Sur la théorie de BK, III

k parfait

$W = W(k)$, $K_0 = \mathrm{Frac}(W)$, $\sigma : K_0 \circlearrowleft$, K/K_0 tot. ramifiée

$e = [K:K_0]$, $\pi \in \mathcal{O}_K$, $E(u) = \mathrm{polmin}_{K_0}(u) \in W[u]$.

$\mathfrak{S} = W[[u]]$

$\mathcal{O}_{\mathcal{E}} = \widehat{\mathfrak{S}[1/u]}^{p\text{-ad.}}$ $\quad \mathcal{E} = \mathrm{Frac}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$

$R = \varprojlim \mathcal{O}_{\bar K}/p\mathcal{O}_{\bar K} \ni \underline{\pi} = (\pi_n) \quad \pi_{n+1}^p = \pi_n \quad \pi_0 = \pi$

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{S} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & W(R) \arrow[d, hook] \\ \mathcal{E} \arrow[r, hook] & W(\mathrm{Fr}\, R) \end{tikzcd} \qquad u \mapsto [\underline{\pi}]$$

$\mathcal{E}^{ur} \subset W(\mathrm{Fr}\, R)[1/p]$ ext. non ram. maximale.

$\mathrm{Fr}\, R$ alg clos ; $\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{ur}}/p\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{ur}} \simeq k((u))^{sep}$.

$\widehat{\mathcal{E}^{ur}}$ = complété p-adique.

$\mathfrak{S}^{ur} = \mathcal{O}_{\mathcal{E}^{ur}} \cap W(R)$ $\qquad$ $\mathfrak{M}$:= \mathfrak{M}

$\widehat{\mathfrak{S}^{ur}} = \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{ur}}} \cap W(R)$

$BT(\mathcal{O}_K)$; $G \in BT(\mathcal{O}_K) \rightsquigarrow T_p(G) = \varprojlim_n G[p^n](\bar K) \curvearrowleft G_K$

$BT^{\varphi}_{/\mathfrak{S}}$ = $\mathfrak{S}$-modules $\mathfrak{M}$ loc. libres finis avec $\varphi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ σ-lin

tq $\varphi^*\mathfrak{M} \xrightarrow[1\otimes\varphi]{} \mathfrak{M}$ a un coker tué par $E(u)$

<u>th</u> $\forall G \in BT(\mathcal{O}_K)$ $\exists\, \mathfrak{M} \in BT^{\varphi}_{/\mathfrak{S}}$ déterminé à iso can. près et fonctoriel en $\mathfrak{M}$ tq $T_p(G) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S},\varphi}(\mathfrak{M}, \widehat{\mathfrak{S}^{ur}})$.

D'abord on regarde $V_p(G) = T_p(G) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ $\qquad$ (de dim $h = ht(G)$).

<u>Prop</u> $V_p(G)$ est une rep gal. cristalline à poids de HT $\in \{0,1\}$.

Rem les poids de HT d'une rep V sont les $i \in \mathbb{Z}$ tq $(V \otimes C_K(i))^{G_K} \neq 0$
les poids de HT d'un (φ, N)-module filtré D sont les $i \in \mathbb{Z}$ tq $gr^i D \neq 0$. Si $D = D_{st}(V)$ c'est compatible.

Preuve : ~~Fontaine et~~ Tate 1967 $\to$ §4 cor 2. mq $V_p(G)$ est de HT à poids $\{0,1\}$ et Fontaine 1982 mq $V_p(G)$ cristalline $\boxtimes$

Alors $D_{cris}(V_p(G))$ sera un φ-module filtré admissible (faiblement) à poids dans $\{0,1\}$; notons $MF_K^{BT,f.a}$ la cat des tels objets.
Tate (cf Serre Bbki) : $V_p(G) \otimes C \simeq t_G \otimes C(1) \oplus \mathrm{Hom}(t_{G'}, C)$ poids 1 et 0 !

