int_{\mathbb{T}} M(x) \varphi(x) dx = 0 \right\}.$$

Notons que les fonctions de L_M^2 satisfont (6.6). Il s’agira à la fin de choisir un poids M convenable. L’inégalité d’observabilité de la Proposition 6.3 permet de démontrer le résultat suivant (il s’agit d’une application du théorème de Riesz).

Lemme 6.4. — Pour tout $w_{in} \in L^2(\mathbb{T})$, il existe $f_1 \in L_M^2$ tel que,

$$\forall \phi_1 \in L_M^2, \quad \text{Re} \int_0^T (\chi_\omega \text{Re} f(t), \phi(t)) dt = -\text{Re}(w_{in}, \phi(0)),$$

où f et ϕ sont les uniques solutions dans $C^0(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{T}))$ de

$$\begin{aligned} Q^* f &= 0, & f|_{t=T} &= f_1, \\ Q^* \phi &= 0, & \phi|_{t=T} &= \phi_1. \end{aligned}$$

La méthode HUM entraîne l’existence d’un contrôle f tel que la solution de

$$Qw = \partial_t w + W \partial_x w + iLw + R_3 w = \chi_\omega \text{Re} f, \quad w(0) = w_{in},$$

satisfait

$$w(T, x) = ibM(x)$$

pour une certaine constante $b \in \mathbb{R}$.

Ensuite, puisque $Q = \Phi^{-1} \tilde{P} \Phi$, et que Φ est un changement de variable (et donc une transformation locale), on déduit pour \tilde{P} la contrôlabilité modulo la droite complexe $\{ibM, b \in \mathbb{R}\}$ à partir de la propriété de contrôlabilité que l'on vient d'obtenir pour Q (quitte à l'appliquer pour un plus petit domaine $\omega' \subset \omega$). On fait finalement le choix

$$M(x) = \Phi(1),$$

et on obtient finalement l'existence d'un contrôle, toujours noté f , tel que la solution de

$$\tilde{P}v = \partial_t v + V \partial_x v + iL^{\frac{1}{2}}(cL^{\frac{1}{2}}v) + R_2 v = \chi_\omega \operatorname{Re} f, \quad v(0) = v_{in},$$

satisfait

$$v(T, x) = ib,$$

pour une constante $b \in \mathbb{R}$. Ceci permet de démontrer le résultat de contrôlabilité de la Proposition 6.2.

6.7. Problèmes ouverts

Plusieurs prolongements et questions apparaissent naturels.

- Signalons tout d'abord que suite à ce travail, Thomas Alazard a étudié le problème de stabilisation pour les water waves avec ([2]) ou sans ([1]) tension de surface. Son résultat [2] permet notamment de démontrer une version “semi-globale” du Théorème 6.1 ; nous renvoyons à [2] pour un énoncé (ce que j'entends ici par semi-global, c'est qu'il y a toujours une contrainte sur la taille de la donnée initiale, mais celle-ci est liée à la résolution du problème de Cauchy sur un intervalle de temps suffisamment grand).

Il serait intéressant de voir s'il est possible d'obtenir des énoncés sans aucune restriction de taille, éventuellement en s'appuyant sur un argument de scaling des équations, à la manière de Coron pour les équations d'Euler incompressibles dans un domaine à bord fixe [71].

- L'extension des résultats à la dimension 3 est également ouverte. Une partie de la stratégie mise en oeuvre en dimension 2 reste valable. En revanche, il faut trouver des outils remplaçant les inégalités d'Ingham. On peut penser qu'une analyse microlocale basée sur des mesures de défaut saurait être efficace (voir en particulier Anantharaman et Macia [13]).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] T. ALAZARD – « Stabilization of gravity water waves », *arXiv preprint arXiv :1603.08541* (2016).
- [2] ———, « Stabilization of the water-wave equations with surface tension », *arXiv preprint arXiv :1610.07917* (2016).
- [3] T. ALAZARD & P. BALDI – « Gravity capillary standing water waves », *Arch. Ration. Mech. Anal.* **217** (2015), no. 3, p. 741–830.
- [4] T. ALAZARD, P. BALDI & D. HAN-KWAN – « Control of water waves », *JEMS*, to appear, 2015.
- [5] T. ALAZARD, N. BURQ & C. ZUILY – « On the water-wave equations with surface tension », *Duke Math. J.* **158** (2011), no. 3, p. 413–499.
- [6] ———, « The water-wave equations : from Zakharov to Euler », in *Studies in phase space analysis with applications to PDEs*, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., vol. 84, Birkhäuser/Springer, New York, 2013, p. 1–20.
- [7] S. ALBERTONI & B. MONTAGNINI – « On the spectrum of neutron transport equation in finite bodies », *J. Math. Anal. Appl.* **13** (1966), p. 19–48.
- [8] B. ALVAREZ-SAMANIEGO & D. LANNES – « Large time existence for 3D water-waves and asymptotics », *Invent. Math.* **171** (2008), no. 3, p. 485–541.
- [9] L. AMBROSIO & A. FIGALLI – « On the regularity of the pressure field of Brenier’s weak solutions to incompressible Euler equations », *Calc. Var. Partial Differential Equations* **31** (2008), no. 4, p. 497–509.
- [10] ———, « Geodesics in the space of measure-preserving maps and plans », *Arch. Ration. Mech. Anal.* **194** (2009), no. 2, p. 421–462.
- [11] A. AMBROSIO – « Stability for solutions of a stationary Euler-Poisson problem », *Math. Models Methods Appl. Sci.* **16** (2006), no. 11, p. 1817–1837.
- [12] A. AMBROSIO, F. MÉHATS & P. A. RAVIART – « On singular perturbation problems for the nonlinear Poisson equation », *Asymptot. Anal.* **25** (2001), no. 1, p. 39–91.
- [13] N. ANANTHARAMAN & F. MACIÀ – « Semiclassical measures for the Schrödinger equation on the torus », *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **16** (2014), no. 6, p. 1253–1288.
- [14] K. AOKI & F. GOLSE – « On the speed of approach to equilibrium for a collisionless gas », *Kinet. Relat. Models* **4** (2011), no. 1, p. 87–107.
- [15] L. ARKERYD & A. NOURI – « Boltzmann asymptotics with diffuse reflection boundary conditions », *Monatsh. Math.* **123** (1997), no. 4, p. 285–298.
- [16] A. A. ARSENEV – « Existence in the large of a weak solution of Vlasov’s system of equations », *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.* **15** (1975), p. 136–147, 276.
- [17] D. ARSÉNIO & L. SAINT-RAYMOND – « Compactness in kinetic transport equations and hypoellipticity », *J. Funct. Anal.* **261** (2011), no. 10, p. 3044–3098.

