HOMOMORPHISMES DE GROUPES p-DIVISIBLES EN INÉGALE CARACTÉRISTIQUE (D'APRÈS J. TATE)

ANNA CADORET

Ce texte est un compte-rendu de l'article de J. Tate 'p-Divisible Groups' (Proc. of a conf. on local fields, Driebergen, 1966) pour le petit groupe de travail 'Groupes formels et p-divisibles' (CIRM, 16-20 avril 2012). J'ai essayé de rester aussi synthétique que possible et ai du faire des choix sans doute pas tous défendables. J'ai par exemple admis des résultats profonds comme le théorème 1.1 (voir [T67, Thm. 1]), qui établit l'équivalence de catégories entre groupes formels p-divisibles et groupes p-divisibles connexes et le théorème de cohomologie galoisienne 4.1 (voir [T67, §3]) alors que j'ai détaillé certaines réductions élémentaires ou la construction du logarithme qui ne sont que mentionnées dans l'article de J. Tate.
'p-Divisible Groups' est l'un des articles les plus célèbres de J. Tate et on peut trouver sur internet une littérature introductive conséquente sur le sujet. Pour un compte-rendu succinct, je renvoie au séminaire Bourbaki de J.-P. Serre [S66]. Pour une présentation au contraire exhaustive du sujet, on pourra consulter le preprint 'Galois representations arising from p-divisible groups' de B. Conrad et M. Lieblich [CL?] (un temps disponible sur la page web de B. Conrad et dont j'espère qu'il le sera bientôt à nouveau); le lecteur pourra d'ailleurs s'y reporter pour les preuves des résultats explicitement (ou implicitement) admis dans les notes ci-dessous. Les résultats de base de la théorie générale des groupes formels et p-divisibles ne seront que brièvement mentionnés puisqu'ils ont été introduits dans les précédents exposés du groupe de travail. On pourra se reporter à ce sujet à la monographie de J.-M. Fontaine [F77], dont je me suis servi, ou à [CL?].

1. Enoncé

1.1. **Notations.** Dans tout l'exposé p désignera un nombre premier fixé.

Si R est un anneau, on notera $p\text{-Div}_{/R}$ la catégorie des groupes p-divisibles sur R et $p\text{-Div}^0_{/R}$ (resp. $p\text{-Div}^{et}_{/R}$) la sous-catégorie pleine des groupes p-divisibles connexes (resp. étales) sur R.
Si Γ est groupe profini, on notera $\text{Mod}^{lib,TF}_{/\mathbb{Z}_p}(\Gamma)$ la catégorie des $\mathbb{Z}_p$-modules libres de rang fini sur lesquels Γ opère continuement.

Pour tout $\underline{G} \in p\text{-Div}_{/R}$ on notera $\text{ht}(\underline{G})$ la hauteur de $\underline{G}$.

Si R est un anneau local noetherien complet[1], rappelons que tout $\underline{G} \in p\text{-Div}_{/R}$ se décompose en une suite exacte connexe-étale dans $p\text{-Div}_{/R}$

$$0 \to \underline{G}^0 \to \underline{G} \to \underline{G}^{et} \to 0,$$

ce qui permet souvent de ramener les discussions aux seuls cas des groupes p-divisibles connexes ou étales pour lesquels on a des descriptions relativement simples.

1.1.1. *Groupes p-divisibles connexes.* Soit R un anneau local noetherien complet de corps résiduel k de caractéristique $p > 0$. On dit qu'un groupe formel commutatif $\Gamma = \text{spf}(R[[\underline{X}]])$ sur R est un groupe formel p-divisible si la multiplication par p $[p] : \Gamma \to \Gamma$ est une isogénie de degré h (*i.e.* le morphisme continu de R-algèbres de Hopf correspondant $\phi : R[[\underline{X}]] \to R[[\underline{X}]]$ fait de $R[[\underline{X}]]$ est $R[[\underline{X}]]$-libre de rang h sur lui-même). A un tel groupe formel Γ, on peut associer le groupe p-divisible connexe de hauteur h

$$\underline{\Gamma}[p^\infty] = (\Gamma_n := \text{spec}(R[[\underline{X}]]/\phi^n(R[[\underline{X}]]^+)R[[\underline{X}]])),$$

où $R[[\underline{X}]]^+ = \langle X_1, \ldots, X_d \rangle$ est l'idéal d'augmentation de $R[[\underline{X}]]$.

Théorème 1.1. ([T67, Thm. 1]) *L'association*

$$\Gamma \to \underline{\Gamma}[p^\infty]$$

[1] R anneau local hensélien suffit.

induit une équivalence entre la catégorie des groupes formels p-divisibles sur R et p-$\mathrm{Div}^0_{/R}$.

Pour tout $\underline{G} \in p$-$\mathrm{Div}_{/R}$ on note alors $\dim(\underline{G})$ et on appelle *dimension* de $\underline{G}$ la dimension de $\underline{G}^0$ comme groupe formel.

1.1.2. *Groupes p-divisibles étales - module et comodule de Tate.* Si R est un anneau noetherien intègre de corps des fractions K de caractéristique 0, pour tout $\underline{G} = (G_n \overset{i_n}{\hookrightarrow} G_{n+1}) \in p$-$\mathrm{Div}_{/R}$, on note $j_n : G_{n+1} \to G_n$, $n \geq 1$ les morphismes induits par la multiplication par p. On définit alors deux Γ_K-modules:

- Le *comodule de Tate*:

$$\Phi(\underline{G}) := \varinjlim G_n(\overline{K}) \ \ (\text{par rapport aux } G_n \overset{i_n}{\hookrightarrow} G_{n+1})$$

- Le *module de Tate*:

$$T(\underline{G}) := \varprojlim G_n(\overline{K}) \ \ (\text{par rapport aux } G_{n+1} \overset{j_n}{\to} G_n)$$

Lemme 1.2.

(1) *Comme* $\mathbb{Z}_p$*-modules, on a* $\Phi(\underline{G}) \simeq (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{ht}(\underline{G})}$, $T(\underline{G}) \simeq \mathbb{Z}_p^{\mathrm{ht}(\underline{G})}$;
(2) *Comme* Γ_K*-module, on a des isomorphismes canoniques*

$$G_n(\overline{K}) \simeq \ker([p^n] : \Phi(\underline{G}) \to \Phi(\underline{G})), \ \ G_n(\overline{K}) \simeq T(\underline{G})/p^n,$$
$$\Phi(\underline{G}) \simeq T(\underline{G}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \ \ T(\underline{G}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \Phi(\underline{G})).$$

Preuve. Par définition de la catégorie p-$\mathrm{Div}_{/R}$, les suites de schémas en groupes finis, commutatifs, plats sur R

$$(1) \ \ 0 \to G_n \to G_{m+n} \overset{[p^n]}{\to} G_{m+n}$$
$$(1') \ \ G_{m+n} \overset{[p^n]}{\to} G_{m+n} \to G_n \to 0$$

sont exactes. Comme le foncteur fibre générique est exacte, (1), (1′) induisent des suites exactes de schémas en groupes finis, commutatifs, plats sur K

$$(2) \ \ 0 \to G_{nK} \to G_{m+nK} \overset{[p^n]}{\to} G_{m+nK}$$
$$(2') \ \ G_{m+nK} \overset{[p^n]}{\to} G_{m+nK} \to G_{nK} \to 0$$

Enfin, comme K est de caractéristique 0, tous les schémas en groupes considérés sont étales donc, par exactitude du foncteur fibre, (2), (2′) induisent des suites exactes de Γ_K-modules

$$(3) \ \ 0 \to G_n(\overline{K}) \to G_{m+n}(\overline{K}) \overset{[p^n]}{\to} G_{m+n}(\overline{K})$$
$$(3') \ \ G_{m+n}(\overline{K}) \overset{[p^n]}{\to} G_{m+n}(\overline{K}) \to G_n(\overline{K}) \to 0$$

qui, sur les $\mathbb{Z}_p$-modules sous-jacents s'écrivent simplement:

$$(4) \ \ 0 \to (\mathbb{Z}/p^n)^h \to (\mathbb{Z}/p^{m+n})^h \overset{[p^n]}{\to} (\mathbb{Z}/p^{m+n})^h,$$
$$(4') \ \ (\mathbb{Z}/p^{m+n})^h \overset{[p^n]}{\to} (\mathbb{Z}/p^{m+n})^h \to (\mathbb{Z}/p^n)^h \to 0$$

On déduit immédiatement de (4) et (4′) la partie (1) de l'énoncé et de (3) et (3′) la première ligne de la partie (2) de l'énoncé. Pour la première égalité de la deuxième ligne de la partie (2) de l'énoncé, on utilise que $\otimes$ et $\varinjlim$ commutent et que $G_n(\overline{K}) = T(\underline{G})/p^n$:

$$T(\underline{G}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p = T(\underline{G}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \varinjlim \mathbb{Z}/p^n = \varinjlim T(\underline{G}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}/p^n = \varinjlim T(\underline{G})/p^n = \varinjlim G_n(\overline{K}) = \Phi(\underline{G}).$$

Pour la seconde égalité, on utilise juste la définition de $\varinjlim$ et le fait que $G_n(\overline{K}) = \ker([p^n] : \Phi(\underline{G}) \to \Phi(\underline{G})) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Z}/p^n, \Phi(\underline{G}))$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \Phi(\underline{G})) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim \mathbb{Z}/p^n, \Phi(\underline{G})) = \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Z}/p^n, \Phi(\underline{G})) = \varprojlim G_n(\overline{K}) = T(\underline{G}). \ \square$$

Les données suivantes sont donc équivalentes:

- Le Γ_K-module $\Phi(\underline{G})$;
- Le Γ_K-module $T(\underline{G})$;
- Le groupe p-divisible (étale) $\underline{G}_K$;

Exemple 1.3. *Si* $\underline{G} = \mathbb{G}_m[p^\infty]$ *on a*

$$\Phi(\underline{G}) = \varinjlim \mu_{p^n}(\overline{K}) =: \mu_{p^\infty}(\overline{K})$$

et

$$T(\underline{G}) = \varprojlim \mu_{p^n}(\overline{K}) =: \mathbb{Z}_p(1).$$

Si M est un $\mathbb{Z}_p$-module muni d'une action continu de Γ_K, on notera traditionnellement:

$$M(n) = M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(1)^{\otimes n}$$

(où $\mathbb{Z}_p(-1) = \mathbb{Z}_p(1)^\vee$ et $(-)^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(-, \mathbb{Z}_p)$), le *$n$-ième twist de Tate de M*, $n \in \mathbb{Z}$.