<u>Th</u> (Kisin) Il existe une éq. de catégories :

$$\begin{tikzcd}
MF_K^{BT,fa} \arrow[rrr, dotted, "{[Ki, 2.2.2]}"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & & & BT^{\varphi}_{/\mathfrak{S}} \otimes \mathbb{Q} \arrow[d, phantom, "\cap"] \\
MF_K^{(\varphi,N)\geq 0, fa} \arrow[r, "{(1.3.8)}", "\sim"'] \arrow[d, phantom, "\cap"] & \mathrm{Mod}_{/\mathcal{O}}^{\varphi, N_\nabla, 0} \arrow[r, hook, "{(1.3.10)}"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & \mathrm{Mod}_{/\mathcal{O}}^{\varphi, N, 0} \arrow[r, "{(1.3.13)}", "\sim"'] & \mathrm{Mod}_{/\mathfrak{S}}^{\varphi, N} \otimes \mathbb{Q} \\
MF_K^{(\varphi,N),\geq 0} \arrow[r, shift left, "{(1.2.15)}", "\mathcal{M} \, \sim"'] & \mathrm{Mod}_{/\mathcal{O}}^{\varphi, N_\nabla} \arrow[l, shift left, "D \ (N=0)"] & \mathcal{M} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathcal{O} & \mathcal{M} \arrow[l, mapsto]
\end{tikzcd}$$

Commentaires :

1) je simplifie le dessin : il y a aussi des catégories intermédiaires de modules sur les anneaux de Robba $\mathcal{R}, \mathcal{R}^b$.

2) on va décrire $\mathcal{O}$ et (1.2.15)

3) Cela conclut le théorème ainsi : à $D_{cris}(V_p(G)) \in MF_K^{BT,fa}$ correspond un $\mathfrak{M}_0 \in BT^{\varphi}_{/\mathfrak{S}} \otimes \mathbb{Q}_p$ ie un objet de $BT^{\varphi}_{/\mathfrak{S}}$ à p-isogénie près. Par Kisin Lm 2.1.15, pour $\mathfrak{M}_0$,

au réseau $L = T_p(G)$ dans ~~[illegible]~~ $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O},\varphi}(M_0, \widehat{\mathcal{O}^{ur}}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$

correspond un $\mathfrak{M} \subset \underbrace{M_0 \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E}}$ qui est ~~celui~~ recherché.

↳ indép de la classe de p-isogénie de M_0

Modules sur $\mathcal{O}$

Références : Kedlaya ; Perez-Garcia & Schikhof.

Soit $r > 0$.

$$\mathcal{O}_{[0,r]} = \underset{\uparrow |t| \leq r}{K\langle r^{-1}t\rangle} = \left\{ f = \sum_{i \geq 0} c_i t^i ,\ \lim_{i \to \infty} |c_i| r^i = 0 \right\}$$

Banach pour $|f|_r = \sup |c_i| r^i$. Noeth. régulier factoriel

$\cap$ fonctions sur $D[0,r]$

$$\mathcal{O}^b_{[0,r[} = K[\![r^{-1}t]\!]_0 = \left\{ f = \sum_{i \geq 0} c_i t^i ,\ \sup |c_i| r^i < \infty \right\}$$

Banach pour $|\cdot|_r$. ⚠ pas ~~borné~~ noeth si v_K non discrète !

fonctions bornées sur $D[0,r[$

$\cap$

$$\mathcal{O}_{[0,r[} = \underset{\uparrow |t| < r}{K\{r^{-1}t\}} = \left\{ f = \sum c_i t^i ,\ \lim_{i \to \infty} |c_i| s^i = 0 \quad \forall s < r \right\} = \bigcap_{s < r} K\langle s^{-1}t\rangle$$

Fréchet pour la famille $\{|\cdot|_s\}_{s<r}$ (pas Banach !)

Topologie = celle déf par les $|\cdot|_s$ = conv uniforme sur tous les $D[0,s]$ (compacts)

fonctions sur $D[0,1[$

$$\mathcal{O}^{b \text{ à droite}}_{(q,r)} = K\{qt^{-1}, r^{-1}t]\!]_0 = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{Z}} c_i t^i ,\ \begin{array}{l} \lim_{i \to -\infty} |c_i| s^i = 0 \quad \forall s > q \\ \sup_{i \geq 0} |c_i| r^i < \infty \end{array} \right\}$$

$\mathcal{R} = \lim_{r \to 1^-} \mathcal{O}_{(r,1)}$ germes de fn au voisinage ouvert du cercle de rayon 1

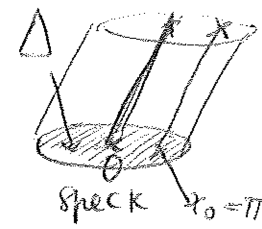
$\mathcal{R}^b = \lim_{r \to 1^-} \mathcal{O}^b_{(r,1)}$ germes bornés.