- [18] K. ASANO – « On local solutions of the initial value problem for the Vlasov-Maxwell equation », *Comm. Math. Phys.* **106** (1986), no. 4, p. 551–568.
- [19] K. ASANO & S. UKAI – « On the Vlasov-Poisson limit of the Vlasov-Maxwell equation », in *Patterns and waves*, Stud. Math. Appl., vol. 18, North-Holland, Amsterdam, 1986, p. 369–383.
- [20] M. BADSI – « A stability result for a linearized Vlasov-Poisson system around a sheath equilibrium », *ArXiv preprint* (2016).
- [21] M. BADSI, M. CAMPOS PINTO & B. DESPRÉS – « A minimization formulation of a bi-kinetic sheath », *Kinet. Relat. Models* (2016).
- [22] P. BALDI, G. FLORIDIA & E. HAUS – « Exact controllability for quasi-linear perturbations of KdV », *arXiv preprint arXiv :1510.07538* (2015).
- [23] P. BALDI & E. HAUS – « A Nash-Moser-Hörmander implicit function theorem with applications to control and Cauchy problems for PDEs », *arXiv preprint arXiv :1609.00213* (2016).
- [24] J. M. BALL & M. SLEMROD – « Nonharmonic Fourier series and the stabilization of distributed semilinear control systems », *Comm. Pure Appl. Math.* **32** (1979), no. 4, p. 555–587.
- [25] C. BARDOS – « About a Variant of the 1d Vlasov equation, dubbed “Vlasov-Dirac-Benney” Equation », *Séminaire Laurent Schwartz - EDP et applications* **15** (2012-2013), p. 21 p.
- [26] C. BARDOS & N. BESSE – « The Cauchy problem for the Vlasov-Dirac-Benney equation and related issues in fluid mechanics and semi-classical limits », *Kinet. Relat. Models* **6** (2013), no. 4, p. 893–917.
- [27] C. BARDOS, F. GOLSE, T. NGUYEN & R. SENTIS – « The Maxwell-Boltzmann approximation for ion kinetic modeling », *arXiv preprint arXiv :1606.05586* (2016).
- [28] C. BARDOS, G. LEBEAU & J. RAUCH – « Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary », *SIAM J. Control Optim.* **30** (1992), no. 5, p. 1024–1065.
- [29] C. BARDOS & A. NOURI – « A Vlasov equation with Dirac potential used in fusion plasmas », *J. Math. Phys.* **53** (2012), no. 11, p. 115621, 16.
- [30] J. BARRÉ, D. CHIRON, T. GOUDON & N. MASMOUDI – « From Vlasov-Poisson and Vlasov-Poisson-Fokker-Planck systems to incompressible Euler equations : the case with finite charge », *J. Éc. polytech. Math.* **2** (2015), p. 247–296.
- [31] J. BATT & G. REIN – « A rigorous stability result for the Vlasov-Poisson system in three dimensions », *Ann. Mat. Pura Appl. (4)* **164** (1993), p. 133–154.
- [32] K. BEAUCHARD & K. PRAVDA-STAROV – « Null-controllability of hypoelliptic quadratic differential equations », *arXiv preprint arXiv :1603.05367* (2016).
- [33] ———, « Null-controllability of non-autonomous Ornstein-Uhlenbeck equations », *arXiv preprint arXiv :1607.05433* (2016).
- [34] J. BEDROSSIAN, N. MASMOUDI & C. MOUHOT – « Landau damping in finite regularity for unconfined systems with screened interactions », *arXiv preprint arXiv :1604.05783* (2016).
- [35] ———, « Landau damping : paraproducts and Gevrey regularity », *Ann. PDE* **2** (2016), no. 1, p. Art. 4, 71.
- [36] D. BENNEY – « Some properties of long nonlinear waves », *Studies in Applied Mathematics* **52** (1973), no. 1, p. 45–50.
- [37] S. BENZONI-GAVAGE & D. SERRE – *Multidimensional hyperbolic partial differential equations*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press Oxford University Press, Oxford, 2007, First-order systems and applications.
- [38] É. BERNARD & F. SALVARANI – « On the convergence to equilibrium for degenerate transport problems », *Arch. Ration. Mech. Anal.* **208** (2013), no. 3, p. 977–984.
- [39] ———, « On the exponential decay to equilibrium of the degenerate linear Boltzmann equation », *J. Funct. Anal.* **265** (2013), no. 9, p. 1934–1954.