Notons $(-)^D$ le foncteur de dualité de Cartier sur les groupes p-divisibles ou les schémas en groupes finis, plats.

Lemme 1.4. *On a un isomorphisme canonique de* Γ_K*-modules*

$$T(\underline{G}^D) \simeq T(\underline{G})^\vee(1).$$

Preuve. Par définition, on a des isomorphismes fonctoriels

$$\begin{tikzcd}
G_n^D(\overline{K}) \arrow[r, "C.D."] & \mathrm{Hom}_{\overline{K}}(G_{n\overline{K}}, \mu_{p^n\overline{K}}) \arrow[d, "j_{n\overline{K}} \circ -"] \\
G_{n+1}^D(\overline{K}) \arrow[u, "j_n(\overline{K})"] \arrow[r, "C.D."] & \mathrm{Hom}_{\overline{K}}(G_{n+1\overline{K}}, \mu_{p^{n+1}\overline{K}})
\end{tikzcd}$$

Comme les $G_{n\overline{K}}$ et les $\mu_{p^n\overline{K}}$ sont étales, on a

$$\mathrm{Hom}_{\overline{K}}(G_{n\overline{K}}, \mu_{p^n\overline{K}}) \simeq \mathrm{Hom}_{Grps}(G_n(\overline{K}), \mu_{p^n}(\overline{K}))$$

D'où des formes $\mathbb{Z}/p^n$-bilinéaires non dégénérées de Γ_K-modules

$$G_n^D(\overline{K}) \times G_n(\overline{K}) \to \mu_{p^n}(\overline{K})$$

et, en passant à la limite projective sur n, une forme $\mathbb{Z}_p$-bilinéaire non dégénérée de Γ_K-modules

$$T(\underline{G}^D) \times T(\underline{G}) \to \mathbb{Z}_p(1) \quad \square$$

Remarque 1.5. La preuve du lemme 1.4 utilise le fait que K est de caractéristique 0.

1.2. **Enoncé du théorème principal.** Le foncteur module de Tate induit une équivalence de catégories

$$T(-) : p\text{-Div}^{et}_{/R} \to \mathrm{Mod}^{lib,TF}_{/\mathbb{Z}_p}(\pi_1(\mathrm{spec}(R)))$$

et le foncteur fibre générique induit un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
p\text{-Div}^{et}_{/R} \arrow[r, "T(-)"] \arrow[d, "- \times_R K"'] & \mathrm{Mod}^{lib,TF}_{/\mathbb{Z}_p}(\pi_1(\mathrm{spec}(R))) \arrow[d] \\
p\text{-Div}^{et}_{/K} \arrow[r, "T(-)"] & \mathrm{Mod}^{lib,TF}_{/\mathbb{Z}_p}(\Gamma_K),
\end{tikzcd}$$

où la flèche verticale de droite est induite par le morphisme canonique de groupes profinis $\Gamma_K \to \pi_1(\mathrm{spec}(R))$. Si R est de plus supposé intégralement clos, ce morphisme est un épimorphisme et la flèche verticale de droite est donc pleinement fidèle. Les flèches horizontales étant des équivalence de catégories, on en déduit que la flèche verticale de gauche est également pleinement fidèle.

Le théorème de Tate étend l'observation ci-dessous à p-$\mathrm{Div}_{/R}$ tout entier.

Théorème 1.6. ([T67, Thm. 4]) *Soit R un anneau intégralement clos, noethérien, de corps des fraction K de caractéristique* 0. *Alors le foncteur fibre générique*

$$- \times_R K : p\text{-Div}_{/R} \to p\text{-Div}_{/K}$$

est pleinement fidèle. Autrement dit, pour tout $\underline{G}, \underline{H} \in p$-$Div_{/R}$ le morphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_{p\text{-Div}_{/R}}(\underline{G}, \underline{H}) \to \mathrm{Hom}_{p\text{-Div}_{/K}}(\underline{G} \times_R K, \underline{H} \times_R K)$$

est un isomorphisme.

Notons que comme K est de caractéristique 0 tout groupe p-divisible sur K est automatiquement étale donc que le foncteur module de Tate induit une équivalence de catégories

$$T(-): p\text{-Div}_{/K} \to \text{Mod}_{/\mathbb{Z}_p}^{lib,TF}(\Gamma_K).$$

La suite de ces notes présente les grandes lignes de la preuve du théorème 1.6. Mentionnons qu'il est aussi valable en caractéristique $p>0$ [dJ98] mais la preuve en est très différente. On essayera de pointer d'ailleurs les endroits où l'hypothèse de caractéristique 0 intervient vraiment.

1.3. **Une réduction préliminaire.** Comme R est intégralement clos noethérien on a

$$R = \bigcap_{P\in \text{spec}(R)\mid ht(P)=1} R_P,$$

où chaque R_P est un anneau de valuation discrète. Soit A, B deux R-algèbres plates, finies. L'hypothèse de platitude pour A implique que pour tout $P \in \text{spec}(R)$ tel que $ht(P) = 1$ les morphismes canoniques $i_P^A : A \to A \otimes_R R_P$, $i_{P,K}^A : A\otimes_R R_P \to A\otimes_R K$ et $i_K^A = i_{P,K}^A \circ i_P^A : A \to A\otimes_R K$ sont des monomorphismes. En particulier si deux morphismes $\phi, \psi : A \to B$ de R-algèbres coincident génériquement, ils sont égaux. La difficulté est donc de montrer la surjectivité.

L'hypothèse de platitude pour B implique que

$$(B\otimes_R K)/(B\otimes_R R_P) \simeq B\otimes_R (K/R_P)$$

et que la suite

$$0 \to B \to B\otimes_R K \to \prod_{P\in \text{spec}(R)\mid ht(P)=1} B\otimes_R (K/R_P)$$

est exacte donc

$$B = \bigcap_{P\in \text{spec}(R)\mid ht(P)=1} B\otimes_R R_P.$$

En particulier, si un morphisme $\phi : A\otimes_R K \to B\otimes_R K$ de K-algèbres s'étend pour tout $P\in\text{spec}(R)$ tel que $ht(P)=1$ en un morphisme $\phi_P : A\otimes_R R_P \to B\otimes_R R_P$ alors le morphisme $\phi\circ i_K^A = i_{P,K}^B \circ \phi_P \circ i_P^A : A \to B\otimes_R K$ est à valeurs dans $\bigcap_{P\in \text{spec}(R)\mid ht(P)=1} B\otimes_R R_P = B$. Cette observation montre que pour prouver le théorème 1.6, on peut se limiter au cas où R est un anneau de valuation discrète.

Si R est un anneau de valutation discrète, on peut toujours trouver un anneau de valutation discrète $R \hookrightarrow R'$ complet de corps résiduel algébriquement clos tel que $R'\cap K = R$. Le même argument que ci-dessus montre que pour prouver le théorème 1.6, on peut se limiter au cas où R est un anneau de valuation discrète complet de corps résiduel algébriquement clos.

Si les caractéristiques résiduelles de R sont $\neq p$, tout groupe p-divisible sur R est automatiquement étale et le théorème est immédiat.

Dans la suite, on supposera donc que R *est un anneau de valutation discrète complet de corps résiduel* k *parfait (voire algébriquement clos) de caractéristique* p.

2. Schéma de la preuve

La preuve se ramène à montrer que le foncteur fibre générique est conservatif

Théorème 2.1. *Pour tout* $\underline{G}, \underline{H} \in p\text{-}Div_{/R}$, *un morphisme* $\underline{\phi} : \underline{G} \to \underline{H}$ *dans* $p\text{-}Div_{/R}$ *est un isomorphisme si et seulement si* $\underline{\phi}_K : \underline{G}_K \to \underline{H}_K$ *est un isomorphisme dans* $p\text{-}Div_{/K}$.

2.1. **Preuve de l'implication Th. 2.1 $\Rightarrow$ Th. 1.6.** Une fois prouvé le lemme suivant, elle repose sur un argument de graphe, essentiellement formel.

Lemme 2.2. *Pour tout* $\underline{G} \in p\text{-}Div_{/R}$ *et pour tout sous-*Γ_K*-module* $M \subset T(\underline{G})$. *Si* $T(\underline{G})/M$ *est sans torsion, il existe* $\underline{G}_M \in p\text{-}Div_{/R}$ *et un morphisme* $\underline{\phi} : \underline{G}_M \to \underline{G}$ *dans* $p\text{-}Div_{/R}$ *tel que le morphisme*

$$T(\underline{\phi}) : T(\underline{G}_M) \to T(\underline{G})$$

dans $\text{Mod}_{/\mathbb{Z}_p}^{lib,TF}(\Gamma_K)$ *induise un isomorphisme* $T(\underline{G}_M)\tilde{\to} M$.