Les anneaux $\mathcal{O}_I$, I intervalle $\subset [0,1]$, sont de Bézout i.e. tout idéal de type fini est principal; les modules TF se comportent un peu comme sur un anneau principal (dû à Lazard 1962). (4)

La catégorie $\mathrm{Mod}_{/\mathcal{O}}^{\varphi, N_\nabla}$ [Idées de Berger + Kisin]

les modules filtrés sur K sont des modules cohérents sur Spec(K) (avec structures). On va étendre ces modules cohérents en des modules cohérents sur le disque p-adique ouvert $\Delta = D[0,1)$

Notons u ~~un~~ paramètre de Δ ; alors on aura des déformations des modules filtrés (obtenus en $u=0$) de param. u.



$$\mathcal{O} := \mathcal{O}_{[0,1)} = K\{u\} = \{ f = \sum_{i \geq 0} c_i u^i ,\ |c_i| r^i \xrightarrow[i \to \infty]{} 0 \ \forall r < 1 \}$$

Les déformations auront un φ_u = déformation de φ, et un $N_u = N_\nabla$ = déformation de N ; et φ_u ne sera p.ê plus bijectif en certains points, et N vérifiera une déformation de l'égalité $N\varphi = p\varphi N$. Le jeu est ensuite de contrôler ces singularités.

On pose $\mathcal{O} := \mathcal{O}_{[0,1)} = \{ f = \sum_{i \geq 0} c_i t^i ,\ |c_i| r^i \to 0 \quad \forall r < 1 \}$

Voyons son Frobenius. Soit $I \subset [0,1)$ un intervalle et $\mathcal{O}_I$ l'anneau de fn sur la couronne associée.

On a $\varphi : \mathcal{O}_I \to \mathcal{O}_{\sqrt[p]{I}}$ $\qquad \sqrt[p]{I} = \{ \sqrt[p]{r} ,\ r \in I \}$

qui est $u \mapsto u^p$ et $\varphi_{|K} = \sigma$ sur les coefficients.

Pour $I = [0,1)$, ça fait $\varphi : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$.

En effet si $f = \sum_{i\geq 0} c_i t^i$ on a

$$\varphi(f) = \sum_{i\geq 0} \varphi(c_i) t^{ip} = \sum_{i\geq 0} c_i' t^i \quad \text{avec } c_i' = \begin{cases} 0 & \text{si } p \nmid i \\ \varphi(c_{i/p}) & \text{sinon} \end{cases}$$

donc $|c_i'| r^{i/p} \leq |c_{i/p}| r^{i/p} \to 0$ si $|c_i| r^i \to 0$.

(5)

Soit $c_0 = E(0)$, alors $\frac{E(u)}{c_0} = 1 + \ldots$ suffit à mq

$$\lambda := \prod_{n=0}^{\infty} \varphi^n\left(\frac{E(u)}{c_0}\right) \quad \text{converge } \left(\begin{array}{c}\text{normalement sur les} \\ \text{compacts...}\end{array}\right)$$

dans $\mathcal{O}$.

On définit une dérivation (monodromie)

$$N_\nabla : \mathcal{O} \to \mathcal{O}, \quad N_\nabla := -u\lambda \frac{d}{du}$$

Il paraît qu'il faut penser à λ comme à un analogue du logarithme p-adique (cf Brinon-Conrad, § 10.1) :

pour $\begin{cases} E(u) = (u+1)^p - 1 = \Phi_p(u+1), \ \pi = \zeta_p - 1, \\ \varphi_{\mathcal{O}}(u) = (u+1)^p - 1 \end{cases}$ (cas cyclotomique)

on obtient $\lambda = \frac{\log(1+u)}{u}$

On vérifie que $N_\nabla \varphi = p \frac{E(u)}{c_0} \varphi N_\nabla$

Si $u = 0$, on a la relation habituelle $N_\nabla \varphi = p \varphi N_\nabla$.