- [40] M. BERNOT, A. FIGALLI & F. SANTAMBROGIO – « Generalized solutions for the Euler equations in one and two dimensions », *J. Math. Pures Appl. (9)* **91** (2009), no. 2, p. 137–155.
- [41] F. BÉTHUEL, P. GRAVEJAT, J.-C. SAUT & D. SMETS – « On the Korteweg-de Vries long-wave approximation of the Gross-Pitaevskii equation. I », *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2009), no. 14, p. 2700–2748.
- [42] ———, « On the Korteweg-de Vries long-wave approximation of the Gross-Pitaevskii equation II », *Comm. Partial Differential Equations* **35** (2010), no. 1, p. 113–164.
- [43] K. BEYER & M. GÜNTHER – « On the Cauchy problem for a capillary drop. I. Irrotational motion », *Math. Methods Appl. Sci.* **21** (1998), no. 12, p. 1149–1183.
- [44] J. L. BONA, T. COLIN & D. LANNES – « Long wave approximations for water waves », *Arch. Ration. Mech. Anal.* **178** (2005), no. 3, p. 373–410.
- [45] J.-M. BONY – « Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **14** (1981), no. 2, p. 209–246.
- [46] F. BOUCHUT, F. GOLSE & M. PULVIRENTI – *Kinetic Equations and Asymptotic Theory*, Series in Applied Mathematics, Gauthier-Villars, 2000.
- [47] L. BOUDIN, C. GRANDMONT, A. LORZ & A. MOUSSA – « Modelling and numerics for respiratory aerosols », *Commun. Comput. Phys.* **18** (2015), no. 3, p. 723–756.
- [48] W. BRAUN & K. HEPP – « The Vlasov dynamics and its fluctuations in the $1/N$ limit of interacting classical particles », *Comm. Math. Phys.* **56** (1977), no. 2, p. 101–113.
- [49] Y. BRENIER – « A Vlasov-Poisson type formulation of the Euler equations for perfect incompressible fluids », *Rapport de recherche INRIA* (1989).
- [50] ———, « The least action principle and the related concept of generalized flows for incompressible perfect fluids », *J. Amer. Math. Soc.* **2** (1989), no. 2, p. 225–255.
- [51] ———, « The dual least action problem for an ideal, incompressible fluid », *Arch. Rational Mech. Anal.* **122** (1993), no. 4, p. 323–351.
- [52] ———, « Homogeneous hydrostatic flows with convex velocity profiles », *Nonlinearity* **12** (1999), no. 3, p. 495–512.
- [53] ———, « Minimal geodesics on groups of volume-preserving maps and generalized solutions of the Euler equations », *Comm. Pure Appl. Math.* **52** (1999), no. 4, p. 411–452.
- [54] ———, « Convergence of the Vlasov-Poisson system to the incompressible Euler equations », *Comm. Partial Differential Equations* **25** (2000), no. 3-4, p. 737–754.
- [55] ———, « Remarks on the derivation of the hydrostatic Euler equations », *Bull. Sci. Math.* **127** (2003), no. 7, p. 585–595.
- [56] Y. BRENIER & E. GRENIER – « Limite singulière du système de Vlasov-Poisson dans le régime de quasi neutralité : le cas indépendant du temps », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **318** (1994), no. 2, p. 121–124.
- [57] Y. BRENIER, N. MAUSER & M. PUEL – « Incompressible Euler and e-MHD as scaling limits of the Vlasov-Maxwell system », *Commun. Math. Sci.* **1** (2003), no. 3, p. 437–447.
- [58] H. BRÉZIS & T. GALLOUET – « Nonlinear Schrödinger evolution equations », *Nonlinear Anal.* **4** (1980), no. 4, p. 677–681.
- [59] H. BRÉZIS, F. GOLSE & R. SENTIS – « Analyse asymptotique de l'équation de Poisson couplée à la relation de Boltzmann. Quasi-neutralité des plasmas », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **321** (1995), no. 7, p. 953–959.
- [60] M. BRIANT & E. S. DAUS – « The Boltzmann Equation for a Multi-species Mixture Close to Global Equilibrium », *Arch. Ration. Mech. Anal.* **222** (2016), no. 3, p. 1367–1443.
- [61] N. BURQ & P. GÉRARD – « Condition nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité exacte des ondes », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **325** (1997), no. 7, p. 749–752.

- [62] M. J. CÁCERES, J. A. CARRILLO & J. DOLBEAULT – « Nonlinear stability in L^p for a confined system of charged particles », *SIAM J. Math. Anal.* **34** (2002), no. 2, p. 478–494 (electronic).
- [63] E. CAGLIOTI & F. ROUSSET – « Quasi-stationary states for particle systems in the mean-field limit », *J. Stat. Phys.* **129** (2007), no. 2, p. 241–263.
- [64] ———, « Long time estimates in the mean field limit », *Arch. Ration. Mech. Anal.* **190** (2008), no. 3, p. 517–547.
- [65] K. CARRAPATOSO, I. TRISTANI & K.-C. WU – « Cauchy problem and exponential stability for the inhomogeneous Landau equation », *Arch. Ration. Mech. Anal.* **221** (2016), no. 1, p. 363–418.
- [66] D. CHIRON & F. ROUSSET – « The KdV/KP-I limit of the nonlinear Schrödinger equation », *SIAM J. Math. Anal.* **42** (2010), no. 1, p. 64–96.
- [67] Y.-P. CHOI & B. KWON – « Global well-posedness and large-time behavior for the inhomogeneous Vlasov-Navier-Stokes equations », *Nonlinearity* **28** (2015), no. 9, p. 3309.
- [68] S. CORDIER & E. GRENIER – « Quasineutral limit of an Euler-Poisson system arising from plasma physics », *Comm. Partial Differential Equations* **25** (2000), no. 5-6, p. 1099–1113.
- [69] S. CORDIER & Y. PENG – « Système Euler-Poisson non linéaire. Existence globale de solutions faibles entropiques », *M2AN* **32** (1998), no. 1, p. 1–23.
- [70] J.-M. CORON – « Global asymptotic stabilization for controllable systems without drift », *Math. Control Signals Systems* **5** (1992), no. 3, p. 295–312.
- [71] ———, « On the controllability of 2-D incompressible perfect fluids », *J. Math. Pures Appl. (9)* **75** (1996), no. 2, p. 155–188.
- [72] ———, *Control and nonlinearity*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 136, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.
- [73] W. CRAIG – « An existence theory for water waves and the Boussinesq and Korteweg-de Vries scaling limits », *Comm. Partial Differential Equations* **10** (1985), no. 8, p. 787–1003.
- [74] W. CRAIG & C. SULEM – « Numerical simulation of gravity waves », *J. Comput. Phys.* **108** (1993), no. 1, p. 73–83.
- [75] M. CULLEN, W. GANGBO & G. PISANTE – « The semigeostrophic equations discretized in reference and dual variables », *Arch. Ration. Mech. Anal.* **185** (2007), no. 2, p. 341–363.
- [76] C. M. DAFERMOS – « The second law of thermodynamics and stability », *Arch. Rational Mech. Anal.* **70** (1979), no. 2, p. 167–179.
- [77] S. DANERI & A. FIGALLI – « Variational models for the incompressible Euler equations », in *HCDTE lecture notes. Part II. Nonlinear hyperbolic PDEs, dispersive and transport equations*, AIMS Ser. Appl. Math., vol. 7, Am. Inst. Math. Sci. (AIMS), Springfield, MO, 2013, p. 51.
- [78] P. DEGOND – « Local existence of solutions of the Vlasov-Maxwell equations and convergence to the Vlasov-Poisson equations for infinite light velocity », *Math. Methods Appl. Sci.* **8** (1986), no. 4, p. 533–558.
- [79] B. DESJARDINS & E. GRENIER – « Linear instability implies nonlinear instability for various types of viscous boundary layers », *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **20** (2003), no. 1, p. 87–106.
- [80] ———, « On nonlinear Rayleigh-Taylor instabilities », *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)* **22** (2006), no. 4, p. 1007–1016.
- [81] L. DESVILLETES & F. SALVARANI – « Asymptotic behavior of degenerate linear transport equations », *Bull. Sci. Math.* **133** (2009), no. 8, p. 848–858.
- [82] L. DESVILLETES & C. VILLANI – « On the trend to global equilibrium in spatially inhomogeneous entropy-dissipating systems : the linear Fokker-Planck equation », *Comm. Pure Appl. Math.* **54** (2001), no. 1, p. 1–42.
- [83] ———, « On the trend to global equilibrium for spatially inhomogeneous kinetic systems : the Boltzmann equation », *Invent. Math.* **159** (2005), no. 2, p. 245–316.