En effet, pour tout morphisme $\phi : T(\underline{G}) \to T(\underline{H})$ dans $\mathrm{Mod}^{lib,TF}_{/\mathbb{Z}_p}(\Gamma_K)$, considérons

$$Graph(\phi) \subset T(\underline{G} \times_R \underline{H}) = T(\underline{G}) \oplus T(\underline{H}),$$

qui est un sous-Γ_K-module vérifiant les hypothèses du lemme 2.2 (si $\overline{x = g + h} \in T(\underline{G} \times_R \underline{H})/Graph(\phi)$ est de torsion, il existe $\lambda \in \mathbb{Z}_p$, $\lambda \neq 0$ tel que $\lambda x \in Graph(\phi)$ *i.e.* $T(\lambda g) = \lambda h$ ou encore $\lambda(T(g) - h) = 0$, ce qui force $T(g) = h$ donc $\overline{x} = 0$). Il existe donc $\underline{F} \in p\text{-Div}_{/R}$ et un morphisme $\underline{\varphi} : \underline{F} \to \underline{G} \times_R \underline{H}$ dans $p\text{-Div}_{/R}$ tel que le morphisme

$$T(\underline{\varphi}) : T(\underline{F}) \to T(\underline{G} \times_R \underline{H})$$

dans $\mathrm{Mod}^{lib,TF}_{/\mathbb{Z}_p}(\Gamma_K)$ induise un isomorphisme $T(\underline{F})\tilde{\to}Graph(\phi)$. Par définition du graphe, la restriction de la projection $T(p_{\underline{G}}) : Graph(\phi)\tilde{\to}T(\underline{G})$ est un isomorphisme. En particulier

$$T(p_{\underline{G}} \circ \underline{\varphi}) = T(p_{\underline{G}}) \circ T(\underline{\varphi}) : T(\underline{F})\tilde{\to}T(\underline{G})$$

est un isomorphisme donc $p_{\underline{G}} \circ \underline{\varphi} : \underline{F}\tilde{\to}\underline{G}$ aussi d'après le théorème 2.1. Le morphisme

$$\underline{\phi} : \underline{G} \overset{(p_{\underline{G}}\circ\underline{\varphi})^{-1}}{\to} Graph(\phi) \overset{p_{\underline{H}}}{\to} \underline{H}$$

vérifie $T(\underline{\phi}) = \phi$. Ce qui montre la plénitude. La fidélité est immédiate (résulte de la platitude de $\underline{G}$).

Preuve du lemme 2.2: Comme $T_p(\underline{G})/M$ est sans torsion, $M \subset T(\underline{G})$ induit des monomorphismes

$$M/p^n \hookrightarrow T_p(\underline{G})/p^n,\ n \geq 0$$

donc correspond par l'équivalence de catégories

$$T(-) : p\text{-Div}_{/K} \to \mathrm{Mod}^{lib,TF}_{/\mathbb{Z}_p}(\Gamma_K)$$

à un sous-groupe p-divisible

$$\underline{G}_{K,M} = (G_{K,Mn} := \mathrm{spec}(B_{Kn})) \hookrightarrow \underline{G}_K = (G_{n,K} := \mathrm{spec}(A_n \otimes_R K)).$$

Soit

$$(u_n : A_n \otimes_R K \twoheadrightarrow B_{Kn})$$

le système projectif de morphismes de K-algèbres de Hopf correspondant à $\underline{G}_{K,M} \hookrightarrow \underline{G}_K$ et notons

$$B_n := \mathrm{im}(A_n \to A_n \otimes_R K \overset{u_n}{\twoheadrightarrow} B_{Kn}) \subset B_{Kn}.$$

Par construction $\tilde{G}_{Mn} := \mathrm{spec}(B_n) \hookrightarrow \mathrm{spec}(A_n) = G_n$ est un sous-schéma en groupe fermé et l'image de B_{n+1} par

$$B_{n+1} \hookrightarrow B_{Kn+1} \to B_{Kn}$$

est B_n. On obtient ainsi un sous-système inductif de sous-schémas en groupes fermés

$$\underline{\tilde{G}}_M = (\tilde{G}_n \hookrightarrow \tilde{G}_{n+1})$$

de $\underline{G}$ tel que $\underline{\tilde{G}}_{MK} = \underline{G}_{KM} \in p\text{-Div}_{/K}$. Notons également que B_n étant sans torsion et R principal, les $\tilde{G}_{Mn}$, $n \geq 1$ sont plats sur R. Cependant, en général, $\underline{\tilde{G}}_M$ lui-même n'est pas p-divisible. Le point délicat de la preuve consiste à modifier légèrement $\underline{\tilde{G}}_M \hookrightarrow \underline{G}$ sans en altérer la fibre générique en un morphisme[2] de groupes p-divisibles $\underline{G}_M \to \underline{G}$ représentant $M \subset T(\underline{G})$.

Les morphismes $\tilde{G}_{Mn} \to \tilde{G}_{Mn+1} \overset{[p]}{\to} \tilde{G}_{Mn+1}$ étant nuls génériquement et les $\tilde{G}_{Mn+1}$ plats sur R, on en déduit que la multiplication par p induit des morphismes

$$\cdots \to \tilde{G}_{n+2}/\tilde{G}_{n+1} \to \tilde{G}_{n+1}/\tilde{G}_n \to \cdots$$

Comme $\tilde{G}_{MK}$ est p-divisible, ces morphismes sont des isomorphismes génériquement. Donc si $\tilde{G}_{n+2}/\tilde{G}_{n+1} = \mathrm{spec}(C_n)$ on peut identifier les $C_n \otimes_R K$ à une même K-algèbre séparable finie C_∞ dans laquelle (toujours par platitude) les C_n s'injectent. Mais chaque C_n étant un R-module fini, on a une suite croissante de R-modules

$$(1)\quad \cdots \subset C_n \subset C_{n+1} \subset \cdots \subset \tilde{R} \subset C_\infty,$$

où $\tilde{R}$ est la cloture intégrale de R dans C_∞. Comme C_∞ est étale, $\tilde{R}$ est un R-module de type fini donc noetherien. On en déduit que la suite (1) est stationnaire à partir d'un certain rang, disons n_0. On pose

$$G_{Mn} = \tilde{G}_{Mn_0+n}/\tilde{G}_{Mn_0},\ n \geq 0.$$

[2] qui ne sera plus, en général, une immersion fermée - voir le contre-exemple de Serre dans [T67, p.182].

La multiplication par p^{n_0} induit alors un morphisme $p^{n_0} : G_{Mn} \to \tilde{G}_{Mn}$ qui est un isomorphisme génériquement. On conclut en montrant que le noyau de $p^n : G_{Mn+1} \to G_{Mn+1}$ est G_{Mn} et que

$$\underline{G}_M = (G_{Mn} \hookrightarrow G_{Mn+1}) \in p\text{-Div}_{/R}. \ \square$$

2.2. **Schéma de la preuve du théorème 2.1.** Supposons ici k *algébriquement clos.* Si on écrit $\underline{G} = (G_n := \text{spec}(A_n))$ et $\underline{H} = (H_n := \text{spec}(B_n))$, le théorème 2.1 se reformule de façon plus terre-à-terre en disant que pour tout système inductif $\underline{f} = (f_n : B_n \to A_n)$ de morphismes de R-algèbres de Hopf si $f_{nK} := f_n \otimes_R K : B_n \otimes_R K \tilde{\to} A_n \otimes_R K$ est un isomorphisme, $n \geq 1$ alors $f_n : B_n \to A_n$ est un isomorphisme, $n \geq 1$.

Comme B_n est plat sur R, on a déjà $\ker(f_n) = 0$. Comme $T(\underline{G}) \simeq T(\underline{H}) \simeq \mathbb{Z}_p^h$ et que R est principal, A_n et B_n sont libres sur R de même rang $r_n := p^{nh}$. Le problème revient donc à montrer que si $\beta_{n,1}, \dots, \beta_{n,r_n}$ est une R-base de B_n et $\alpha_{n,1}, \cdots, \alpha_{n,r_n}$ une R-base de A_n, en notant

$$M := (f_{n,i,j})_{1 \leq i,j \leq r_n}$$

la matrice de $f_n : B_n \to A_n$ dans les bases $\beta_{n,1}, \dots, \beta_{n,r_n}$ et $\alpha_{n,1}, \cdots, \alpha_{n,r_n}$, on a $\det(M) \in R^\times$. Or, on a

$$\begin{aligned}\det(Tr_R(f_n(\beta_{n,i})f_n(\beta_{n,j}))) &= \det({}^tM(Tr_R(\alpha_{n,i}\alpha_{n,j}))M) = \det(M)^2\det(Tr_R(\alpha_{n,i}\alpha_{n,j}))\\ &= \det(Tr_R(f_n(\beta_{n,i}\beta_{n,j})))\\ &= \det(Tr_R(\beta_{n,i}\beta_{n,j}))\end{aligned}$$

La dernière égalité résulte du fait que $f_{nK} : B_n \times_R K \tilde{\to} A_n \otimes_R K$ est un isomorphisme donc que pour tout $\beta \in B_n$ la multiplication $\mu_{f_n(\beta)} : B_n \to B_n$ par $f_n(\beta)$ s'écrit

$$\mu_{f_n(\beta)} = f_n \circ \mu_\beta \circ f_n^{-1}.$$

Par conséquent $\det(M) \in R^\times$ si et seulement si

$$\mathfrak{d}_{B_n/R} = \mathfrak{d}_{A_n/R},$$

où $\mathfrak{d}_{B_n/R}$ (resp. $\mathfrak{d}_{A_n/R}$) désigne l'idéal discriminant de B_n (resp. A_n) sur R. La conclusion résulte alors des deux résultats suivants, qui constituent véritablement le coeur technique de la preuve.

