Rencontre ARIVAF 4

Exposé (2) : Catégories dérivées

Les principales références utilisées pour préparer cet exposé sont [Ill90], [Ver96], [Lip09], [KS94], [Wei94], [Wil] auxquelles nous renvoyons pour la plupart des démonstrations (en particulier [Wei94] et [KS94]). On prendra garde toutefois que certaines conventions (chaînes ou cochaînes, choix des signes) sont parfois différentes d'un document à l'autre.

1. Quelques rappels sur les complexes dans une catégorie abélienne

1.1. Rappels sur les catégories abéliennes.

Définition 1.1 (Catégorie additive)**.** *Une catégorie $\mathcal{A}$ est dite additive si*

i) pour tous objets A, B de $\mathcal{A}$ l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$ est muni d'une structure de groupe de sorte que la composition est distributive ;

ii) $\mathcal{A}$ possède un objet nul (i.e. un objet initial et terminal) et des produits ;

Un exemple de catégorie additive est la catégorie des groupes (non nécessairement commutatif). Ce n'est pas une catégorie abélienne car les quotients (conoyau) n'existe pas dans cette catégorie.

Définition 1.2 (Catégorie abélienne)**.** *Une catégorie additive $\mathcal{A}$ est dite abélienne si*

i) tout morphisme de $\mathcal{A}$ possède noyau et conoyau ;

ii) tout monomorphisme est le noyau de son conoyau (on ajoute une condition d'universalité) ;

iii) tout épimorphisme est le conoyau de son noyau.

Le prototype de catégorie abélienne est la catégorie R-mod des R-modules pour un anneau fixé R. Parmi ceux qui nous intéresserons, citons de plus la catégorie des faisceaux cohérents sur un schéma, ou la catégorie des faisceaux sur un site.

1.2. Complexes.

Définition 1.3 (Complexe)**.** *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, un complexe L de $\mathcal{A}$ est un couple composé d'une suite $(L^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'objets de $\mathcal{A}$ et d'une suite de morphisme $d^n \colon L^n \to L^{n+1}$ appelés différentielles, telles que $d^{n+1} \circ d^n = 0$.*
Un morphisme de complexes est une suite de morphismes qui commutent avec les différentielles.

On définit ainsi la catégorie $C(\mathcal{A})$ des complexes de $\mathcal{A}$, et on montre que c'est une catégorie abélienne. Cette catégorie possède plusieurs sous-catégories pleines intéressantes, chacune étant également abélienne

- la catégorie $C^b(\mathcal{A})$ des complexes bornés dont les objets sont les complexes L tels que $L^n = 0$ si $|n| \gg 0$,

- la catégorie $C^+(\mathcal{A})$ (resp. $C^-(\mathcal{A})$) des complexes bornés inférieurement (resp. supérieurement) dont les objets sont les complexes L tels que $L^n = 0$ si $n \ll 0$ (resp. si $n \gg 0$) ,
- la catégorie dont les objets sont les complexes concentrés en degré 0, et qui est naturellement isomorphe à la catégorie $\mathcal{A}$.

Définition 1.4 (Décalage)**.** *Pour tout entier k, on définit le foncteur* décalage de degré *k par $L[k]^n = L^{n+k}$ et $d^n_{[k]} = (-1)^k d^n$. Les morphismes étant simplement décalés pour assurer la compatibilité.*

Définition 1.5 (Homologie d'un complexe)**.** *À tout complexe L on peut associer la suite d'éléments de $\mathcal{A}$ définit par $\mathrm{H}^n(L) = \ker d^n / \operatorname{Im} d^{n-1}$. En particulier, on trouve que $\mathrm{H}^{n+p}(L) = \mathrm{H}^n(L[p])$.*
D'autre part, si $f \colon L \to M$ est un morphisme de complexes, on en déduit des morphismes $\mathrm{H}^n(f) \colon \mathrm{H}^n(L) \to \mathrm{H}^n(M)$, faisant ainsi de H^n un foncteur $\mathcal{C}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$.

Un complexe est dit exact si, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\operatorname{Im} d_{n-1} = \ker d_n$. Il s'ensuit qu'un complexe est exact si et seulement si son homologie est nulle.
Étant donné une suite exacte courte de complexes

$$0 \to L \to M \to N \to 0,$$

on a une suite exacte longue de cohomologie

$$\cdots \to H^{n-1}(N) \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^n(L) \to \mathrm{H}^n(M) \to \mathrm{H}^n(N) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(L) \to \cdots$$

où δ est l'habituel homomorphisme de bord obtenu en chassant les diagrammes.