- [84] R. J. DiPerna, P.-L. Lions & Y. Meyer – « L^p regularity of velocity averages », *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **8** (1991), no. 3-4, p. 271–287.
- [85] R. J. DiPerna & A. J. Majda – « Oscillations and concentrations in weak solutions of the incompressible fluid equations », *Comm. Math. Phys.* **108** (1987), no. 4, p. 667–689.
- [86] R. L. Dobrušin – « Vlasov equations », *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* **13** (1979), no. 2, p. 48–58, 96.
- [87] J. Dolbeault, C. Mouhot & C. Schmeiser – « Hypocoercivity for linear kinetic equations conserving mass », *Trans. Amer. Math. Soc.* **367** (2015), no. 6, p. 3807–3828.
- [88] E. Faou & F. Rousset – « Landau damping in Sobolev spaces for the Vlasov-HMF model », *Arch. Ration. Mech. Anal.* **219** (2016), no. 2, p. 887–902.
- [89] M. Feldman, S.-Y. Ha & M. Slemrod – « A geometric level-set formulation of a plasma-sheath interface », *Arch. Ration. Mech. Anal.* **178** (2005), no. 1, p. 81–123.
- [90] D. Gérard-Varet – « Oscillating solutions of incompressible magnetohydrodynamics and dynamo effect », *SIAM J. Math. Anal.* **37** (2005), no. 3, p. 815–840 (electronic).
- [91] D. Gérard-Varet & E. Dormy – « On the ill-posedness of the Prandtl equation », *J. Amer. Math. Soc.* **23** (2010), no. 2, p. 591–609.
- [92] D. Gérard-Varet, D. Han-Kwan & F. Rousset – « Quasineutral limit of the Euler-Poisson system for ions in a domain with boundaries », *Indiana Univ. Math. J.* **62** (2013), p. 359–402.
- [93] D. Gérard-Varet, D. Han-Kwan & F. Rousset – « Quasineutral limit of the Euler-Poisson system for ions in a domain with boundaries II », *J. Éc. polytech. Math.* **1** (2014), p. 343–386.
- [94] D. Gérard-Varet & T. Nguyen – « Remarks on the ill-posedness of the Prandtl equation », *Asymptot. Anal.* **77** (2012), no. 1-2, p. 71–88.
- [95] D. Gérard-Varet & F. Rousset – « Shear layer solutions of incompressible MHD and dynamo effect », *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **24** (2007), no. 5, p. 677–710.
- [96] P. Germain & F. Rousset – « Long wave limit for Schrödinger maps », *arXiv preprint arXiv :1604.05710* (2016).
- [97] O. Glass – « Exact boundary controllability of 3-D Euler equation », *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* **5** (2000), p. 1–44 (electronic).
- [98] ———, « On the controllability of the Vlasov-Poisson system », *J. Differential Equations* **195** (2003), no. 2, p. 332–379.
- [99] ———, « La méthode du retour en contrôlabilité et ses applications en mécanique des fluides », in *Séminaire Bourbaki*, 2010.
- [100] O. Glass & D. Han-Kwan – « On the controllability of the Vlasov-Poisson system in the presence of external force fields », *J. Differential Equations* **252** (2012), no. 10, p. 5453–5491.
- [101] ———, « On the controllability of the relativistic Vlasov-Maxwell system », *J. Math. Pures Appl. (9)* **103** (2015), no. 3, p. 695–740.
- [102] O. Glass, D. Han-Kwan & A. Moussa – « The Vlasov-Navier-Stokes system in a 2D pipe : existence and stability of non trivial regular stationary solutions », preprint, 2016.
- [103] R. Glassey & W. Strauss – « Singularity formation in a collisionless plasma could occur only at high velocities », *Arch. Rational Mech. Anal.* **92** (1986), no. 1, p. 59–90.
- [104] F. Golse – « On the Dynamics of Large Particle Systems in the Mean Field Limit », *Lecture notes for a course at the NDNS+ Applied Dynamical Systems Summer School "Macroscopic and large scale phenomena"*, Université Twente, Enschede (The Netherlands), *arXiv preprint arXiv :1301.5494* (2013), p. 1–133.
- [105] F. Golse, P.-L. Lions, B. Perthame & R. Sentis – « Regularity of the moments of the solution of a transport equation », *J. Funct. Anal.* **76** (1988), no. 1, p. 110–125.