Théorème 2.3. *Pour tout* $\underline{G} = (G_n = \text{spec}(A_n)) \in p\text{-Div}_{/R}$ *on a*

$$\mathfrak{d}_{A_n/R} = p^{n\dim(\underline{G})p^{n\text{ht}(\underline{G})}}A_n, \ n \geq 1.$$

Remarque 2.4. Le fait que K est de caractéristique 0 est ici essentiel...

Soit $\overline{K}$ la clôture algébrique de K et $\overline{v} : \overline{K}^\times \to \mathbb{Q}$ l'unique extension de $v : K^\times \to \mathbb{Z}$ à $\overline{K}$. Notons C la complétion de $\overline{K}$ par rapport à $\overline{v} : \overline{K}^\times \to \mathbb{Q}$; c'est un corps algébriquement clos. Comme l'action de Γ_K sur $\overline{K}$ est isométrique, elle se prolonge en une action continue de Γ_K sur C (propriété universelle de la complétion).

Théorème 2.5. *Pour tout* $\underline{G} \in p\text{-Div}_{/R}$ *on a* $\text{ht}(\underline{G}) = \text{rang}_{\mathbb{Z}_p}(T(\underline{G}))$ *et*

$$\dim(\underline{G}) = \dim_K(\text{Hom}_{\Gamma_K}(T(\underline{G})(-1), C)).$$

Autrement dit, la donnée du Γ_K-module $T(\underline{G})$ détermine les $\mathfrak{d}_{A_n/R}$, $n \geq 1$.

3. Preuve du théorème 2.3

On suppose encore ici que k *est algébriquement clos.* Si $G = \text{spec}(A)$ est un schéma en groupes commutatifs, fini, plat sur R on note

$$\text{disc}(G) := \mathfrak{d}_{A/R}$$

le discriminant de G sur R.

Lemme 3.1. *Soit*

$$0 \to G' \to G \to G'' \to 0$$

une suite exacte courte de schémas en groupes commutatifs, finis, plats sur R. Alors

(1) $\text{disc}(G) = \text{disc}(G')^{|G''|}\text{disc}(G'')^{|G'|}$;
(2) $|G| = |G'||G''|$.

Si $G = G^{et}$, A est étale sur R donc A_k est étale sur k. Mais comme k est algébriquement clos, on a juste $A = k^r$ donc $\mathfrak{d}_{A_k/k} = k$. En calculant les discriminants dans une R-base $e_1, \dots, e_r$ de A et la k-base induite $e_1 \otimes 1, \dots, e_r \otimes 1$ de A_k, on obtient immédiatement $\mathfrak{d}_{A_k/k} = \mathfrak{d}_{A/R} \otimes_R k$. D'où $\mathfrak{d}_{A/R} = R$.

Cette observation combinée à la suite exacte courte connexe-étale pour un schéma en groupes commutatifs G, fini, plat sur R et au lemme 3.1 montre que

$$\mathrm{disc}(G) = \mathrm{disc}(G^0)^{|G^{et}|}.$$

On peut donc supposer que $\underline{G} = \underline{G}^0$. D'après le théorème 1.1, on a $\underline{G} = \underline{\Gamma}[p^\infty]$ pour un certain groupe formel $\Gamma = \mathrm{spf}(R[[\underline{X}]])$. Notons $A = R[[X_1, \dots, X_d]]$ et $A^+ = \langle X_1, \dots, X_d \rangle$. Rappelons que $G_n = \mathrm{spec}(A/\phi^n(A^+)A)$, où $\phi : A \to A$ est la multiplication par p et qu'elle fait de A un A-module libre de rang p^h. Ecrivons plutôt $\phi^n : A =: A(n) \to A$; cela fait de A une $A(n)$-algèbre qui est libre de rang p^{nh} comme $A(n)$-module. On a $A_n = A/A(n)^+A = A \otimes_{A(n)} A(n)/A(n)^+$. En particulier, si $a_1, \dots, a_{p^{nh}}$ est une $A(n)$ base de A alors $a_1 \otimes 1, \dots, a_{p^{nh}} \otimes 1$ est une $A(n)/A(n)^+ \simeq R$-base de A_n et pour tout $a \in A$ on a

$$\mathrm{Tr}_{A/A(n)}(a) \otimes_{A(n)} 1 = \mathrm{Tr}_{A_n/R}(a \otimes 1)$$

d'où

$$\mathfrak{d}_{A/A(n)} \otimes_{A(n)} A(n)/A(n)^+ = \mathfrak{d}_{A_n/R}$$

Il suffit donc de montrer que

$$\mathfrak{d}_{A/A(n)} = p^{ndp^{nh}} A(n).$$

Cela va résulter du lemme 3.2 ci-dessous, que l'on admettra. Soit $\omega_1, \dots, \omega_d$ une A-base de $\Omega^f_{A|R}$ et $\omega_1(n), \dots, \omega_d(n)$ une $A(n)$-base de $\Omega^f_{A(n)|R}$. Alors $\theta := \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_d \in \Lambda^d \Omega^f_{A|R}$ est une A-base de $\Lambda^d \Omega^f_{A|R}$ et $\theta(n) := \omega_1(n) \wedge \dots \wedge \omega_d(n) \in \Lambda^d \Omega^f_{A(n)|R}$ est une A-base de $\Lambda^d \Omega^f_{A(n)|R}$. En particulier, il existe un unique $a \in A$ tel que

$$\wedge^d d\phi^n(\theta(n)) = a\theta.$$

Lemme 3.2. *On a*

$$\mathfrak{d}_{A/A(n)} = N_{A/A(n)}(a)A(n)$$

On prend pour $\omega_1, \dots, \omega_d$ une A-base $\omega_1, \dots, \omega_d$ de formes différentielles invariantes (voir 4.2.2 ci-dessous) du A-module $\Omega^f_{A|R}$ des différentielles formelles et on pose $\omega_i(n) = \omega_i$, $i = 1, \dots, d$. Comme $\omega_i(n)$ est invariante, $d\phi^n(\omega_i) = p^n \omega_i$ donc

$$\wedge^d d\phi^n \theta(n) = p^{nd}\theta$$

et

$$\mathfrak{d}_{(A/A(n)} = N_{A/A(n)}(p^{nd})A(n) = p^{ndp^{nh}} A(n).$$

4. Preuve du théorème 2.5 - le Γ_K-module $T(\underline{G}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} C$

Dans cette section, on supposera seulement que k est parfait.

4.1. **Cohomologie de Γ_K à valeurs dans $C(n)$ (admis).** Soit $\overline{v} : \overline{K}^\times \to \mathbb{Q}$ l'unique extension de $v : K^\times \to \mathbb{Z}$ à $\overline{K}$ et C la complétion de $\overline{K}$ par rapport à $\overline{v} : \overline{K}^\times \to \mathbb{Q}$. On admettra les résultats suivants, pour lesquels on renvoie à [T67, §3]

Théorème 4.1.

(1) $\mathrm{H}^0(\Gamma_K, C) = \mathrm{H}^1(\Gamma_K, C) = K$;
(2) $\mathrm{H}^0(\Gamma_K, C(n)) = \mathrm{H}^1(\Gamma_K, C(n)) = 0$ *pour* $n \neq 0$.

Remarque 4.2. Cont.. Signalons aussi que c'est ici uniquement qu'on utilise l'hypothèse que k est de caractéristique $p > 0$.

4.2. **Logarithme.**

4.2.1. *Points.* Pour tout $\underline{G} = (G_n = \mathrm{spec}(A_n)) \in p\text{-Div}_{/R}$, notons $A = \varprojlim A_n$ la R-algèbre de Hopf profinie associée (donc comme groupe formel $\underline{G} = \mathrm{spf}(A)$). Pour tout R-algèbre profinie S on note

$$\underline{G}(S) := \mathrm{Hom}_{TopAlg_{/R}}(A, S)$$

l'ensemble des points de $\underline{G}$ à valeurs dans S. En particulier, si L est la complétion d'une extension algébrique de K et R_L l'anneau de valuation de L, on a

$$\underline{G}(R_L/\mathfrak{m}_{R_L}^i) = \varinjlim_n G_n(R_L/\mathfrak{m}_{R_L}^i)$$

et

$$\begin{array}{rl} \underline{G}(R_L) & := \mathrm{Hom}_{TopAlg_{/R}}(A, R_L) \\ & = \mathrm{Hom}_{TopAlg_{/R}}(A, \varprojlim_i R_L/\mathfrak{m}_{R_L}^i) \\ & = \varprojlim_i \mathrm{Hom}_{TopAlg_{/R}}(A, R_L/\mathfrak{m}_{R_L}^i) \\ & = \varprojlim_i \underline{G}(R_L/\mathfrak{m}_{R_L}^i) = \varprojlim_i \varinjlim_n G_n(R_L/\mathfrak{m}_{R_L}^i) \end{array}$$

On notera aussi que $G_n(R_L/\mathfrak{m}_{R_L}^i) = \ker([p] : G_{n+m}(R_L/\mathfrak{m}_{R_L}^i) \to G_{n+m}(R_L/\mathfrak{m}_{R_L}^i))$, $m \geq 0$ donc que

$$G_n(R_L/\mathfrak{m}_{R_L}^i) = \ker([p] : \underline{G}(R_L/\mathfrak{m}_{R_L}^i) \to \underline{G}R_L/\mathfrak{m}_{R_L}^i))$$

et, par exactitude à gauche de la limite projective, que

$$\ker([p] : \underline{G}(R_L) \to \underline{G}(R_L)) = \varprojlim_i G_n(R_L/\mathfrak{m}_{R_L}^i) = G_n(\varprojlim_i R_L/\mathfrak{m}_{R_L}^i) = G_n(R_L).$$

On a donc

$$\underline{G}(R_L)_{tors} = \varinjlim_n G_n(R_L).$$

Exemple 4.3.