2. La catégorie $K(\mathcal{A})$

2.1. Mapping-cone.

Définition 2.1 (Mapping-cone)**.** *Soit $f \colon L \to M$ un morphisme de complexe. Le* mapping-cone *de f est le complexe* $\operatorname{cone}(f)$ *dont le terme de degré n est $L^{n+1} \oplus M^n$ et les différentielles sont données par $d(a, b) = (-d(a), d(b) + f(a))$.*

Cette construction sera essentielle pour la suite car elle est destinée à remplacer les suites exactes courtes : étant donné un tel morphisme, on a automatiquement une suite exacte courte

$$0 \to M \to \operatorname{cone}(f) \to L[1] \to 0$$

(les morphismes étant les morphismes évidents d'inclusion et de projection). Par suite, on trouve une suite exacte longue de cohomologie

$$\cdots \to \mathrm{H}^{n-1}(\operatorname{cone}(f)) \to \underbrace{\mathrm{H}^{n-1}(L[1])}_{\mathrm{H}^n(L)} \underbrace{\to}_{\mathrm{H}^n(f)} \mathrm{H}^n(M) \to \mathrm{H}^n(\operatorname{cone}(f)) \to \cdots$$

l'identification de $\mathrm{H}^n(f)$ étant *relativement* directe.

Un morphisme de complexes $f\colon L \to M$ est appelé quasi-isomorphisme si $\mathrm{H}^n(f)$ est un isomorphisme pour tout n.

La construction précédente montre que f est un quasi-isomorphisme si et seulement si le complexe $\mathrm{cone}(f)$ est exact.

2.2. **Homotopie.**

Définition 2.2 (Homotopie)**.** *Deux morphismes $f, g\colon L \to M$ sont dits homotopes s'il existe des applications $s^n\colon L^n \to M^{n-1}$ tel que $f - g = ds^n + s^{n+1}d$.*

Un morphisme $f\colon L \to M$ est appelé homotopisme s'il existe un morphisme $g\colon M \to L$ tel que gf et fg soient tous deux homotopes à l'identité.

Lemme 2.3. *Si f et g sont homotopes, alors ils induisent le même morphisme $\mathrm{H}^n(L) \to \mathrm{H}^n(M)$.*

En particulier, un homotopisme est un quasi-isomorphisme.

Preuve : On a $\mathrm{H}^n(f-g) = 0$, ce qui implique le résultat car H^n est additif. □

Exemple 2.4 (Cône de l'identité)**.** *Considérons le morphisme $Id\colon L \to L$. Alors le morphisme $\mathrm{cone}(Id) \to 0$ est un homotopisme. En effet considérons les applications $s^n(a, b) = (b, 0)$. On a*

$$\begin{aligned}(ds + sd)(a, b) = ds(a, b) + sd(a, b) &= d(b, 0) + s(-da, db + a)\\ &= (-db, b) + (db + a, 0) = (a, b)\end{aligned}$$

Il s'ensuit que l'identité est homotope à 0.

Exemple 2.5 (fondamental d'homotopisme)**.** *Considérons une application $f\colon L \to M$ et notons $v\colon M \to \mathrm{cone}(f)$ l'inclusion naturelle. En particulier, on a $\mathrm{cone}(v)^n = M^{n+1} \oplus \big(L^{n+1} \oplus M^n\big)$, la différentielle étant donnée par*

$$d\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_M(a)\\ d_{\mathrm{cone}(f)}(b, c)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0\\ v(a)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_M a\\ -d_L b\\ d_M c + a + f(b)\end{pmatrix}$$

Considérons la projection $h\colon \mathrm{cone}(v) \to L[1]$ et le morphisme $g\colon L[1] \to \mathrm{cone}(v)$ donné par $g(b) = (-f(b), b, 0)$.

