SUR LA PREUVE DE FONTAINE-MESSING (EXP. VIII)

MAZZARI NICOLA

Résumé. Voici les notes de mon exposé sur le § III de l'article de Fontaine et Messing sur le périodes de représentations p-adiques.

1. La conjecture cristalline

Le but de cet exposé est de donner (l'esquisse de la) preuve donnée par Fontaine et Messing de la conjecture C_{cris} dans le cas de bonne réduction et base non ramifiée. Avant d'énoncer le résultat rappelle les notations (standard). Soit k un corps parfait de caractéristique p, K_0 le corps de fractions de l'anneau de vecteurs de Witt $W(k)$ et K/K_0 une extension finie. Si X est un K-schéma algébrique on peut considérer sa cohomologie étale p-adique

$$H^i_{\text{ét}}(X) := [\lim_n H^i_{\text{ét}}(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p^n)] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$$

qui est une représentation $\mathbb{Q}_p$-linéaire et continue de $\text{Gal}(\bar{K}/K)$. Puis si on suppose que X a un modèle $\mathcal{X}$ propre et lisse sur $\mathcal{O}_K$ (l'anneau des entiers de K) on peut définir la cohomologie cristalline

$$H^i_{\text{cris}}(X) := [\lim_n H^i_{\text{cris}}(\mathcal{X}_k/W_n(k))] \otimes_{W(k)} K_0$$

qui est un K_0-vectoriel de dimension finie muni d'un Frobenius σ-semi-linéaire (comme d'habitude σ est le Frobenius de $W(k)$). Grace a un théorème de Berthelot on a un isomorphisme canonique entre la cohomologie cristalline et la cohomologie de de Rham

$$H^i_{\text{cris}}(X) \otimes_{K_0} K \cong H^i_{\text{dR}}(X)$$

et ce dernier est muni de la filtration de Hodge.

Le théorème de comparaison cristallin est alors le suivant

Théorème 1. *Il existe un isomorphisme (dit des périodes cristallins)*

$$\rho_{\text{cris}} : \mathbb{B}_{\text{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^i_{\text{ét}}(X) \to \mathbb{B}_{\text{cris}} \otimes_{K_0} H^i_{\text{cris}}(X)$$

compatible avec toutes le structures : filtration, Frobenius, action galoisienne. Cet isomorphisme est fonctoriel en X propre lisse et à bonne réduction.

Fontaine et Messing ont prouvé ce théorème dans le cas non-ramifié (i.e. $K = K_0$) et en supposant que X soit admissible (courbe, variété abélienne, $\dim X < p$,..). D'après le théorème a été généralisé par plusieurs (Faltings, Niziol, Tsuji, Yamashita) et recemment Beilinson a donné une preuve alternative pour tous schéma algébrique (mais il faut bien donner une définition convenable $H^i_{\text{cris}}(X)$ et introduire des autres périodes).

Date: 8 janvier 2014.

2. Faisceaux syntomiques et cohomologie cristalline

Soit $\Sigma_m := \mathrm{Spec}(W_m(k))$, $m \in \mathbb{N} \cup \{\emptyset\}$. On rappelle que pour $n \leq m$ on a les faisceaux $\mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}$, $\mathcal{O}_n$, J_n sur le gros site syntomique $(\Sigma_m)_{\mathrm{SYN}}$: si Y/Σ_m on a

$$\mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}(Y) := H^0_{\mathrm{cris}}(Y_k/W_n), \qquad \mathcal{O}_n(Y) := \Gamma(Y_n, \mathcal{O}_{Y_n}) \quad (Y_n = Y \times \Sigma_n)$$

et $J_n := \ker(\mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}} \to \mathcal{O}_n)$. On note par $J^{[r]}$ la r-eme puissance divisée de l'idéal J. On sait (par Cedric) que si $r \leq p-1$ et $n + r \geq m$ on peut définir un morphisme $\phi_r : J^{[r]} \to \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}$ qui induise en cohomologie $x \mapsto \phi(x)/p^r$. On peut alors introduire la première version des faisceaux syntomiques

$$S_n(r) := \ker(\phi_r - \iota : J^{[r]} \to \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}})$$

où ι est l'inclusion.