(1) *Si* $\underline{G} = \underline{G}^{et}$ *alors* $G_n(R_L/\mathfrak{m}_{R_L}^{i+1}) \simeq G_n(R_L/\mathfrak{m}_{R_L}^i) \simeq G_n(k_L)$ *(formellement étale) donc dans ce cas*

$$\underline{G}(R_L) = \underline{G}(R_L)_{tors} = \varinjlim_n G_n(k_L).$$

(2) *Si* $\underline{G} = \underline{G}^0$ *alors* $\underline{G} = \Gamma[p^\infty]$ *pour un certain groupe formel* $\Gamma = \mathrm{spf}(R[[\underline{X}]])$ *de dimension* d *et*

$$\underline{G}(R_L) = \mathrm{Hom}_{TopAlg_{/R}}(R[[\underline{X}]], R_L) = (\mathfrak{m}_{R_L})^d$$

est le groupe de Lie analytique associé au groupe formel Γ. *En particulier, la multiplication par* p *dans* $\underline{G}(R_L)$ *est controlée par le théorème de Lazard* [S06, II, Chap. IV, §7] *qui dit qu'il existe une suite*

$$\underline{\psi}_m(\underline{X}) \in R[[\underline{X}]]^d,\ m \geq 1$$

telle que
- $\underline{\psi}_1(\underline{X}) = \underline{X}$*;*
- *chaque composante de* $\underline{\psi}_n(\underline{X})$ *est d'ordre* $\geq n$*;*
- $\phi^n = \sum_{m\geq 1} C_{p^n}^m \underline{\psi}_m(\underline{X})$, *où* $\phi^n : R[[\underline{X}]] \to R[[\underline{X}]]$ *correspond à la multiplication par* p^n *dans* $\underline{G}$.

En particulier $p^n\underline{G}(R_L) \subset (\mathfrak{m}_{R_L}^n)^d$ *(*$p \in \mathfrak{m}_{R_L}$ *par hypothèse).*

(3) *Si* $\underline{G} = \mathbb{G}_m[p^\infty]$ *alors*

$$\underline{G}(R_L) = \mathfrak{m}_{R_L}$$

muni de la loi de groupe $x * y = x + y + xy$ *donc on a un isomorphisme de groupes topologiques*

$$\begin{array}{ccc} \underline{G}(R_L) & \tilde{\to} & U_L := 1 + \mathfrak{m}_{R_L} (\subset R_L^\times) \\ x & \to & 1 + x \end{array}$$

4.2.2. *Rappels/compléments de calcul différentiel.* Soit $\Gamma = \mathrm{spf}(A := R[[\underline{X}]])$ le groupe formel correspondant à $\underline{G}^0$; notons A^+ l'idéal d'augmentation de A et A^{+2} l'adhérence de A^+A^+ dans A. On définit les espaces cotangent $t^*_{\underline{G}}$ et tangent $t_{\underline{G}}$ à $\underline{G}$ comme des foncteurs de la catégorie des R-algèbres profinies dans la catégorie des R-modules topologiques en posant

$$t^*_{\underline{G}}(R') = A^+/A^{+2} \otimes_R R'$$

et

$$t_{\underline{G}}(R') = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}_{/R}}(A^+/A^{+2}, R').$$

On introduit également le sous-R-module $\omega_{A|R} \subset \Omega^f_{A|R}$ des formes différentielles invariantes *i.e.* le sous-R-module des $\omega \in \Omega^f_{A|R}$ telles que $m^*\omega = p_1^*\omega + p_2^*\omega$ dans $\Omega^f_{A\otimes_R A|R}$ (où $m : \underline{G} \times \underline{G} \to \underline{G}$ est la multiplication et $p_i : \underline{G} \times \underline{G} \to \underline{G}$ la i-ème projection, $i = 1, 2$). Noter en particulier que pour tout $\omega \in \omega_{A|R}$ on a $d\phi(\omega) = p\omega$. On a les propriétés suivantes (voir [F77, Chap. I, §8]):

(1) On a un isomorphisme canonique $c : \omega_{A|R} \tilde{\to} t^*_{\underline{G}}(R)$;
(2) le monomorphisme de R-modules $\omega_{A|R} \hookrightarrow \Omega^f_{A|R}$ induit un isomorphisme de R-modules

$$\omega_{A|R} \otimes_R A \tilde{\to} \Omega^f_{A|R};$$

(3) (Lemme de Poincaré formel) pour tout $\omega \in \omega_{A|R}$ il existe un unique $\Omega_\omega \in A^+ \otimes_R K$ tel que $d\Omega_\omega = \omega$.

4.2.3. *Définition du logarithme.* Soit L la complétion d'une extension algébrique de K et R_L l'anneau de valuation de L. De la suite exacte

$$0 \to \underline{G}^0(R_L) \to \underline{G}(R_L) \to \underline{G}^{et}(R_L)$$

et du fait que $\underline{G}^{et}(R_L)$ est de torsion, on déduit que pour tout $x \in \underline{G}(R_L)$ il existe $n_x \geq 1$ tel que $p^{n_x}x \in \underline{G}^0(R_L)$. On pose alors:

$$\log_{\underline{G}}(x) : \begin{array}{ccl} \omega_{A|R} & \to & L \\ \omega & \to & \frac{1}{p^{n_x}}\Omega_\omega(p^{n_x}x). \end{array}$$

Proposition 4.4. $\log_{\underline{G}} : \underline{G}(R_L) \to t_{\underline{G}}(L)$ *est bien défini; c'est un morphisme de* $\mathbb{Z}_p$*-modules topologiques fonctoriel en* $\underline{G}$ *et un isomorphisme local qui vérifie:*

- $\ker(\log_{\underline{G}}) = \underline{G}(R_L)_{tors}$, $\mathrm{coker}(\log_{\underline{G}})$ *est de torsion;*
- *Si* R_L *est de valuation discrète alors* $\mathrm{im}(\log_{\underline{G}})$ *est contenu dans un sous* R_L*-module de type fini de* $t_{\underline{G}}(L)$*. Si* L *est algébriquement clos alors* $\mathrm{im}(\log_{\underline{G}}) = t_{\underline{G}}(L)$*.*

En particulier, $\log_{\underline{G}} : \underline{G}(R_L) \to t_{\underline{G}}(L)$ induit toujours un isomorphisme de $\mathbb{Q}_p$-modules

$$\log_{\underline{G}} : \underline{G}(R_L) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \tilde{\to} t_{\underline{G}}(L).$$

Preuve de la proposition 4.4. Voir appendice. □

Exemple 4.5. *Si* $\underline{G} = \mathbb{G}_m[p^\infty]$ *on a* $\underline{G}(R_L) = 1 + \mathfrak{m}_{R_L} =: U_L$*,* $t_{\underline{G}}(L) = L$ *et la définition du logarithme correspond à la définition usuelle i.e.*

$$\log(1+x) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}.$$

En effet, il suffit de remarquer que $\omega = \frac{dT}{1+T}$ *est invariante.*

Remarque 4.6. Cont.

4.3. **Dualité.** Par définition, on a des isomorphismes fonctoriels de $\mathbb{Z}_p$-modules

$$\begin{tikzcd} G_n^D(R_C) \arrow[r, "C.D."] & \mathrm{Hom}_{R_C}(G_{n,R_C}, \mathbb{G}_m[p^\infty]_{n,R_C}) \arrow[d, "j_n\circ -"] \\ G_{n+1}^D(R_C) \arrow[u, "j_n(R_C)"] \arrow[r, "C.D."] & \mathrm{Hom}_{R_C}(G_{n+1,R_C}, \mathbb{G}_m[p^\infty]_{n+1,R_C}) \end{tikzcd}$$

Notons que $G_n^D(R_C) = G_n^D(C) = G_n^D(\overline{K})$ (critère valuatif de propreté). En passant à la limite projective sur n on obtient donc un isomorphisme de $\mathbb{Z}_p$-modules

$$T(\underline{G}^D) \overset{C.D.}{\to} \mathrm{Hom}_{p\text{-}\mathrm{Div}_{/R_C}}(\underline{G}_{R_C}, \mathbb{G}_m[p^\infty]_{R_C}).$$

Pour tout $i \geq 0$, on en déduit une forme $\mathbb{Z}_p$-bilinéaire

$$T(\underline{G}^D) \times \underline{G}(R_C/\mathfrak{m}^i_{R_C}) \to \mathbb{G}_m[p^\infty](R_C/\mathfrak{m}^i_{R_C})$$

donc, en passant à la limite projective sur i, une forme $\mathbb{Z}_p$-bilinéaire

$$T(\underline{G}^D) \times \underline{G}(R_C) \to \mathbb{G}_m[p^\infty](R_C) = U_C.$$

Notons

$$\alpha : \underline{G}(R_C) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(T(\underline{G}^D), U_C)$$

le morphisme correspondant.