On voit alors que $hg = Id$ et que $(Id - gh)(a, b, c) = (a + f(b), 0, c)$ et nous souhaitons montrer que cette dernière est homotope à l'application nulle. Pour cela, considérons les applications $s^n\colon \mathrm{cone}(v)^n \to \mathrm{cone}(v)^{n-1}$ définies par $s^n(a, b, c) = (c, 0, 0)$. En particulier, on trouve que

$$(ds{+}sd)\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} c\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -d_M a\\ -d_L b\\ d_M c + a + f(b)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_M c\\ 0\\ c\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_M c + a + f(b)\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

On trouve ainsi que $L[1]$ et $\mathrm{cone}(v)$ sont homotopes.

En particulier, avec les notations ci-dessus, on a un diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} M & \xrightarrow{v} & \mathrm{cone}(f) & \longrightarrow & L[1] & \xrightarrow{f} & M[1] \\ \downarrow{\scriptstyle Id} & \boxed{1} & \downarrow{\scriptstyle Id} & \boxed{2} & \downarrow{\scriptstyle g} & \boxed{3} & \downarrow{\scriptstyle Id} \\ M & \xrightarrow{v} & \mathrm{cone}(f) & \longrightarrow & \mathrm{cone}(v) & \longrightarrow & M[1] \end{array} \tag{2.1}$$

les carrés $\boxed{1}$ et $\boxed{3}$ étant commutatifs, et le carré $\boxed{2}$ ne l'étant qu'à homotopie près (i.e. les deux chemins sont homotopes, pour le montrer, on utilise h qui est l'inverse de g à homotopie près) et g étant un homotopisme.

On peut voir de plus que g n'est pas le seul morphisme qui permette d'avoir cette propriété (cf. la partie sur les catégories triangulées).

Lemme 2.6. *Pour tous complexes L, M, N, le sous-ensemble de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(L, M)$ des éléments homotope à 0 est un sous-groupe et la composition à droite où à gauche d'un tel élément par un morphisme de complexe donne un élément homotope à 0.*

Preuve : La première propriété est évidente. Pour ce qui est de la deuxième, on a

$$(sd + ds)f = sdf + d(fs) = (sf)d + d(fs)$$

et de même pour la composition à gauche. □

2.3. **Construction de la catégorie $K(\mathcal{A})$.** Une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ étant donnée, nous noterons $K(\mathcal{A})$ la catégorie dont les objets sont ceux de $C(\mathcal{A})$ et les morphismes sont les $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(A)}(L, M)/\sim$, le quotient étant pris pour la relation définie par le sous-groupe des éléments homotopes à 0. Le lemme ci-dessus permet de voir que $K(\mathcal{A})$ est bien une catégorie et on montre aisément que c'est une catégorie additive. Toutefois, nous verrons que ce n'est pas une catégorie abélienne en général.

Si f et g sont deux morphismes de complexes qui sont homotopes, on a vu que $\mathrm{H}^n(f)$ et $\mathrm{H}^n(g)$ sont égaux. Il s'ensuit que $K(\mathcal{A})$ hérite de foncteurs

$$\mathrm{H}^n \colon K(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}.$$

Il permet en outre de voir que la composition $\mathcal{A} \to C(\mathcal{A}) \to K(\mathcal{A})$ fait de $\mathcal{A}$ une sous-catégorie pleine de $K(\mathcal{A})$.

D'autre part, le diagramme (2.1) est commutatif dans $K(\mathcal{A})$, ce qui n'était pas le cas dans $C(\mathcal{A})$.

Définition 2.7 (Triangle distingué)**.** *Un* triangle *dans $K(\mathcal{A})$ est une suite de morphisme $L \to M \to N \to L[1]$. Un* morphisme de triangle *est un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccccccc} L & \longrightarrow & M & \longrightarrow & N & \longrightarrow & L[1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ L' & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & L'[1]. \end{array}$$

Un triangle est dit distingué *s'il est isomorphe à un triangle de la forme*

$$L \xrightarrow{f} M \to \mathrm{cone}(f) \to L[1].$$

En particulier, à tout triangle distingué on peut associer une suite exacte longue

$$\cdots \to \mathrm{H}_{n-1}(N) \to \mathrm{H}_n(L) \to \mathrm{H}_n(M) \to \mathrm{H}_n(N) \to \mathrm{H}_{n+1}(L) \to \cdots$$

Exemple 2.8 (de triangles distingués)**.** *D'après l'exemple 2.4, le triangle* $L \xrightarrow{Id} L \to \mathrm{cone}(Id) \to L[1]$ *est isomorphe à* $L \xrightarrow{Id} L \to 0 \to L[1]$.