- [106] F. GOLSE & L. SAINT-RAYMOND – « The Vlasov-Poisson system with strong magnetic field in quasineutral regime », *Math. Models Methods Appl. Sci.* **13** (2003), no. 5, p. 661–714.
- [107] J. GOODMAN – « Nonlinear asymptotic stability of viscous shock profiles for conservation laws », *Arch. Rational Mech. Anal.* **95** (1986), no. 4, p. 325–344.
- [108] T. GOUDON, L. HE, A. MOUSSA & P. ZHANG – « The Navier-Stokes-Vlasov-Fokker-Planck system near equilibrium », *SIAM J. Math. Anal.* **42** (2010), no. 5, p. 2177–2202.
- [109] E. GRENIER – « Defect measures of the Vlasov-Poisson system in the quasineutral regime », *Comm. Partial Differential Equations* **20** (1995), no. 7-8, p. 1189–1215.
- [110] ———, « Oscillations in quasineutral plasmas », *Comm. Partial Differential Equations* **21** (1996), no. 3-4, p. 363–394.
- [111] ———, « Pseudo-differential energy estimates of singular perturbations », *Comm. Pure Appl. Math.* **50** (1997), no. 9, p. 821–865.
- [112] ———, « Limite quasineutre en dimension 1 », in *Journées “Équations aux Dérivées Partielles” (Saint-Jean-de-Monts, 1999)*, Univ. Nantes, Nantes, 1999, p. Exp. No. II, 8.
- [113] ———, « On the derivation of homogeneous hydrostatic equations », *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* **33** (1999), no. 5, p. 965–970.
- [114] ———, « On the nonlinear instability of Euler and Prandtl equations », *Comm. Pure Appl. Math.* **53** (2000), no. 9, p. 1067–1091.
- [115] E. GRENIER & O. GUÈS – « Boundary layers for viscous perturbations of noncharacteristic quasilinear hyperbolic problems », *J. Differential Equations* **143** (1998), no. 1, p. 110–146.
- [116] M. GUALDANI, S. MISCHLER & C. MOUHOT – « Factorization for non-symmetric operators and exponential h-theorem », *arXiv preprint arXiv :1006.5523* (2010).
- [117] Y. GUO – « Decay and continuity of the Boltzmann equation in bounded domains », *Arch. Ration. Mech. Anal.* **197** (2010), no. 3, p. 713–809.
- [118] Y. GUO & Z. LIN – « The existence of stable BGK waves », *arXiv preprint arXiv :1605.01463* (2016).
- [119] Y. GUO & T. NGUYEN – « A note on Prandtl boundary layers », *Comm. Pure Appl. Math.* **64** (2011), no. 10, p. 1416–1438.
- [120] Y. GUO & X. PU – « KdV limit of the Euler-Poisson system », *Arch. Ration. Mech. Anal.* **211** (2014), no. 2, p. 673–710.
- [121] Y. GUO & W. A. STRAUSS – « Instability of periodic BGK equilibria », *Comm. Pure Appl. Math.* **48** (1995), no. 8, p. 861–894.
- [122] ———, « Nonlinear instability of double-humped equilibria », *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **12** (1995), no. 3, p. 339–352.
- [123] ———, « Unstable BGK solitary waves and collisionless shocks », *Comm. Math. Phys.* **195** (1998), no. 2, p. 267–293.
- [124] S.-Y. HA & M. SLEMROD – « Global existence of plasma ion-sheaths and their dynamics », *Comm. Math. Phys.* **238** (2003), no. 1-2, p. 149–186.
- [125] D. HAN-KWAN – « The three-dimensional finite Larmor radius approximation », *Asymptot. Anal.* **66** (2010), no. 1, p. 9–33.
- [126] ———, « Quasineutral limit of the Vlasov-Poisson system with massless electrons », *Comm. Partial Differential Equations* **36** (2011), no. 8, p. 1385–1425.
- [127] ———, « Some controllability results for the relativistic Vlasov-Maxwell system », *Journées Équations aux dérivées partielles* (2012), p. 1–12.
- [128] ———, « Anisotropie dans un plasma fortement magnétisé », in *Séminaire Laurent Schwartz—Équations aux dérivées partielles et applications. Année 2011–2012*, Sémin. Équ. Dériv. Partielles, École Polytech., Palaiseau, 2013, p. Exp. No. XXV, 14.

- [129] ———, « From Vlasov-Poisson to Korteweg–de Vries and Zakharov-Kuznetsov », *Comm. Math. Phys.* **324** (2013), no. 3, p. 961–993.
- [130] ———, « On the three-dimensional finite Larmor radius approximation : the case of electrons in a fixed background of ions », *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **30** (2013), no. 6, p. 1127–1157.
- [131] D. HAN-KWAN & M. HAURAY – « Stability Issues in the Quasineutral Limit of the One-Dimensional Vlasov–Poisson Equation », *Comm. Math. Phys.* **334** (2015), no. 2, p. 1101–1152.
- [132] D. HAN-KWAN & M. IACOBELLI – « The quasineutral limit of the Vlasov-Poisson equation in Wasserstein metric », *Comm. Math. Sci.*, to appear (2014).
- [133] ———, « Quasineutral limit for Vlasov-Poisson via Wasserstein stability estimates in higher dimension », *Submitted* (2015).
- [134] D. HAN-KWAN & M. LÉAUTAUD – « Trend to equilibrium and spectral localization properties for the linear Boltzmann equation », in *Séminaire Laurent Schwartz—Équations aux Dérivées Partielles et Applications. Année 2013–2014*, Ed. Éc. Polytech., Palaiseau, 2014, p. Exp. No. VII, 15.
- [135] ———, « Geometric analysis of the linear Boltzmann equation I. Trend to equilibrium », *Ann. PDE* **1** (2015), no. 1, p. Art. 3, 84.
- [136] ———, « Geometric analysis of the linear Boltzmann equation II. Trend to equilibrium for the case of specular reflection (working title) », 2016.
- [137] ———, « Geometric analysis of the linear Boltzmann equation III. Localization properties of the spectrum (working title) », 2016.
- [138] D. HAN-KWAN & T. NGUYEN – « Ill-Posedness of the Hydrostatic Euler and Singular Vlasov Equations », *Arch. Ration. Mech. Anal.* **221** (2016), no. 3, p. 1317–1344.
- [139] ———, « Instabilities in the mean field limit », *J. Stat. Phys.* **162** (2016), no. 6, p. 1639–1653.
- [140] ———, « Nonlinear Instability of Vlasov–Maxwell Systems in the Classical and Quasineutral Limits », *SIAM J. Math. Anal.* **48** (2016), no. 5, p. 3444–3466.
- [141] D. HAN-KWAN, T. NGUYEN & F. ROUSSET – « Long time estimates in the non-relativistic limit of the Vlasov-Maxwell system », (2016).
- [142] D. HAN-KWAN & F. ROUSSET – « Quasineutral limit for Vlasov-Poisson with Penrose stable data », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.*, to appear (2015).
- [143] ———, « From Vlasov-Poisson to the kinetic incompressible Euler equation (working title) », (2016).
- [144] A. HARAUX – « Quelques méthodes et résultats récents en théorie de la contrôlabilité exacte », Rapport de recherche No. 1317, INRIA Rocquencourt, 1990.
- [145] M. HAURAY – « Mean field limit for the one dimensional Vlasov-Poisson equation », *Séminaire Laurent Schwartz - EDP et applications* **21** (2012-2013), p. 16 p.
- [146] M. HAURAY & P.-E. JABIN – « N -particles approximation of the Vlasov equations with singular potential », *Arch. Ration. Mech. Anal.* **183** (2007), no. 3, p. 489–524.
- [147] ———, « Particle approximation of Vlasov equations with singular forces : propagation of chaos », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **48** (2015), no. 4, p. 891–940.
- [148] F. HÉRAU – « Hypocoercivity and exponential time decay for the linear inhomogeneous relaxation Boltzmann equation », *Asymptot. Anal.* **46** (2006), no. 3-4, p. 349–359.
- [149] F. HÉRAU & F. NIER – « Isotropic hypoellipticity and trend to equilibrium for the Fokker-Planck equation with a high-degree potential », *Arch. Ration. Mech. Anal.* **171** (2004), no. 2, p. 151–218.
- [150] M. HERDA & L. RODRIGUES – « Anisotropic Boltzmann-Gibbs dynamics of strongly magnetized Vlasov-Fokker-Planck equations », *arXiv preprint arXiv :1610.05138*. (2016).
- [151] L. HÖRMANDER – *The analysis of linear partial differential operators. III*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 274, Springer-Verlag, Berlin, 1985, Pseudodifferential operators.