Soit X/Σ propre et lisse et $\bar{X} := X \otimes \mathcal{O}_{\bar{K}}$, où $\bar{K}$ est une clôture algébrique de l'anneau de fractions de $W(k)$. On peut montrer que les groupes de cohomologie $H^*_{\mathrm{syn}}(\bar{X}_m, S_n(r))$ ne dépendent pas de $m \geq n$. Puis on on écrit

$$H^*_{\mathrm{syn}}(\bar{X}, S_*(r)) := \lim_n H^*_{\mathrm{syn}}(\bar{X}_n, S_n(r))$$

Théorème 2. *Supposons $i \leq r \leq p-1$ alors on a une suite exacte*

$$0 \to H^i_{\mathrm{syn}}(\bar{X}, S_*(r)) \otimes \mathbb{Q}_p \to F^r(\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}} \otimes_K H^i_{\mathrm{dR}}(X_K)) \xrightarrow{\phi/p^r - \mathrm{id}} \mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}} \otimes_K H^i_{\mathrm{dR}}(X_K) \to 0$$

3. Le site syntomique-étale

Comme avant $\Sigma = \mathrm{Spec}(W(k))$, puis on note par $\hat{\Sigma}$ le spectre formel de $W(k)$ et par $\eta = \mathrm{Spec}(K)$. On définit alors le site syntomique-étale $\Sigma_{\mathrm{syn\acute{e}t}}$ dont les objets sont donnés par des morphismes

$$\pi : U \to \Sigma$$

tel que π est *synet*, i.e. syntomique, quasi-fini et π_η est étale ; les recouvrement sont les familles surjectives de morphismes synet.

De la même façon on définit la topologie synet sur $\hat{\Sigma}$: dans ce cas un morphisme de schémas formels

$$\varpi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$$

est dit synet si ϖ_{Σ_n} est syntomique pour tout n, ϖ est quasi-fini et ϖ_η est étale (dans le sens de la géométrie rigide).

Théorème 3. *Il existe des morphismes de sites*

$$\hat{\Sigma}_{\mathrm{syn\acute{e}t}} \xrightarrow{i} \Sigma_{\mathrm{syn\acute{e}t}} \xleftarrow{j} \eta_{\mathrm{\acute{e}t}}$$

qui induisent une équivalence entre la catégorie de faisceaux sur $\Sigma_{\mathrm{syn\acute{e}t}}$ et la catégorie qui a par objets les triples (A, B, α) tel que A (resp. B) est un faisceau sur $\hat{\Sigma}_{\mathrm{syn\acute{e}t}}$ (resp. $\eta_{\mathrm{\acute{e}t}}$) et $\alpha : A \to i^* j_* B$: si M est un faisceau $\Sigma_{\mathrm{syn\acute{e}t}}$ on lui associe la triple $(i^*M, j * M, \alpha)$, dont α l'image inverse par i de l'adjonction $M \to j_* j^* M$.

Puis on a une suite exacte de localisation

$$0 \to j_! j^* M \to M \to i_* i^* M \to 0 \ .$$

Démonstration. (Le morphisme j) Tout ouvert étale $U \to \eta$ est aussi un ouvert synet $U \to \Sigma$ par composition avec la flèche naturelle $\eta \to \Sigma$. Cela induise une application continue de sites j : on a

$$j^* M(U) = M(U) \quad j_* A(V) = \operatorname*{colim}_{V_\eta \subset U} A(U) \ .$$

(Le morphisme i) Soit B un faisceau sur $\hat{\Sigma}_{\mathrm{syn\acute{e}t}}$ et $\pi : U \to \Sigma$ un ouvert synet, alors si on prend le complété p-adique on obtient un morphisme syntet de schémas formels $\hat{\pi} : \hat{U} \to \hat{\Sigma}$ et donc on peut définir $i_* B(U) := B(\hat{U})$. Pour définir l'image inverse on a besoin d'un résultat d'algébrisation

Lemme 3.1. *Soit $\varpi : \mathcal{U} \to \hat{\Sigma}$ un ouvert synet (formel), alors il existe $\pi : U \to \Sigma$ synet (algébrique) tel que $\varpi = \hat{\pi}$. Le morphisme π n'est pas unique mais l'heselianisation de U ne dépend que de $\mathcal{U}$.*

Avec les notations du lemme soit T le système inductive donné par les $U' \in \Sigma_{\text{synét}}$ tel que il y a un morphisme étale $U' \to U$ et $\hat{U}' = \hat{U} = \mathcal{U}$. Alor on peut définir $i^* M$ comme le faisceau associé au prefaisceau

$$\mathcal{U} \mapsto \operatorname*{colim}_T M(U') \ .$$

(Recollement) On note que l'union disjointe $U' \sqcup U_\eta$ est un recouvrement synet de U et donc on a un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[d] & j_* j^* M \arrow[d] \\ i_* i^* M \arrow[r] & i_* i^* j_* j^* M \end{tikzcd}$$

et on peut terminer la preuve. □

4. Les faisceaux syntomique-étale

Soit X/Σ propre et lisse et $\bar{X} := X \otimes \mathcal{O}_{\bar{K}}$. On peut utiliser le théorème précédente (mutatis mutandis pour passer de Σ à X) pour définir un faisceau $\mathscr{S}_n(r)$ sur $\bar{X}_{\text{synét}}$ tel que

$$i^* \mathscr{S}_n(r) = S_n(r) \qquad j^* \mathscr{S}_n(r) = (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})(r) \ .$$