D'après l'exemple 2.5, si $L \to M \to N \to L[1]$ *est un triangle distingué, alors il en est de même de* $M \to N \to L[1] \to M[1]$.

Étant donné deux diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d, dotted] & L[1] \arrow[d] \\
L' \arrow[r] & M' \arrow[r] & N' \arrow[r] & L'[1].
\end{tikzcd}$$

où les lignes sont des triangles distingués, on peut compléter le diagramme pour obtenir un morphisme de triangle. En effet, comme les triangles sont distingués, on peut les remplacer par un triangle strict (i.e. définit avec par des cônes). Le résultat est alors évident grâce à la fonctorialité du cône !

On voit toutefois que la flèche obtenue pour compléter le diagramme n'est pas unique en général : il n'y a pas de condition naturelle à imposer étant donné qu'on travaille seulement à isomorphisme près. Cela pourrait poser problème dans le cas où l'on souhaite composer des morphismes et nécessitera d'ailleurs un axiome supplémentaire.

2.4. **Catégorie triangulée.** La construction précédente est en fait le prototype de la catégorie triangulée

Définition 2.9 (Axiome des catégories triangulées)**.** *Une* catégorie triangulée *est une catégorie additive* $\mathcal{T}$ *munie d'un automorphisme de translation* $L \mapsto L[1]$ *et d'une famille de triangles dits* distingués *satisfaisant aux conditions*

(Tr1) *(a) Tout triangle de* $\mathcal{T}$ *isomorphe à un triangle distingué est distingué.*

(b) Pour tout objet L *de* $\mathcal{T}$ *le triangle* $L \xrightarrow{Id} L \to 0 \to L[1]$ *est distingué.*

(c) Tout morphisme $u \colon L \to M$ *de* D *est contenu dans un triangle distingué* $L \xrightarrow{u} M \to N \to L[1]$.

(Tr2) *Un triangle* $L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N \xrightarrow{w} L[1]$ *est distingué si et seulement si* $M \xrightarrow{v} N \xrightarrow{w} L[1] \xrightarrow{-u[1]} M[1]$ *est distingué.*

(Tr3) Tout diagramme

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d, dotted] & L[1] \arrow[d] \\
L' \arrow[r] & M' \arrow[r] & N' \arrow[r] & L'[1]
\end{tikzcd}$$

où les lignes sont des triangles et les carrés sont commutatifs peut être complété en un morphisme de triangles.

(Tr4) Pour tout couple de flèche $u\colon L \to M$ et $v\colon M \to N$ de $\mathcal{T}$ et tout triplet de triangles distingués $L \xrightarrow{u} M \to N' \to L[1]$, $M \xrightarrow{v} N \to L' \to L[1]$ il existe un triangle distingué $N' \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{g} L' \to N'[1]$ tel que le le diagramme suivant soit commutatif et les triangles de couleurs sont distingués

$$\begin{tikzcd}
 & M' \arrow[ddl, "{[1]}"] \arrow[dr, dashed, "g"] & \\
N' \arrow[ur, dashed, "f"] \arrow[d, "{[1]}"'] & & L' \arrow[ll, "{[1]}"'] \arrow[ddl, "{[1]}"'] \\
L \arrow[rr, "v \circ u"] \arrow[dr, "u"'] & & N \arrow[uul] \arrow[u] \\
 & M \arrow[uul] \arrow[ur, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

En général, on ne peut pas assumer l'unicité dans (Tr3) (le mapping-cone n'est unique qu'à isomorphisme non unique près). L'axiome (Tr4) est donc là pour assurer la fonctorialité dans l'existence proposée par (Tr3).

À titre d'exemple, nous donnons ci-dessous une propriété générale des catégories triangulées qui permet de voir la puissance des axiomes ci-dessus.

Lemme 2.10. *Tout monomorphisme dans une catégorie triangulée est scindé.*

Preuve : Soit $f\colon L \to M$ un monomorphisme dans une catégorie triangulée. On peut alors l'inclure dans un triangle $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \xrightarrow{h} L[1]$.
En particulier, on a $h[-1] \circ f = 0$ (on a un complexe) et comme f est un monomorphisme, on trouve que $h[-1] = 0 = h$.

D'après l'axiome (Tr1) on a des triangles distingués $N \overset{Id}{\to} N \to 0 \to N[1]$ et $L \overset{Id}{\to} L \to 0 \to L[1]$ de sorte que d'après (Tr2) il en est de même de $0 \to N \overset{Id}{\to} N \to 0$.