- [152] E. HORST – « On the asymptotic growth of the solutions of the Vlasov-Poisson system », *Math. Methods Appl. Sci.* **16** (1993), no. 2, p. 75–86.
- [153] P.-E. JABIN – « Large time concentrations for solutions to kinetic equations with energy dissipation », *Comm. Partial Differential Equations* **25** (2000), no. 3-4, p. 541–557.
- [154] ———, « A review of the mean field limits for Vlasov equations », *Kinet. Relat. Models* **7** (2014), no. 4, p. 661–711.
- [155] P.-E. JABIN & A. NOURI – « Analytic solutions to a strongly nonlinear Vlasov equation », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **349** (2011), no. 9-10, p. 541–546.
- [156] P.-E. JABIN & Z. WANG – « Mean field limit and propagation of chaos for Vlasov systems with bounded forces », *J. Funct. Anal.* **271** (2016), no. 12, p. 3588–3627.
- [157] K. JAIN, F. BOUCHET & D. MUKAMEL – « Relaxation times of unstable states in systems with long range interactions », *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment* **2007** (2007), no. 11, p. P11008.
- [158] S. JIANG, Q. JU, H. LI & Y. LI – « Quasi-neutral limit of the full bipolar Euler-Poisson system », *Sci. China Math.* **53** (2010), no. 12, p. 3099–3114.
- [159] Q. JU, H. LI, Y. LI & S. JIANG – « Quasi-neutral limit of the two-fluid Euler-Poisson system », *Commun. Pure Appl. Anal.* **9** (2010), no. 6, p. 1577–1590.
- [160] J.-P. KAHANE – « Pseudo-périodicité et séries de Fourier lacunaires », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)* **79** (1962), p. 93–150.
- [161] S. KAWASHIMA – « Systems of a hyperbolic-parabolic composite type, with applications to the equations of magnetohydrodynamics », *Phd thesis* (1984).
- [162] I. KUKAVICA, N. MASMOUDI, V. VICOL & T. K. WONG – « On the local well-posedness of the Prandtl and hydrostatic Euler equations with multiple monotonicity regions », *SIAM J. Math. Anal.* **46** (2014), no. 6, p. 3865–3890.
- [163] I. KUKAVICA & V. VICOL – « On the radius of analyticity of solutions to the three-dimensional Euler equations », *Proc. Amer. Math. Soc.* **137** (2009), no. 2, p. 669–677.
- [164] H.-W. KUO, T.-P. LIU & L.-C. TSAI – « Free molecular flow with boundary effect », *Comm. Math. Phys.* **318** (2013), no. 2, p. 375–409.
- [165] E. LAEDKE & K. SPATSCHEK – « Growth rates of bending KdV solitons », *Journal of Plasma Physics* **28** (1982), no. 03.
- [166] D. LANNES – « Well-posedness of the water-waves equations », *J. Amer. Math. Soc.* **18** (2005), no. 3, p. 605–654 (electronic).
- [167] ———, *The water waves problem*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 188, American Mathematical Society, Providence, RI, 2013, Mathematical analysis and asymptotics.
- [168] D. LANNES, F. LINARES & J.-C. SAUT – « The Cauchy problem for the Euler-Poisson system and derivation of the Zakharov-Kuznetsov equation », in *Studies in phase space analysis with applications to PDEs*, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., vol. 84, Birkhäuser/Springer, New York, 2013, p. 181–213.
- [169] C. LAURENT, F. LINARES & L. ROSIER – « Control and stabilization of the Benjamin-Ono equation in $L^2(\mathbb{T})$ », *Arch. Ration. Mech. Anal.* **218** (2015), no. 3, p. 1531–1575.
- [170] J. LE ROUSSEAU & I. MOYANO – « Null-controllability of the Kolmogorov equation in the whole phase space », *J. Differential Equations* **260** (2016), no. 4, p. 3193–3233.
- [171] G. LEBEAU – « Équation des ondes amorties », in *Algebraic and geometric methods in mathematical physics (Kaciveli, 1993)*, Math. Phys. Stud., vol. 19, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1996, p. 73–109.
- [172] M. LIEBERMAN & A. LICHTENBERG – *Principles of plasma discharges and materials processing*, Cambridge Univ Press, 1994.
- [173] Z. LIN – « Instability of periodic BGK waves », *Math. Res. Lett.* **8** (2001), no. 4, p. 521–534.