Si on considère la torsion, on a

$$\begin{tikzcd}
T(\underline{G}^D) \times \underline{G}(R_C) \arrow[r] & U_C \\
T(\underline{G}^D) \times \Phi(\underline{G}) \arrow[r] \arrow[u, hook] & U_{Ctors} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Et la dualité de Cartier sur C (voir §1.1.2) montre que la forme $\mathbb{Z}_p$-bilinéaire du bas est non dégénérée, d'où un isomorphisme de $\mathbb{Z}_p$-modules

$$\alpha_0 : \Phi(\underline{G}) \tilde{\to} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(T(\underline{G}^D), U_{Ctors}).$$

Pour tout $t \in T(\underline{G}^D)$ notons $f_t : \underline{G}_{R_C} \to \mathbb{G}_m[p^\infty]_{R_C}$ le morphisme correspondant par la dualité de Cartier. La fonctorialité du log en $\underline{G}$ montre que pour tout $t \in T(\underline{G}^D)$ et $\underline{x} \in \underline{G}(R_L)$ on a

$$\log_{\mathbb{G}_m[p^\infty]}(f_t(\underline{x})) = df_t \log_{\underline{G}}(\underline{x})$$

donc en posant

$$\begin{array}{llll} d\alpha : & t_{\underline{G}}(C) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(T(\underline{G}^D), C) \\ & \underline{u} & \to & t \to df_t(\underline{u}) \end{array}$$

et en invoquant la proposition 4.4, on obtient un morphisme de suite exactes courtes:

$$(\dagger)\quad \begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Phi(\underline{G}) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_0"] & \underline{G}(R_C) \arrow[r, "\log"] \arrow[d, "\alpha"] & t_{\underline{G}}(C) \arrow[r] \arrow[d, "d\alpha"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(T(\underline{G}^D), U_{Ctors}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(T(\underline{G}^D), U_C) \arrow[r, "\log\circ -"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(T(\underline{G}^D), C) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(l'exactitude à droite dans la suite du bas résulte du fait que $T(\underline{G}^D)$ est un $\mathbb{Z}_p$-module libre). Ce diagramme est Γ_K-équivariant. La flèche de droite peut s'interpréter comme une 'linéarisation' de celle du milieu; le fait que ce soit un morphisme de C-espaces vectoriels va jouer un rôle crucial dans ce qui suit.

Notons enfin

$$\alpha_R : \underline{G}(R) \to \mathrm{Hom}_{\Gamma_K}(T(\underline{G}^D), U_C)$$

et

$$d\alpha_R : t_{\underline{G}}(K) \to \mathrm{Hom}_{\Gamma_K}(T(\underline{G}^D), C)$$

les restrictions de α et $d\alpha$ à $\underline{G}(R) = \underline{G}(R_C)^{\Gamma_K}$ et $t_{\underline{G}}(K) = t_{\underline{G}}(C)^{\Gamma_K}$ (théorème 4.1) respectivement. Le théorème 2.5 résulte alors du résultat de dualité suivant

Théorème 4.7. *Les morphismes de $\mathbb{Z}_p$-modules*

$$\alpha_R : \underline{G}(R) \to \mathrm{Hom}_{\Gamma_K}(T(\underline{G}^D), U_C)$$

et

$$d\alpha_R : t_{\underline{G}}(K) \to \mathrm{Hom}_{\Gamma_K}(T(\underline{G}^D), C)$$

sont des isomorphismes.

En effet, on a

$$\dim(\underline{G}) = \dim_K(t_{\underline{G}}(K)) = \dim_K(\mathrm{Hom}_{\Gamma_K}(T(\underline{G}^D), C)) = \dim_K(\mathrm{Hom}_{\Gamma_K}(T(\underline{G})^\vee(-1)), C)).$$

4.4. **Preuve du théorème 4.7.**

4.4.1. *Injectivité.*

Lemme 4.8. *Les morphismes de $\mathbb{Z}_p$-modules*

$$\alpha_R : \underline{G}(R) \to \mathrm{Hom}_{\Gamma_K}(T(\underline{G}^D), U_C)$$

et

$$d\alpha_R : t_{\underline{G}}(K) \to \mathrm{Hom}_{\Gamma_K}(T(\underline{G}^D), C)$$

sont injectifs.

Preuve. Comme α_0 est un isomorphisme, on déduit du lemme du serpent que α et $d\alpha$ ont des noyaux et des conoyaux isomorphes. Comme $t_{\underline{G}}(C)$ est un C- donc un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel, coker$(d\alpha)$ et coker(α) sont des $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels. En particulier ker(α) est *uniquement* p-divisible donc $\ker(\alpha_R) = \ker(\alpha)^{\Gamma_K}$ l'est aussi. Supposons d'abord $\underline{G} = \underline{G}^0$. Dans ce cas,

$$\ker(\alpha_R) = G(R) \cap \ker(\alpha) \subset \bigcap_{r \geq 0} p^r \underline{G}(R).$$

Mais d'après l'exemple 4.3 $\underline{G}(R) = (\mathfrak{m}_R)^d$ muni d'une loi de groupe formel telle que $p^r(\mathfrak{m}_R)^d \subset (\mathfrak{m}_R^r)^d$. En particulier,

$$\bigcap_{r \geq 0} p^r \underline{G}(R) = 0.$$

Dans le cas général, on a une suite exacte

$$0 \to \underline{G}^0(R) \to \underline{G}(R) \to \underline{G}^{et}(R)$$

et comme $\underline{G}^{et}(R)$ est de torsion, pour tout $x \in \ker(\alpha_R)$ il existe $n_x \geq 1$ tel que $p^{n_x}x \in \ker(\alpha_R) \cap G^0(R)$. Par fonctorialité du log, $\ker(\alpha_R) \cap G^0(R)$ coincide avec le noyau de α_r pour $\underline{G}^0$ donc est nul d'après ce qui précède. D'où $p^{n_x}x = 0$ et comme ker(α) est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel, $x = 0$. $\ker(\alpha_R) = 0$ implique $\ker(d\alpha) \cap \log(\underline{G}(R)) = 0$. Comme $\log(\underline{G}(R)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p = t_{\underline{G}}(K)$ et $d\alpha$ est K-linéaire, on en déduit $\ker(d\alpha_R) = \ker(d\alpha) \cap t_{\underline{G}}(K) = 0$. □

Corollaire 4.9. *Les morphismes de $\mathbb{Z}_p$-modules*

$$\alpha : \underline{G}(R_C) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(T(\underline{G}^D), U_C)$$

et

$$d\alpha : t_{\underline{G}}(C) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(T(\underline{G}^D), C)$$

sont injectifs.

Preuve. Comme $\ker(\alpha) = \ker(d\alpha)$, il suffit de montrer que $\ker(d\alpha) = 0$. Décomposons $d\alpha$ comme

$$d\alpha : t_{\underline{G}}(K) \otimes_K C \overset{d\alpha_R \otimes Id_C}{\to} \mathrm{Hom}_{\Gamma_K}(T(\underline{G}^D), U_C) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(T(\underline{G}^D), U_C).$$

On vient de voir que la première flèche est injective; il suffit donc de montrer que la seconde l'est aussi. Cela résulte du lemme suivant.

Lemme 4.10. *Soit W un C-espace vectoriel muni d'une action semi-linéaire de Γ_K (i.e. $\sigma(\lambda w) = \sigma(\lambda)\sigma(w)$, $\lambda \in C$, $w \in W$, $\sigma \in \Gamma_K$). Alors le morphisme canonique*

$$W^{\Gamma_K} \otimes_K C \to W$$

est injectif.

Preuve. Soit $e_1, \ldots, e_\delta$ une K-base de W^{Γ_K} et

$$\sum_{i \in I} \lambda_i e_i = 0$$

une relation de dépendence linéaire dans C de longueur minimale avec $\lambda_{i_0} = 1$ pour un certain $i_0 \in I$. Pour tout $\sigma \in \Gamma_K$ on a

$$\sum_{i \in I} (\sigma(\lambda_i) - \lambda_i) e_i = 0$$

donc par minimalité de I, $\sigma(\lambda_i) = \lambda_i$ et $\lambda_i \in C^{\Gamma_K} = K$ (théorème 4.1): une contradiction. □

4.4.2. *Surjectivité.* D'après le corollaire 4.9, le diagramme (†) a les propriétés d'exactitude codées ci-dessous

$$\begin{tikzcd}
(\dagger) \quad 0 \arrow[r] & \Phi(\underline{G}) \arrow[r] \arrow[d, hook, "\alpha_0"'] & \underline{G}(R_C) \arrow[r, "\log"] \arrow[d, hook, "\alpha"'] & t_{\underline{G}}(C) \arrow[r] \arrow[d, hook, "d\alpha"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(T(\underline{G}^D), U_{Ctors}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(T(\underline{G}^D), U_C) \arrow[r, "\log\circ -"'] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(T(\underline{G}^D), C) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & \mathrm{coker}(\alpha) \arrow[r, hook, two heads] & \mathrm{coker}(d\alpha) &
\end{tikzcd}$$

Par exactitude à gauche du foncteur $(-)^{\Gamma_K}$, on en déduit donc un diagramme exact

$$\begin{tikzcd}
(\dagger\dagger) \quad 0 \arrow[r] & \Phi(\underline{G})^{\Gamma_K} \arrow[r] \arrow[d, hook, "\alpha_{0R}"'] & \underline{G}(R) \arrow[r] \arrow[d, hook, "\alpha_R"'] & t_{\underline{G}}(K) \arrow[r] \arrow[d, hook, "d\alpha_R"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\Gamma_K}(T(\underline{G}^D), U_{Ctors}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\Gamma_K}(T(\underline{G}^D), U_C) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\Gamma_K}(T(\underline{G}^D), C) \arrow[d] & \\
 & & (\mathrm{coker}(\alpha))^{\Gamma_K} \arrow[r, hook, two heads] & (\mathrm{coker}(d\alpha))^{\Gamma_K} &
\end{tikzcd}$$

donc un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{coker}(\alpha_R) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathrm{coker}(d\alpha_R) \arrow[d, hook] \\
(\mathrm{coker}(\alpha))^{\Gamma_K} \arrow[r, hook, two heads] & (\mathrm{coker}(d\alpha))^{\Gamma_K}.
\end{tikzcd}$$

En particulier $\mathrm{coker}(\alpha_R) \hookrightarrow \mathrm{coker}(d\alpha_R)$ donc il suffit de montrer que $\mathrm{coker}(d\alpha_R) = 0$, ce qui équivaut à

$$\dim_K(\mathrm{Hom}_{\Gamma_K}(T(\underline{G}^D), C)) \leq \dim_K(t_{\underline{G}}(K)).$$