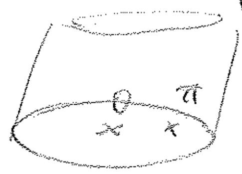
<u>Déf</u> $\mathrm{Mod}_{/\mathcal{O}}^{\varphi, N_\nabla}$ a pour objets les $\mathcal{O}$-modules $\mathcal{M}$ finis libres, munis d'une appl. $\varphi = \varphi_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ $\underset{\varphi_{\mathcal{O}}}{\varphi\text{-linéaire}}$, avec un opérateur diff $N_\nabla^{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ au-dessus de N_∇ :

$$\forall f \in \mathcal{O}, m \in \mathcal{M} : \quad N_\nabla^{\mathcal{M}}(fm) = N_\nabla(f) m + f N_\nabla^{\mathcal{M}}(m).$$

tq $N_\nabla^{\mathcal{M}} \varphi = p \frac{E(u)}{c_0} \varphi N_\nabla^{\mathcal{M}}$,

et de E-hauteur finie ie $\mathrm{coker}(\varphi^* \mathcal{M} \to \mathcal{M})$ tué par une puissance $E(u)^n$, $n \geq 1$.

Rem 1) $E(u)$ correspond au point $\pi\in \mathbb{D}[0,1)$



et la condition sur coker dit qu'il est supporté sur π ~~si~~ ou un n-épaississement donc hors de π, $\varphi^*\mathcal{M}\to\mathcal{M}$ est un iso. 6

2) Pour les BT on a $N_\nabla^{\mathcal{M}}=0$ et $n=1$ ie $\mathrm{coker}(\varphi^*\mathcal{M}\to\mathcal{M})$ tué par $E(u)$ ie le support est sur π et pas un épaississement.

On va terminer en "définissant" $MF_K^{(\varphi,N),\geq 0} \underset{D}{\overset{\mathcal{M}}{\rightleftarrows}} \mathrm{Mod}_{/\mathcal{O}}^{\varphi,N_\nabla}$

$D : \mathrm{Mod}_{/\mathcal{O}}^{\varphi,N_\nabla} \longrightarrow MF_K^{(\varphi,N),\geq 0}$ c'est juste $u=0$:

$(\mathcal{M},\varphi,N_\nabla^{\mathcal{M}}) \longmapsto (D=\mathcal{M}/u\mathcal{M},\ \varphi$ induit, $N_\nabla^{\mathcal{M}}$ mod u, Fil$)$

pour la filtration on tire un joker ie on ne la définit pas.

$\mathcal{M} : MF_K^{(\varphi,N),\geq 0} \longrightarrow \mathrm{Mod}_{/\mathcal{O}}^{\varphi,N_\nabla}$

$D\mapsto \mathcal{M}(D)$ sera un "sous-module cohérent" du module trivial $D\otimes_{K_0}\mathcal{O}$

[Je triche un peu : je ne le définis que si $N=0$ ie dans le cas cristallin.]

Posons $\widehat{\mathcal{O}}_n = \widehat{(K_{n+1}\otimes_W \mathcal{O})}_{(u-\pi_n)} \simeq K_{n+1}[[u-\pi_n]]$

"germes de fonctions au point $\pi_n\in \mathbb{D}[0,1)$"

On a des "évaluations" $\iota_n : \mathcal{O}\otimes_{K_0} D \longrightarrow \widehat{\mathcal{O}}_n\otimes_K D_K$

[je triche un peu : cf Kisin, § 1.2]

et on pose :

$$\mathcal{M}(D)=\left\{ f\in \mathcal{O}[1/\lambda]\otimes_{K_0} D\ ;\ \iota_n(f)\in \mathrm{Fil}^0\left(\widehat{\mathcal{O}}_n\left[\tfrac{1}{u-\pi_n}\right]\otimes_K D_K\right)\ \forall n\geq 0\right\}$$

les sections de $\mathcal{M}(D)$ sont donc les sections du "module trivial" $\mathcal{O}[\frac{1}{\lambda}] \underset{K_0}{\otimes} D$ dont les valeurs en les π_n tombent dans le $\mathrm{Fil}^0(D_K)$.

<u>th</u> Alors Kisin 1.2.15 dit que $\mathcal{M}, D$ sont des foncteurs quasi-inverses l'un de l'autre.