On vérifie alors aisément que la somme directe l'est encore $L \to L \oplus N \to N \overset{0}{\to} L[1]$.

Or on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r] \arrow[d, "Id"] & L \oplus N \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\ell"] & N \arrow[r] \arrow[d, "Id"] & L[1] \arrow[d, "Id"] \\ L \arrow[r] & M \arrow[r] & N \arrow[r] & L[1] \end{tikzcd}$$

tout les carrés en trait plein étant commutatif (car $h = 0$) il existe un morphisme ℓ complétant le diagramme d'après l'axiome (Tr3).

Les flèches de gauche et de droite étant des isomorphismes, il en est de même de ℓ, ce qui montre que $M \cong L \oplus N$. □

À l'aide du lemme ci-dessus, on peut montrer qu'il existe des morphismes dans $K(\mathcal{A})$ ne possédant pas de noyau. En effet, considérons le morphisme de complexes concentrés en degré 0 donné par $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dans $K(Ab)$. S'il possédait un noyau L alors $L \to \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ serait scindé, ce qui n'est pas possible car $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ est indécomposable.

En fait, Verdier a montré que $K(\mathcal{A})$ est abélienne si et seulement si $\mathcal{A}$ est semi-simple.

3. Catégorie dérivée

3.1. **Calcul des fractions.** Nous souhaitons, à partir de la catégorie $C(\mathcal{A})$, construire une nouvelle catégorie dans laquelle les quasi-isomorphismes sont des isomorphismes.

Cas d'une catégorie générale.

Définition 3.1 (Localisation). *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et S une collection de morphisme de $\mathcal{C}$. Une* localisation *de $\mathcal{C}$ par rapport à S est une catégorie $S^{-1}\mathcal{C}$ munie d'un foncteur $q\colon \mathcal{C} \to S^{-1}\mathcal{C}$ telle que*

- *$q(s)$ est un isomorphisme dans $S^{-1}\mathcal{C}$ pour tout $s \in S$*
- *tout foncteur $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tel que $F(s)$ est un isomorphisme pour tout $s \in S$ se factorise de manière unique à travers q (de sorte que $S^{-1}\mathcal{C}$ est unique à équivalence près).*

Le problème est alors de montrer l'existence d'une telle catégorie. Si $\mathcal{C}$ est une petite catégorie, l'existence est automatique : les objets de $S^{-1}\mathcal{C}$ sont les mêmes que ceux de $\mathcal{C}$, les morphismes sont les chaînes finies (dans les deux sens !) de morphismes de S, i.e. $L_1 \leftarrow L_2 \to L_3 \leftarrow L_4 \to \ldots \to L_n$.

Une telle description des morphismes n'est toutefois pas très pratique et, pour avoir un réel calcul de fraction, il convient de supposer que S est en fait un système multiplicatif :

Définition 3.2 (Système multiplicatif)**.** *Une collection S de morphismes de $\mathcal{C}$ est un* système multiplicatif *si*

i) *les identités sont dans S et S est stable par composition,*

ii) [Condition de Ore] *Pour tout $t\colon N \to M$ dans S et tout $g\colon L \to M$ il existe un diagramme commmutatif*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"] & N \arrow[d, "t"] \\ L \arrow[r, "g"] & M \end{tikzcd}$$

avec $s \in S$, et de même avec les flèches renversées (en d'autres termes, toute composition gs peut s'écrire sous la forme tf).

iii) [Annulation] *Si $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(L, M)$ alors les conditions suivantes sont équivalentes*

- *il existe $s \in S$ tel que $fs = gs$,*
- *il existe $t \in S$ tel que $tf = tg$.*

En résumé, on peut faire du calcul de fraction seulement à droite, ou seulement à gauche.

On peut alors définir la catégorie $S^{-1}\mathcal{C}$ comme étant la catégorie dont les objets sont les mêmes que ceux de $\mathcal{C}$, et les morphismes de $\mathrm{Hom}_{S^{-1}\mathcal{C}}(L, M)$ sont les classes d'équivalences de diagrammes

$$\begin{tikzcd} & L' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ L & & M \end{tikzcd}$$

avec $s \in S$ et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(L', M)$, deux tels diagrammes étant considérés égaux s'il en existe un troisième qui les majore

$$\begin{tikzcd} & L''' \arrow[dl] \arrow[dd, "s''"] \arrow[dr] & & \\ L'' \arrow[dr, "s'"'] \arrow[drrr, "f'"'] & & L' \arrow[dl, "s"] \arrow[dr, "f"] & \\ & L & & M \end{tikzcd}$$

où $s'' \in S$.