Notons donc

$$W := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(T(\underline{G}), C),\ W^D := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(T(\underline{G}^D), C)$$

et

$$\dim_K(W^{\Gamma_K}) := \delta,\ \dim_K(W^{D\Gamma_K}) := \delta^D,$$

$$\begin{aligned} h :\ &= \mathrm{ht}(\underline{G}) = \dim_C(W) \\ &= \mathrm{ht}(\underline{G}^D) = \dim_C(W^D), \end{aligned}$$

$$d := \dim(\underline{G}) = \dim_K(t_{\underline{G}}(K)),\ d^D := \dim(\underline{G}^D) = \dim_K(t_{\underline{G}^D}(K)).$$

On a toujours

$$d + d^D = h$$

et

$$d^D \leq \delta,\ d \leq \delta^D.$$

Il suffit donc de montrer que

$$\delta + \delta^D \leq h.$$

Pour cela observons que

$$\begin{aligned} W^D \ &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(T(\underline{G}^D), C) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(T(\underline{G})^\vee(1), C) \\ &= T(\underline{G}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} C(-1) \end{aligned}$$

D'où une forme $\mathbb{Z}_p$-bilinéaire Γ_K-équivariante non dégénérée

$$\begin{array}{ccc} W \times W^D & \to & C(-1) \\ (f, t \otimes \lambda) & \to & \lambda f(t) \end{array}$$

et,

$$\begin{tikzcd} W \times W^D \arrow[r] & C(-1) \\ W^{\Gamma_K} \times W^{D\Gamma_K} \arrow[r] \arrow[u, hook] & C(-1)^{\Gamma_K} \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

De $C(-1)^{\Gamma_K} = 0$ (théorème 4.1), on déduit donc que (†††) $W^{\Gamma_K}C$ et $W^{D\Gamma_K}C$ sont orthogonaux donc que

$$\delta \overset{(*)}{=} \dim_C(W^{\Gamma_K}C) \leq \dim_C(\mathrm{Hom}_C(W^D/W^{D\Gamma_K}C), C(1)) \overset{(*)}{=} h - \delta^D.$$

Les égalités $(*)$ résultent du lemme 4.10.

4.5. **La décomposition de Hodge-Tate du Γ_K-module $T(\underline{G}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} C$.**

Corollaire 4.11. *On a une décomposition canonique de Γ_K-modules*

$$W = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(T(\underline{G}), C) \simeq t_{\underline{G}^D}(C) \oplus t^*_{\underline{G}}(C)(-1) \simeq C^{d^D} \oplus C(-1)^d.$$

Preuve. On a

$$t_{\underline{G}^D}(C) \tilde{\to} W^{\Gamma_K} \otimes_K C \hookrightarrow W$$

et

$$t_{\underline{G}}(C) \tilde{\to} W^{D\Gamma_K} \otimes_K C \hookrightarrow W^D.$$

De (†††) on en déduit une suite

$$0 \to t_{\underline{G}^D}(C) \overset{d\alpha^D}{\to} W = \mathrm{Hom}_C(W^D, C(-1)) \overset{|_{t_{\underline{G}}(C)}}{\to} t^*_{\underline{G}}(C)(-1) \to 0$$

exacte à gauche, à droite et telle que $|_{t_{\underline{G}}(C)} \circ d\alpha^D = 0$. L'égalité $h = d + d^D$ assure l'exactitude au milieu. Il reste à voir que cette suite exacte se scinde de façon unique. Réécrivons-là comme

$$0 \to C^{d^D} \to W \to C(-1)^d \to 0.$$

En appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_C(C(-1)^d, -)$, on en déduit une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Hom}_C(C(-1)^d, C^{d^D}) \to \mathrm{Hom}_C(C(-1)^d, W) \to \mathrm{Hom}_C(C(-1)^d, C(-1)^d) \to 0.$$

Puis en appliquant le foncteur $(-)^{\Gamma_K}$, une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Hom}_C(C(-1)^d, C^{d^D})^{\Gamma_K} \to \mathrm{Hom}_C(C(-1)^d, W)^{\Gamma_K} \to \mathrm{Hom}_C(C(-1)^d, C(-1)^d)^{\Gamma_K} \to \mathrm{H}^1(\Gamma_K, \mathrm{Hom}_C(C(-1)^d, C^{d^D})).$$

Comme $\mathrm{Hom}_C(C^{d^D}, C(-1)^d) = C(1)^{dd^D}$ on a $\mathrm{Hom}_C(C(-1)^d, C^{d^D})^{\Gamma_K} = 0$ et $\mathrm{H}^1(\Gamma_K, \mathrm{Hom}_C(C(-1)^d, C^{d^D})) = 0$ (théorème 4.1) d'où l'existence et l'unicité du scindage. □

En particulier, on a un isomorphisme canonique de Γ_K-modules

$$T(\underline{G}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} C \simeq t^*_{\underline{G}^D}(C) \oplus t_{\underline{G}}(C)(1) \simeq C^{d^D} \oplus C(1)^d.$$

Remarque 4.12.

(1) on peut réécrire le corollaire 4.11 comme

$$W = W^{\Gamma_K} \otimes_K C \oplus W^{D\Gamma_K} \otimes_K C(-1).$$

Mais $W^D = W(-1)$ donc

$$W^{D\Gamma_K} := \{w \in W \mid \sigma(w) = \chi_p(\sigma)w,\ \sigma \in \Gamma_K\}.$$

Plus généralement, si V est un $\mathbb{Q}_p$-module de dimension fini muni d'une action continu de Γ_K, on pose pour tout $i \in \mathbb{Z}$

$$V^i := \{w \in V \otimes_{\mathbb{Q}_p} C \mid \sigma(w) = \chi_p^i(\sigma)w,\ \sigma \in \Gamma_K\}$$

et $V(i) := V^i \otimes_K C$. L'argument de la preuve du lemme 4.10 montre que le morphisme canonique

$$\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V(i) \hookrightarrow V$$

est injectif. Lorsque c'est un isomorphisme, on dit que V est *Hodge-Tate*. On dit alors que

$$m_i(V) := \dim_C(V(i))$$

est la multiplicité de i dans V; si $m_i(V) \neq 0$, on dit que i est un *poids de Hodge-Tate* de V. Pour une introduction à la théorie des modules de Hodge-Tate, voir par ex. [S79].

(2) Lorsque $\underline{G}$ est le groupe p-divisible associé á un schéma abélien A sur R le corollaire 4.11 s'écrit
$$\mathrm{H}^1(A_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} C = \mathrm{H}^0(A_K, \Omega^1_{A_K}) \otimes_K C \oplus \mathrm{H}^1(A_K, \Omega^0_{A_K}) \otimes_K C.$$
A la p.180 de son article, Tate pose la question de l'existence d'une telle décomposition pour un schéma X propre et lisse sur R quelconque. Faltings y répondra positivement une vingtaine d'années plus tard en montrant notamment qu'on a un isomorphisme canonique
$$\mathrm{H}^r(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} C = \bigoplus_{i+j=r} \mathrm{H}^i(X_K, \Omega^j_{X_K}) \otimes_K C.$$
Voir par ex. le survey de M. Olsson [O09].

5. Appendice: preuve de la proposition 4.4

1. $\log_{\underline{G}} : \underline{G}(R_L) \to t_{\underline{G}}(L)$ *est un morphisme de $\mathbb{Z}_p$-modules topologiques bien défini et fonctoriel en $\underline{G}$.*

Supposons $\underline{G} = \underline{G}^0$. Commençons par observer que si
$$\Omega_\omega = \sum_{m \geq 1} \sum_{|\underline{\alpha}|=m} a_{\underline{\alpha}} \underline{X}^{\underline{\alpha}},$$
la condition $d\Omega_\omega = \omega$ implique:

- $d\Omega_\omega \in R[[\underline{X}]]$. En particulier, pour tout $\underline{\alpha} \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0}$ tel que $|\underline{\alpha}| = m$ on a $(*)$ $ma_{\underline{\alpha}} \in R$ donc $v(a_{\underline{\alpha}}) \geq -v(m)$. On en déduit que pour tout $\underline{x} \in \underline{G}(R_L)$
$$v(\sum_{|\underline{\alpha}|=m} a_{\underline{\alpha}} \underline{X}^{\underline{\alpha}}) \geq \inf_{|\underline{\alpha}|=m} \{m - v(m)\} \to +\infty$$
donc Ω_ω converge sur $\underline{G}(R_L)$. Cela montre que $\log_{\underline{G}}$ est bien défini et continu lorsque $\underline{G} = \underline{G}^0$ (Explicitement, si $\omega_1, \dots, \omega_d$ est une R-base de différentielles invariantes de $\omega_{A|R}$ et si on pose $\underline{\Omega} := (\Omega_{\omega_1}, \dots, \Omega_{\omega_d})$ alors $\log_{\underline{G}}$ s'identifie à
$$\log_{\underline{G}} : \underline{x} \to \underline{\Omega}(\underline{x})).$$
En général, l'invariance de ω et l'unicité de Ω_ω dans le lemme de Poincaré formel assure que $\log_{\underline{G}}(x)$ est bien défini indépendemment du choix de n_x.

- $d\Omega_\omega \in \omega_{A|R}$. En particulier $\Omega_\omega(F(\underline{X}, \underline{Y})) = \Omega_\omega(\underline{X}) + \Omega_\omega(\underline{Y})$ donc $\log_{\underline{G}} : \underline{G}(R_L) \to t_{\underline{G}}(L)$ est un morphisme de groupes continu donc de $\mathbb{Z}_p$-modules.

La fonctorialité en $\underline{G}$ résulte de l'unicité dans le lemme de Poincaré formel et du fait que les morphismes de groupes préservent les différentielles invariantes.