En effet le site syntomique est conçu pour avoir un tel faisceau lié à la fois à la cohomologie cristalline et la cohomologie étale.

Or c'est ne pas du tout facile construire la flèche $S_n(r) \to i * j_*(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})(r)$ et on en donnera pas le détails ici. Cela dit supposons d'avoir bien construit les faisceaux syntomique-étale $\mathscr{S}_n(r)$.

Théorème 4. *Soit $r \geq \inf\{i, \text{longueur de la filtration de Hodge}\}$, alors on a un isomorphisme de représentations galoisiennes*

$$V_{\text{cris}}(H^i_{\text{dR}}(X_K)(r)) := F^r(\mathbb{B}_{\text{cris}} \otimes_K H^i_{\text{dR}}(X_K))^{\phi = p^i} \cong H^i_{\text{ét}}(X_K)(r) \ .$$

Démonstration. En utilisant les adjonctions du carré cartésien précédente on obtient le diagramme suivant

$$H^i(\hat{\bar{X}}_{\text{synét}}, S_*(r)) \otimes \mathbb{Q}_p \xleftarrow{a} H^i(\bar{X}_{\text{synét}}, \mathscr{S}_*(r)) \otimes \mathbb{Q}_p \xrightarrow{b} H^i(X_{\bar{K},\text{ét}}, \mathbb{Q}_p(r))$$

et si on montre que (après tensorisation pas $\mathbb{Q}_p$) a et b sont des isomorphismes on obtient le théorème de comparaison cristallin : en effet l'hypothèse sur r sert pour avoir l'égalité suivante

$$F^r(\mathbb{B}^+_{\text{cris}} \otimes_K H^i_{\text{dR}}(X_K))^{\phi = p^i} = F^r(\mathbb{B}_{\text{cris}} \otimes_K H^i_{\text{dR}}(X_K))^{\phi = p^i} \ ,$$

donc par Thr. 2 on a $H^i(\hat{\bar{X}}_{\text{synét}}, S_*(r)) \otimes \mathbb{Q}_p \cong V_{\text{cris}}(H^i_{\text{dR}}(X_K)(r))$.

(a est iso) Par localisation on se ramène à montrer que $H^i(\bar{X}_{\text{synét}}, j_! \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) = 0$. Puis le groupe $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ donne un faisceau sur $\bar{X}_{\text{synét}}$ associé à un schéma en groupe qui on peut dévisser

$$0 \to j_!(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})_{X_{\bar{K},\text{ét}}} \to (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})_{\bar{X}_{\text{synét}}} \to i_*(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})_{\hat{\bar{X}}_{\text{synét}}} \to 0 \ .$$

Or la topologie synet est comprise entre la topologie plate et la topologie étale et l'annulation qu'on cherche est équivalente à l'isomorphisme

$$g : H^i(\bar{X}_\tau, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \to H^i(X_{\bar{K},\tau}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

pour n'importe quel τ (et donc pour toutes grâce à un théorème de Grothendieck) parmi $\{\text{synét}, \text{ét}, \text{pl}\}$. En utilisant la topologie étale on obtient que g est un isomorphisme pour changement de base propre.

(b est iso) On sait (???) que $V_{\text{cris}}(H^i_{\text{dR}}(X_K)(r))$ et $H^i_{\text{ét}}(X_K)(r)$ ont la même dimension, donc il suffit de montrer que b est injective. On utilise alors un argument standard pour le comparaison de deux cohomologie : comme b est compatible avec la dualité de Poincaré[1] il suffit de montrer que b est un isomorphisme pour $i = 2\dim X$; pour ce cas il faut montrer que le classes de Chern (syntomique et étale) sont compatibles, c'set à dire comparer la suite de Kummer avec la suite exponentielle (cristalline).

$\square$

Institut de Mathématiques de Bordeaux - 351, cours de la Libération - F 33405 TALENCE cedex

E-mail address: nicola.mazzari@math.u-bordeaux1.fr

1. Il faut le montrer, et il ne me semble pas clair.