

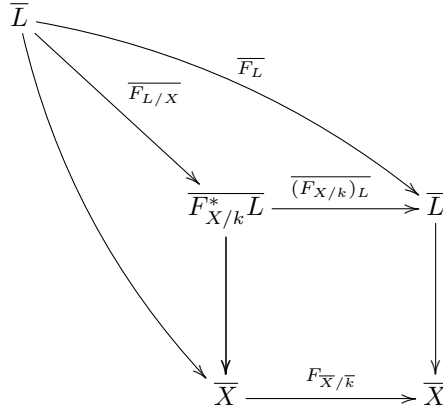
La formule des traces de Lefschetz-Verdier

Rencontre ARIVAF 4 - Exposé (4), Cédric Pépin

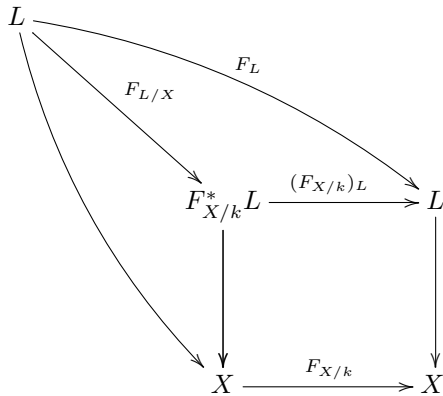
1 Correspondance de Frobenius géométrique

1.1. Soient p un nombre premier, m un entier ≥ 1 , $q := p^m$. On pose $k := \mathbb{F}_q$ et on fixe une clôture algébrique \bar{k} de k . On note avec une barre les objets sur \bar{k} obtenus à partir d'objets sur k par le changement de base $k \rightarrow \bar{k}$.

1.2. Soient $f : X \rightarrow \text{Spec}(k)$ un k -schéma. Le m -ième itéré du Frobenius absolu de X coïncide avec le m -ième itéré du Frobenius relatif de X sur k . On note $F_{X/k}$ ce k -endomorphisme de X . Soit L un faisceau sur X , que l'on identifie au X -espace algébrique étale qui le représente. On a



au-dessus de



Comme L est étale sur X , le Frobenius relatif $F_{L/X}$ est un isomorphisme (puisque c'est alors un homéomorphisme universel *étale*). En particulier, $\overline{F_{L/X}}$ définit un \bar{X} -isomorphisme

$$\overline{F_{L/X}} : \bar{L} \xrightarrow{\sim} \overline{F_{X/k}^* L} = F_{\bar{X}/\bar{k}}^* \bar{L}.$$

Définition 1.3. La correspondance de Frobenius géométrique sur \bar{L} est le couple $(F_{\bar{X}/\bar{k}}, \overline{F_{L/X}}^{-1})$.

Définition 1.4. L'opération de Frobenius géométrique sur $R\Gamma(\overline{X}, \overline{L})$ est la composée

$$\begin{array}{ccccc} R\overline{f}_* \overline{L} & \longrightarrow & R\overline{f}_* F_{\overline{X}/\overline{k}}^* \overline{L} & \xrightarrow{R\overline{f}_*(\overline{F}_{L/X}^{-1})} & R\overline{f}_* \overline{L} \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ R\Gamma(\overline{X}, \overline{L}) & \longrightarrow & R\Gamma(\overline{X}, F_{\overline{X}/\overline{k}}^* \overline{L}) & \xrightarrow{R\Gamma(\overline{X}, \overline{F}_{L/X}^{-1})} & R\Gamma(\overline{X}, \overline{L}) \end{array}$$

où la première flèche est la composée canonique

$$R\overline{f}_* \overline{L} \longrightarrow R\overline{f}_* R F_{\overline{X}/\overline{k}} F_{\overline{X}/\overline{k}}^* \overline{L} = R\overline{f}_* F_{\overline{X}/\overline{k}}^* \overline{L}.$$

1.5. L'opération de Frobenius géométrique induit des opérations sur les groupes de cohomologies, et celles-ci s'étendent aux \mathbb{Z}_ℓ - et \mathbb{Q}_ℓ -faisceaux.

2 La formule des traces pour un schéma propre

2.1. Soient p un nombre premier, m un entier ≥ 1 , $q := p^m$ et ℓ un premier différent de p .

Théorème 2.2 ([SGA 4 $\frac{1}{2}$] 3.2). Soient X un schéma propre sur \mathbb{F}_q et L un \mathbb{Q}_ℓ -faisceau constructible sur X . Alors :

$$\sum_i (-1)^i \operatorname{Tr} \left((F_{\overline{X}/\overline{k}}, \overline{F}_{L/X}^{-1}), H^i(\overline{X}, \overline{L}) \right) = \sum_{x \in X(\mathbb{F}_q)} \operatorname{Tr} \left(\overline{F}_{L/X}^{-1}, \overline{L}_x \right).$$

2.3. Pour $L = \mathbb{Q}_\ell$, on a $F_{L/X} = \operatorname{Id}$ et le terme de droite égale le cardinal de $X(\mathbb{F}_q)$.