- [174] ———, « Nonlinear instability of periodic BGK waves for Vlasov-Poisson system », *Comm. Pure Appl. Math.* **58** (2005), no. 4, p. 505–528.
- [175] J.-L. LIONS – *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués. Tome 1*, Recherches en Mathématiques Appliquées [Research in Applied Mathematics], vol. 8, Masson, Paris, 1988, Contrôlabilité exacte. [Exact controllability], With appendices by E. Zuazua, C. Bardos, G. Lebeau and J. Rauch.
- [176] P.-L. LIONS – *Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 1*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, vol. 3, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1996, Incompressible models, Oxford Science Publications.
- [177] P.-L. LIONS & B. PERTHAME – « Propagation of moments and regularity for the 3-dimensional Vlasov-Poisson system », *Invent. Math.* **105** (1991), no. 2, p. 415–430.
- [178] G. LOEPER – « Uniqueness of the solution to the Vlasov-Poisson system with bounded density », *J. Math. Pures Appl. (9)* **86** (2006), no. 1, p. 68–79.
- [179] C. MARCHIORO & M. PULVIRENTI – « A note on the nonlinear stability of a spatially symmetric Vlasov-Poisson flow », *Math. Methods Appl. Sci.* **8** (1986), no. 2, p. 284–288.
- [180] N. MASMOUDI – « From Vlasov-Poisson system to the incompressible Euler system », *Comm. Partial Differential Equations* **26** (2001), no. 9-10, p. 1913–1928.
- [181] N. MASMOUDI & F. ROUSSET – « Uniform regularity for the Navier-Stokes equation with Navier boundary condition », *Arch. Ration. Mech. Anal.* **203** (2012), no. 2, p. 529–575.
- [182] N. MASMOUDI & T. K. WONG – « On the H^s theory of hydrostatic Euler equations », *Arch. Ration. Mech. Anal.* **204** (2012), no. 1, p. 231–271.
- [183] G. MÉTIVIER – « Remarks on the well-posedness of the nonlinear Cauchy problem », in *Geometric analysis of PDE and several complex variables*, Contemp. Math., vol. 368, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, p. 337–356.
- [184] ———, *Para-differential calculus and applications to the Cauchy problem for nonlinear systems*, Centro di Ricerca Matematica Ennio De Giorgi (CRM) Series, vol. 5, Edizioni della Normale, Pisa, 2008.
- [185] S. MICU & E. ZUAZUA – « An introduction to the controllability of partial differential equations », 2004.
- [186] S. MISCHLER & C. MOUHOT – « Exponential stability of slowly decaying solutions to the kinetic-Fokker-Planck equation », *Arch. Ration. Mech. Anal.* **221** (2016), no. 2, p. 677–723.
- [187] M. MOKHTAR-KHARROUBI – « On L^1 exponential trend to equilibrium for conservative linear kinetic equations on the torus », *J. Funct. Anal.* **266** (2014), no. 11, p. 6418–6455.
- [188] C. MOUHOT & L. NEUMANN – « Quantitative perturbative study of convergence to equilibrium for collisional kinetic models in the torus », *Nonlinearity* **19** (2006), no. 4, p. 969–998.
- [189] C. MOUHOT & C. VILLANI – « On Landau damping », *Acta Math.* **207** (2011), no. 1, p. 29–201.
- [190] I. MOYANO – « On the controllability of the 2-D Vlasov-Stokes system », *arXiv preprint arXiv :1510.07210* (2015).
- [191] ———, « Local null-controllability of the 2-D Vlasov-Navier-Stokes system », *arXiv preprint arXiv :1607.05578* (2016).
- [192] V. I. NALIMOV – « The Cauchy-Poisson problem », *Dinamika Splošn. Sredy* (1974), no. Vyp. 18 Dinamika Zidkost. so Svobod. Granicami, p. 104–210, 254.
- [193] H. NEUNZERT & J. WICK – « Die Approximation der Lösung von Integro-Differentialgleichungen durch endliche Punktmengen », in *Numerische Behandlung nichtlinearer Integrodifferential- und Differentialgleichungen (Tagung, Math. Forschungsinst., Oberwolfach, 1973)*, Springer, Berlin, 1974, p. 275–290. Lecture Notes in Math., Vol. 395.
- [194] T. T. NGUYEN & W. A. STRAUSS – « Stability analysis of collisionless plasmas with specularly reflecting boundary », *SIAM J. Math. Anal.* **45** (2013), no. 2, p. 777–808.