3.2. **Application aux catégories dérivées.** Nous allons maintenant appliquer la construction précédente à la catégorie $K(\mathcal{A})$: on définit S comme l'ensemble des morphismes f pour lesquels $\mathrm{H}^n(f)$ est un isomorphisme et on montre que c'est un système multiplicatif.

Nous noterons $D(\mathcal{A})$ la catégorie $S^{-1}K(\mathcal{A})$ qui est naturellement isomorphe à la catégorie $Q^{-1}C(\mathcal{A})$ obtenue de la catégorie des complexes $C(\mathcal{A})$ en inversant les quasi-isomorphismes. Elle vient naturellement avec un foncteur $q\colon \mathcal{A} \to D(\mathcal{A})$ qui est pleinement fidèle.

D'autre part, $D(\mathcal{A})$ est naturellement une catégorie triangulée, les triangles distingués étant les triangles isomorphes aux images de ceux de $K(\mathcal{A})$, ce qui peut donner plus de triangles distingués qu'il y en a dans $K(\mathcal{A})$ puisqu'il y a plus d'isomorphismes. À titre d'exemple, donnons-nous une suite exacte de complexes de $\mathcal{A}$:

$$0 \to L \stackrel{u}{\to} M \to N \to 0.$$

En général, une telle suite exacte ne donne pas naissance à un triangle distingué dans $K(\mathcal{A})$, mais elle en donne un dans $D(\mathcal{A})$. En effet, on peut montrer qu'il existe un morphisme canonique $\phi\colon \mathrm{cone}(u) \to N$ et que celui-ci est un quasi-isomorphisme. Par suite, on peut définir un isomorphisme de triangle

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "u"] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{cone}(u) \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & L[1] \arrow[d] \\
L \arrow[r, "u"] & M \arrow[r] & N \arrow[r] & L[1]
\end{tikzcd}$$

la flèche en bas à droite étant définie à partir de ϕ^{-1} qui existe dans $D(\mathcal{A})$, mais pas dans $K(\mathcal{A})$ en général.

La définition de la localisation et sa propriété universelle permettent alors de voir que les foncteurs H^n se prolongent à $D(\mathcal{A})$ et que pour tout triangle distingué de $D(\mathcal{A})$ on a une suite exacte longue correspondante.

Nous noterons $D^b(\mathcal{A})$, $D^+(\mathcal{A})$ et $D^-(\mathcal{A})$ les catégories obtenues par le même procédé à partir de $C^b(\mathcal{A})$, $C^+(\mathcal{A})$ et $C^-(\mathcal{A})$.

4. Foncteurs dérivées

Soit $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morphisme additif de catégories abéliennes. Il se prolonge automatiquement en un foncteur de $C(\mathcal{A}) \to C(\mathcal{B})$ (car $F(0) = 0$) puis en un foncteur de $K(\mathcal{A}) \to K(\mathcal{B})$ (que nous noterons encore F) car il est additif, donc envoie un morphisme homotope à 0 en un morphisme homotope à 0.

D'autre part, étant donné la fonctorialité du cône, il transforme un triangle distingué en un triangle distingué. C'est donc naturellement un morphisme de catégorie triangulée.

Le problème est alors de savoir s'il se prolonge en un morphisme sur les catégories dérivées, ce qui n'est évident que s'il envoie un quasi-isomorphisme sur un quasi-isomorphisme (autrement dit si F est exact) : il suffit en effet d'appliquer la propriété universelle de la localisation.

4.1. **Définition et existence.**

Définition 4.1. *Un foncteur dérivé droit de F est un foncteur $\mathbf{R}F \colon D(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{B})$ muni d'une transformation naturelle $qF \Rightarrow \mathbf{R}Fq$ et universel pour cette propriété.*
Le foncteur $\mathrm{H}^n(\mathbf{R}F)$ est appelé le n-ième foncteur dérivé droit de F.