2. $\log_{\underline{G}} : \underline{G}(R_L) \to t_{\underline{G}}(L)$ *est un isomorphisme local.*

On peut supposer $\underline{G} = \underline{G}^0 = \underline{\Gamma}[p^\infty]$ pour $\Gamma = \mathrm{spf}(R[[\underline{X}]])$. Notons $A := R[[\underline{X}]]$. On va construire un inverse local continu de $\log_{\underline{G}}$. Choisissons une R-base de différentielles invariantes $\omega_1, \dots, \omega_d$ de $\omega_{A|R}$ permettant d'identifier $\log_{\underline{G}}$ à
$$\log_{\underline{G}} : \underline{x} \to \underline{\Omega}(\underline{x})$$
en posant comme ci-dessus $\underline{\Omega} := (\Omega_{\omega_1}, \dots, \Omega_{\omega_d})$.

Comme $\omega_1, \dots, \omega_d$ est aussi une A-base de $\Omega^f_{A|R}$, il existe $a_{i,j} \in A$, $1 \leq i, j \leq d$ tels que
$$\omega_i = \sum_{1 \leq j \leq d} a_{i,j} dX_j, \ i = 1, \dots, d$$
avec $\det(a_{i,j}) \in A^\times$ donc $\det(a_{i,j} \mathrm{mod} A^+) \in R^\times$. Quittes à faire un changement linéaire de coordonnées on peut donc supposer que $(a_{i,j} \mathrm{mod} A^+) = Id$ donc que
$$\Omega_{\omega_i} = X_i + \text{termes de degré supérieur}, \ i = 1, \dots, d.$$

Mais alors $d_0\log_{\underline{G}} = Id$ et par le théorème d'inversion locale [S06, p. 73], $\log_{\underline{G}} : \underline{G}(R_L) \to t_{\underline{G}}(L) \simeq L^d$ est un isomorphisme local.

3. $\ker(\log_{\underline{G}}) = \underline{G}(R_L)_{tors}$, $\mathrm{coker}(\log_{\underline{G}})$ *est de torsion.*

Comme $\log_{\underline{G}}$ est un morphisme de groupes et que $t_{\underline{G}}(L)$ est sans torsion, on a déjà $\underline{G}(R_L)_{tors} \subset \ker(\log_{\underline{G}})$. Inversement, pour tout $\underline{x} \in \underline{G}(R_L)$, il existe p^{n_x} tel que $p^{n_x}x \in \underline{G}^0(R_L)$ donc par l'exemple 4.3, on a toujours

$$p^n x \to 0$$

En particulier, si U et un voisinage ouvert de 0 sur lequel $\log_{\underline{G}}$ réalise un isomorphisme local, il existe $n_x \geq 0$ tel que $p^{n_x} \in U$ donc $0 = \log_{\underline{G}}(x) = \frac{1}{p^{n_x}}\log(p^{n_x}x)$ implique $p^{n_x}x = 0$ *i.e.* $x \in \underline{G}(R_L)_{tors}$.

Notons $V = \log_{\underline{G}}(U)$; c'est un ouvert de $t_{\underline{G}}(L) \simeq L^d$. En particulier, comme $p \in \mathfrak{m}_{R_L}$, pour tout $\underline{x} \in L^d$ il existe $n_x \geq 1$ tel que $p^{n_x}x \in V \subset \mathrm{im}(\log_{\underline{G}})$.

4. *Si R_L est de valuation discrète alors* $\mathrm{im}(\log_{\underline{G}})$ *est contenu dans un sous R_L-module de type fini de $t_{\underline{G}}(L)$. Si L est algébriquement clos alors* $\mathrm{im}(\log_{\underline{G}}) = t_{\underline{G}}(L)$.

Pour la première partie de l'assertion, il suffit d'observer que V contient un ouvert de la forme $V_0 = (\mathfrak{m}_{R_L}^n)^d \subset L^d \simeq t_{\underline{G}}(L)$; notons $U^0 := \log_{\underline{G}}^{-1}(V_0) \cap U \subset U$. Soit π une uniformisante de $\mathfrak{m}_{R_L}$ et $e_1, \cdots, e_d$ la base canonique de L^d. Alors, pour tout $\underline{x} \in \underline{G}(R_L)$, il existe $n_x \geq 0$ tel que $p^{n_x}x \in U_0$ donc

$$\log(p^{n_x}x) = \sum_{1\leq i\leq d} \lambda_i \pi^d e_i$$

ou encore

$$\log(x) = \sum_{1\leq i\leq d} \frac{\lambda_i}{p^{n_x}}\pi^d e_i \in \sum_{1\leq i\leq d} R_L\pi^d e_i.$$

Pour la deuxième partie de l'assertion, il suffit de montrer que lorsque L est algébriquement clos $\underline{G}(R_L)$ est p-divisible. On procède en trois étapes.

<u>Etape 1:</u> *La suite exacte connexe-étale induit encore une suite exacte courte*

$$0 \to \underline{G}^0(R_L) \to \underline{G}(R_L) \to \underline{G}^{et}(R_L) \to 0.$$

En effet, comme k est parfait, les suites exactes courtes

$$0 \to G_{nk}^0 \to G_{nk} \to G_{nk}^{et} \to 0$$

se scindent canoniquement *via* $s_n : G_{nk}^{et} \to G_{nk}$ identifiant G_{nk}^{et} à G_{nk}^{red}. Soit $x_n \in G_n^{et}(R_L)$ de reduction $x_{n,i} \in G_n^{et}(R_L/\mathfrak{m}_{R_L}^i)$, $i \geq 1$ et soit $y_{n,1} := s_n(x_{n,1}) \in G_n(k)$. Par lissité formelle de $G_n \to G_n^{et}$ on peut relever inductivement $y_{n,1}$ en $y_{n,i}$ au dessus de $x_{n,i}$. Comme R_L est complet, on obtient ainsi un R_L-point $y_n \in G_n(R_L)$ au-dessus de x_n. Cela montre que

$$\underline{G}(R_L) \supset \underline{G}(R_L)_{tors} = \varinjlim G_n(R_L) \twoheadrightarrow \varinjlim G_n^{et}(R_L) = \underline{G}_{tors}^{et}(R_L) = \underline{G}^{et}(R_L)$$

est surjective.

L'étape 1 permet de se limiter aux cas $\underline{G} = \underline{G}^0$ et $\underline{G} = \underline{G}^{et}$.

<u>Etape 2:</u> $\underline{G} = \underline{G}^{et}$.

Dans ce cas

$$\underline{G}(R_L) = \varinjlim G_n(k_L)$$

et, comme k_L est algébriquement clos, $G_n(k_L) = (\mathbb{Z}/p^n)^h$ donc

$$\underline{G}(R_L) \simeq (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^h$$

est de torsion.

<u>Etape 3:</u> $\underline{G} = \underline{G}^0 = \underline{\Gamma}[p^\infty]$ pour $\Gamma = \mathrm{spf}(R[[\underline{X}]])$. Notons $A := R[[\underline{X}]]$.

Dans ce cas, le problème revient à étendre $\psi : A \to R_L \in \mathrm{Hom}_{TopAlg_{/R}}$ en un morphisme continu

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\psi"'] & A \arrow[dl, dotted, "\tilde{\psi}"] \\ R_L & \end{tikzcd},$$

où $\phi : A := A(1) \to A$ est le morphisme correspondant à la multiplication par p sur A et fait de A un $A(1)$-module libre de rang p^h. En écrivant $A = A(1)[a_1, \ldots, a_r]$ avec $a_i \in A$ entier sur $A(1)[a_1, \ldots, a_{i-1}]$ de polynôme minimal $P_{a_i}(T) = T^{r_i} + \sum_{0\leq k\leq r_i-1} a_{i,k}T^k \in A(1)[a_1, \ldots, a_{i-1}][T]$, on peut étendre $\psi : A \to R_L$ en un morphisme $\tilde{\psi} : A \to \overline{L} = L$ (en envoyant a_1 sur une racine de $P^{\psi}_{a_1}(T) := T^{r_1} + \sum_{0\leq k\leq r_1-1} \psi(a_{1,k})T^k \in L[T]$ *etc.*). Par construction, l'image de $\tilde{\psi}$ est à valeur dans la cloture intégrale de R_L dans L *i.e.* R_L. On conclut en observant que l'image par $\tilde{\psi}$ des $X_1, \ldots, X_d \in A$ est alors automatiquement dans $\mathfrak{m}_{R_L}$.

References

[CL?] B. Conrad et M. Lieblich, *Galois representations arising from p-divisible groups.*

[dJ98] A. J. de Jong, *Homomorphisms of Barsotti-Tate groups and crystals in positive characteristic*, Invent. Math. **134**,1998, p. 301–333. *Erratum* : Invent. Math. **138**, 1999, p. 225.

[F77] J.-M. Fontaine, *Groupes p-divisibles sur les corps locaux*, Astérisque **47-48**, S.M.F., 1977.

[O09] M. Olsson, *On Faltings' method of almost étale extensions.* In "Algebraic Geometry - Seattle 2005", Proc. Sympos. in Pure Math. **80** Part 2, p. 811-936, A.M.S. 2009.

[S66] J.-P. Serre, *Groupes p-divisibles (d'aprs J. Tate)*, Séminaire Bourbaki (1966/1967), Vol. **10**, exposé no. 318, nov. 1966, SMF, 1995.

[S79] J.-P. Serre, *Représentations ℓ-adiques (Kyoto symposium on algebraic number theory)*, Japanese Society for the Promotion of Sciences, p.177–193, 1977.

[S06] J.-P. Serre, *Lie algebras and Lie groups (1964 Lectures given at Harvard University)*, L.N.M. **1500** (2nd Ed.), 2006.

[T67] J. Tate, *p-divisible groups*, Proc. of Conf. on Local fields (Driebergen, 1996), T. Springer ed., Springer-Verlag, 1967, p. 158–183.