- [195] ———, « Linear stability analysis of a hot plasma in a solid torus », *Arch. Ration. Mech. Anal.* **211** (2014), no. 2, p. 619–672.
- [196] D. NICHOLSON – *Introduction to plasma theory*, Cambridge Univ Press, 1983.
- [197] S. NISHIBATA, M. OHNAWA & M. SUZUKI – « Asymptotic stability of boundary layers to the Euler-Poisson equations arising in plasma physics », *SIAM J. Math. Anal.* **44** (2012), no. 2, p. 761–790.
- [198] C. PALLARD – « Space moments of the Vlasov-Poisson system : propagation and regularity », *SIAM J. Math. Anal.* **46** (2014), no. 3, p. 1754–1770.
- [199] Y. PENG – « Asymptotic limits of one-dimensional hydrodynamic models for plasmas and semiconductors », *Chinese Ann. Math. Ser. B* **23** (2002), no. 1, p. 25–36.
- [200] Y.-J. PENG & S. WANG – « Convergence of compressible Euler-Maxwell equations to incompressible Euler equations », *Comm. Partial Differential Equations* **33** (2008), no. 1-3, p. 349–376.
- [201] Y.-J. PENG & Y.-G. WANG – « Boundary layers and quasi-neutral limit in steady state Euler-Poisson equations for potential flows », *Nonlinearity* **17** (2004), no. 3, p. 835–849.
- [202] Y. PENG & Y. WANG – « Convergence of compressible euler-poisson equations to incompressible type euler equations », *Asymptotic Analysis* **41** (2005), no. 2, p. 141–160.
- [203] O. PENROSE – « Electrostatic instability of a uniform non-Maxwellian plasma », *Phys. Fluids* **3** (1960), p. 258–265.
- [204] K. PFAFFELMOSER – « Global classical solutions of the Vlasov-Poisson system in three dimensions for general initial data », *J. Differential Equations* **95** (1992), no. 2, p. 281–303.
- [205] K. D. PHUNG – « Contrôle et stabilisation d’ondes électromagnétiques », *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* **5** (2000), p. 87–137 (electronic).
- [206] X. PU – « Dispersive limit of the Euler-Poisson system in higher dimensions », *SIAM J. Math. Anal.* **45** (2013), no. 2, p. 834–878.
- [207] X. PU & B. GUO – « Quasineutral limit of the pressureless Euler-Poisson equation for ions », *Quart. Appl. Math.* **74** (2016), no. 2, p. 245–273.
- [208] M. PUEL & L. SAINT-RAYMOND – « Quasineutral limit for the relativistic Vlasov-Maxwell system », *Asymptot. Anal.* **40** (2004), no. 3-4, p. 303–352.
- [209] J. RAUCH & M. TAYLOR – « Exponential decay of solutions to hyperbolic equations in bounded domains », *Indiana Univ. Math. J.* **24** (1974), p. 79–86.
- [210] ———, « Exponential decay of solutions to hyperbolic equations in bounded domains », *Indiana Univ. Math. J.* **24** (1974), p. 79–86.
- [211] R. M. REID – « Control time for gravity-capillary waves on water », *SIAM J. Control Optim.* **33** (1995), no. 5, p. 1577–1586.
- [212] M. RENARDY – « Ill-posedness of the hydrostatic Euler and Navier-Stokes equations », *Arch. Ration. Mech. Anal.* **194** (2009), no. 3, p. 877–886.
- [213] K.-U. RIEMANN – « The Bohm criterion and sheath formation », *J. Phys. D : Applied Physics* **24** (1991), no. 4, p. 493.
- [214] F. ROUSSET & N. TZVETKOV – « Transverse instability of the line solitary water-waves », *Invent. Math.* **184** (2011), no. 2, p. 257–388.
- [215] L. SAINT-RAYMOND – « Convergence of solutions to the Boltzmann equation in the incompressible Euler limit », *Arch. Ration. Mech. Anal.* **166** (2003), no. 1, p. 47–80.
- [216] ———, *Hydrodynamic limits of the Boltzmann equation*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1971, Springer-Verlag, Berlin, 2009.
- [217] ———, « Hydrodynamic limits : some improvements of the relative entropy method », *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **26** (2009), no. 3, p. 705–744.

- [218] J. SCHAEFFER – « The classical limit of the relativistic Vlasov-Maxwell system », *Comm. Math. Phys.* **104** (1986), no. 3, p. 403–421.
- [219] ———, « Global existence of smooth solutions to the Vlasov-Poisson system in three dimensions », *Comm. Partial Differential Equations* **16** (1991), no. 8-9, p. 1313–1335.
- [220] G. SCHNEIDER & C. E. WAYNE – « The long-wave limit for the water wave problem. I. The case of zero surface tension », *Comm. Pure Appl. Math.* **53** (2000), no. 12, p. 1475–1535.
- [221] A. I. SHNIREL'MAN – « The geometry of the group of diffeomorphisms and the dynamics of an ideal incompressible fluid », *Mat. Sb. (N.S.)* **128(170)** (1985), no. 1, p. 82–109, 144.
- [222] ———, « Generalized fluid flows, their approximation and applications », *Geom. Funct. Anal.* **4** (1994), no. 5, p. 586–620.
- [223] M. SLEMROD & N. STERNBERG – « Quasi-neutral limit for Euler-Poisson system », *J. Nonlinear Sci.* **11** (2001), no. 3, p. 193–209.
- [224] M. SUZUKI – « Asymptotic stability of stationary solutions to the Euler-Poisson equations arising in plasma physics », *Kinet. and Relat. Mod.* **4** (2011), no. 2, p. 569–588.
- [225] M. TAYLOR – *Tools for PDE*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 81, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000, Pseudodifferential operators, paradifferential operators, and layer potentials.
- [226] I. TRISTANI – « Boltzmann equation for granular media with thermal force in a weakly inhomogeneous setting », *J. Funct. Anal.* **270** (2016), no. 5, p. 1922–1970.
- [227] M. TROCHERIS – « On the derivation of the one-dimensional Vlasov equation », *Transport Theory Statist. Phys.* **15** (1986), no. 5, p. 597–628.
- [228] S. UKAI & T. OKABE – « On classical solutions in the large in time of two-dimensional Vlasov's equation », *Osaka J. Math.* **15** (1978), no. 2, p. 245–261.
- [229] S. UKAI, N. POINT & H. GHIDOUCHE – « Sur la solution globale du problème mixte de l'équation de Boltzmann nonlinéaire », *J. Math. Pures Appl. (9)* **57** (1978), no. 3, p. 203–229.
- [230] C. VILLANI – « Hypocoercivity », *Mem. Amer. Math. Soc.* **202** (2009), no. 950, p. iv+141.
- [231] I. VIOLET – « High-order expansions in the quasi-neutral limit of the Euler-Poisson system for a potential flow », *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **137** (2007), no. 5, p. 1101–1118.
- [232] S. WANG – « Quasineutral limit of Euler-Poisson system with and without viscosity », *Comm. Partial Differential Equations* **29** (2004), no. 3-4, p. 419–456.
- [233] S. WOLLMAN – « An existence and uniqueness theorem for the Vlasov-Maxwell system », *Comm. Pure Appl. Math.* **37** (1984), no. 4, p. 457–462.
- [234] ———, « Local existence and uniqueness theory of the Vlasov-Maxwell system », *J. Math. Anal. Appl.* **127** (1987), no. 1, p. 103–121.
- [235] S. WU – « Well-posedness in Sobolev spaces of the full water wave problem in 2-D », *Invent. Math.* **130** (1997), no. 1, p. 39–72.
- [236] H. YAU – « Relative entropy and hydrodynamics of Ginzburg-Landau », *Lett. Math. Phys.* **22** (1991), no. 1, p. 63–80.
- [237] V. ZAKHAROV – « Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid », *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics* **9** (1968), no. 2, p. 190–194.
- [238] V. ZAKHAROV – « Benney equations and quasiclassical approximation in the inverse problem method », (*Russian*) *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* **14** (1980), no. 2.
- [239] V. ZAKHAROV & E. KUZNETSOV – « On three dimensional solitons », *Sov. Phys. JETP.* **39** (1974), p. 285–286.