Un foncteur dérivé gauche est définit de manière semblable mais le sens de la transformation naturelle est inversé.
Si le foncteur dérivé droit n'est *a priori* définit que sur une sous-catégorie D^b, D^- ou D^+, on notera avec le même exposant le foncteur dérivé : $\mathbf{R}^bF$, $\mathbf{R}^+F$ ou $\mathbf{R}^-F$.
D'après la propriété universelle, le foncteur dérivé droit est unique à transformation naturelle près.

Théorème 4.2. *Supposons que $\mathcal{A}$ possède suffisamment d'injectif. Alors F possède un foncteur dérivé droit $\mathbf{R}^+F$ définit sur $D^+(\mathcal{A})$.*
Si I est un complexe formé d'objets injectifs, alors $\mathbf{R}^+F(I) = qF(I)$.
D'autre part, les foncteurs hyperdérivés $\mathbb{R}^nF$ sont isomorphes à $\mathrm{H}^n(\mathbf{R}^+F)$.

Nous nous limitons ici volontairement au résultat avec des objets injectifs, ce qui demande le moins d'hypothèses (pas même d'exactitude à gauche). Toutefois il est possible d'être plus général en passant par d'autres sous-catégories pleines de $\mathcal{A}$ du moment qu'elles sont F-acycliques (par exemples celles des faisceaux flasques, des modules plats, ...).
Preuve : Nous allons en fait nous inspirer de la deuxième propriété et désigner pour cela par $\mathcal{I}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}$ dont les objets sont les objets injectif. On a alors un foncteur naturel

$$K^+(\mathcal{I}) \to K^+(\mathcal{A}) \to D^+(\mathcal{A}).$$

Or on sait que

- tout complexe de $\mathcal{A}$ est quasi-isomorphe à un complexe formé d'objets injectifs (prendre une résolution de Cartan-Eilenberg et considérer le complexe total) ;
- tout quasi-isomorphisme entre un complexe de $\mathcal{I}$ et un complexe de $\mathcal{A}$ est un isomorphisme (découle de l'injectivité des objets)

On en déduit que $K^+(\mathcal{I}) \to D^+(\mathcal{A})$ est une équivalence de catégorie.
On peut alors définir $\mathbf{R}^+F$ par

$$D^+(\mathcal{A}) \overset{\sim}{\leftarrow} K^+(\mathcal{I}) \to K^+(\mathcal{A}) \xrightarrow{F} K^+(\mathcal{B}) \xrightarrow{q} D^+(\mathcal{B}).$$

La construction de la transformation naturelle est directe.

L'assertion concernant les foncteur hyperdérivés est immédiate d'après la construction car on passe par le complexe total d'une résolution de Cartan-Eilenberg. $\square$

4.2. **Exemples.** On voit, dans la construction ci-dessus, qu'on a en fait seulement besoin d'un morphisme définit sur $K^+(\mathcal{A}) \to K^+(\mathcal{B})$ et on peut alors montrer l'existence d'un foncteur dérivé droit.

Le foncteur image directe. Étant donné un morphisme de schémas $f\colon X \to Y$, on définit le foncteur $\mathbf{R}f_*$ comme ci-dessus, car la catégorie des faisceaux possède suffisamment d'injectifs.

Généralisant le théorème 4.2, on montre que les $\mathbf{R}f_*$ peuvent également être calculé à l'aide de résolution F-acycliques, par exemple en utilisant des faisceaux flasques.

Le foncteur Hom. De même, pour le foncteur $M \mapsto \mathrm{Hom}^\bullet(L, M)$ (définit comme complexe total $\prod_{j-i=n} \mathrm{Hom}_R(L^i, M^j)$ avec de bonnes conventions de signes, et on montre qu'alors $\mathrm{H}^n(\mathrm{Hom}^\bullet_R(L, M) = \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(A, B[n]))$, on peut définir le foncteur dérivé $\mathbf{R}\mathrm{Hom}^\bullet(L, -)$ si $\mathcal{A}$ possède suffisamment d'injectif et on le prolonge même en un foncteur

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}\colon D(\mathcal{A})^{op} \times D^+(\mathcal{A}) \to D(Ab).$$

et on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(L, M) = \mathrm{H}^0\mathbf{R}\mathrm{Hom}(L, M).$$

De la même manière, on peut définir les foncteurs dérivés de la variante faisceautique $\mathcal{H}om$ de Hom.

Produit tensoriel et image réciproque. Ainsi, pour le foncteur $M \mapsto L \otimes_R M$ (définit comme complexe total $\bigoplus_{i+j=n} L^i \otimes_R M^j$ avec de bonnes conventions de signes), on peut définir un foncteur dérivé gauche $L \otimes^{\mathbf{L}} -$ dans le cas où $\mathcal{A}$ est la catégorie des R-modules pour un anneau R car celle-ci possède suffisamment d'injectif, et on le prolonge même en un bi-foncteur

$$\otimes^{\mathbf{L}}_R\colon D^-(R - mod) \times D^-(R - mod) \to D^-(Ab).$$

Le cas de l'image réciproque pour un morphisme quelconque de schéma pose plus de problème car la catégorie des modules cohérent sur un schéma ne possède pas, en général, suffisamment de projectifs. On peut toutefois palier à ce problème en utilisant des résolutions plates qui sont $\otimes$-acycliques.

4.3. **Dérivés de foncteurs composés.**

Théorème 4.3. *Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ trois catégories, $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ et $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ deux foncteurs additifs.*

Supposons que $\mathbf{R}F$, $\mathbf{R}G$ et $\mathbf{R}GF$ existent. Alors il existe une unique transformation naturelle $\mathbf{R}^+GF \Rightarrow \mathbf{R}^+G \circ \mathbf{R}^+F$.

Supposons de plus que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ possèdent suffisamment d'injectifs et que F envoi les objets injectifs dans des objets G-acycliques. Alors la transformation naturelle ci-dessus est un isomorphisme.

Ce théorème remplace en fait la suite spectrale de Grothendieck pour les foncteurs composés :

$$E_2^{p,q} = \underbrace{(\mathrm{R}^p F)(\mathrm{H}^q(\mathbf{R}G(A)))}_{(\mathrm{R}^p F)(\mathbb{R}^q G(A))} \Rightarrow \underbrace{\mathrm{H}^{p+q}(\mathbf{R}(GF)(A))}_{\mathbb{R}^{p+q}(FG)(A)}$$

(remplacer $\mathbb{R}$ par R dans le cas où A est un objet de $\mathcal{A}$).

4.4. **Applications.** À titre d'exemple de simplification fournie par la théorie des catégories dérivées, nous allons démontrer que les foncteurs $\otimes^{\mathbf{L}}$ et $\mathbf{R}$Hom sont adjoints.

Théorème 4.4. *Soient R un anneau, A un complexe de R-modules borné supérieurement. Alors pour tous objets B de $D^-(R-mod)$ et C de $D^+(R-mod)$ on a un isomorphisme canonique*

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(B, \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(A, C)) \to \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(A \otimes_R^{\mathbf{L}} B, C).$$

Preuve : Les deux côtés de l'égalité sont le foncteur dérivé de

$$\mathrm{Hom}_R(-, \mathrm{Hom}_R(A, -)) \cong \mathrm{Hom}_R(A \otimes_R -, -) : \\ K^-(R-mod) \times K^+(R-mod) \to K(R-mod)$$

et sont donc isomorphes par unicité du foncteur dérivé. □

La démonstration ci-dessus s'étend à presque toutes les formules d'adjonction classiques, le seul ingrédient fondamental étant l'adjonction des foncteurs sur les objets injectifs (ou acycliques relativement aux foncteurs) de $\mathcal{A}$.

Références

[Ill90] L. Illusie, *Catégories dérivées et dualité : travaux de J.-L. Verdier*, Enseign. Math. (2) **36** :3-4 (1990), 369–391.

[KS94] M. Kashiwara and P. Schapira, *Sheaves on manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 292, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[Lip09] Joseph Lipman, *Notes on derived functors and Grothendieck duality*, Foundations of Grothendieck duality for diagrams of schemes, Lecture Notes in Math., vol. 1960, Springer, Berlin, 2009, pp. 1–259.

[Ver96] Jean-Louis Verdier, *Des catégories dérivées des catégories abéliennes*, Astérisque :239 (1996), With a preface by Luc Illusie, Edited and with a note by Georges Maltsiniotis.

[Wei94] C. A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 38, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[Wil] Harold Williams (mathoverflow.net/users/361), *How do i know the derived category is not abelian ?*, MathOverflow, http ://mathoverflow.net/questions/15658, `http://mathoverflow.net/questions/15658` (version : 2010-02-18).