2.4. Il existe une version de cette formule au niveau fini, c'est-à-dire dans laquelle les coefficients ℓ -adiques sont remplacés par des coefficients de torsion. La formule au niveau fini entraîne la formule ℓ -adique par passage à la limite ([SGA 4 $\frac{1}{2}$] 4.13). Cependant, des groupes de cohomologie à valeurs dans des faisceaux de torsion ne sont en général pas libres, et il faut donc commencer par donner un sens au terme de gauche de 2.2 dans ce cas. Ceci est possible grâce aux propriétés du complexe $R\Gamma(\overline{X}, \overline{L})$.

2.5. Soient n un entier ≥ 1 et $\Lambda := \mathbb{Z}/\ell^n$. On note K_{parf} la catégorie dont les objets sont les complexes bornés de Λ -modules libres de type fini, et dont les morphismes sont les classes d'homotopie de morphismes de complexes. On note D la catégorie dérivée des Λ -modules et D_{parf} l'image essentielle du foncteur pleinement fidèle naturel

$$K_{\text{parf}} \longrightarrow D.$$

Lemme 2.6 ([SGA 4 $\frac{1}{2}$] 4.5.1). Soit $P \in \operatorname{Ob} D^-$. Alors $P \in \operatorname{Ob} D_{\text{parf}}$ si et seulement si P est de Tor-dimension finie à cohomologie de type fini.

Théorème 2.7 ([SGA 4 $\frac{1}{2}$] 4.9). Soit \overline{X} un schéma propre sur un corps séparablement clos. Soit \overline{L} un faisceau de Λ -modules sur \overline{X} , plat et constructible. Alors $R\Gamma(\overline{X}, \overline{L}) \in \operatorname{Ob} D_{\text{parf}}$.

Démonstration. Les $H^i(\overline{X}, \overline{L})$ sont nuls pour $i > 2 \dim(\overline{X})$ d'après le théorème d'annulation, et de type fini d'après le théorème de finitude. De plus $R\Gamma(\overline{X}, \overline{L})$ est de Tor-dimension ≤ 0 : cela se voit sur la formule de Künneth

$$R\Gamma(\overline{X}, \overline{L}) \otimes^L M = R\Gamma(\overline{X}, \overline{L} \otimes^L M),$$

puisque $\overline{L} \otimes^L M = \overline{L} \otimes M$ d'après l'hypothèse de platitude sur \overline{L} . Le lemme 2.6 conclut. \square

2.8. Ceci étant, la trace d'un endomorphisme de $R\Gamma(\overline{X}, \overline{L})$ (par exemple la trace de l'opération de Frobenius géométrique 1.4) est définie au moyen du lemme suivant.

Lemme 2.9. Pour tout $P_1, P_2 \in \operatorname{Ob} D_{\text{parf}}$, posant $DP_1 := \operatorname{RHom}(P_1, \Lambda)$, on a un isomorphisme canonique

$$\operatorname{RHom}(P_1, P_2) \xrightarrow{\sim} DP_1 \otimes^L P_2.$$

Démonstration. On peut supposer $P_1 \in \text{Ob } K_{\text{parf}}$, de sorte que

$$\text{RHom}(P_1, P_2) = \text{Hom}^\cdot(P_1, P_2), \quad DP_1 = \text{Hom}^\cdot(P_1, \Lambda) \quad \text{et} \quad DP_1 \in \text{Ob } K_{\text{parf}}.$$

Il s'agit alors de construire un isomorphisme

$$\text{Hom}^\cdot(P_1, P_2) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}^\cdot(P_1, \Lambda) \otimes P_2. \quad (1)$$

Comme $P_1 \in \text{Ob } K_{\text{parf}}$, on dispose d'isomorphismes canoniques

$$\text{can}_{i,j} : \text{Hom}(P_1^i, P_2^j) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(P_1^i, \Lambda) \otimes P_2^j$$

et on définit (1) en degré $d \in \mathbb{Z}$ par

$$\bigoplus_{j=i+d} (-1)^i \text{can}_{i,j} : \bigoplus_{j=i+d} \text{Hom}(P_1^i, P_2^j) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{-i+j=d} \text{Hom}(P_1^i, \Lambda) \otimes P_2^j.$$

Le choix des signes $(-1)^i$ est fait pour rendre ces flèches compatibles aux différentielles des complexes $\text{Hom}^\cdot(P_1, P_2)$ et $\text{Hom}(P_1, \Lambda) \otimes P_2$. \square

Définition 2.10 ([SGA 6] I 8.1). *Pour tout $P \in \text{Ob } D_{\text{parf}}$, on appelle trace l'homomorphisme de Λ -modules*

$$\text{Tr}(\cdot, P) : \text{Hom}(P, P) \longrightarrow \Lambda$$

obtenu en appliquant H^0 à la composée

$$\text{RHom}(P, P) \xrightarrow{\sim} DP \otimes^L P \longrightarrow \Lambda,$$

la première flèche étant l'isomorphisme 2.9 et la seconde l'évaluation.

2.11. Si u est un endomorphisme d'un complexe P de K_{parf} , on a donc

$$\text{Tr}(u, P) = \sum_i (-1)^i \text{Tr}(u^i)$$

où les traces du second membre sont les traces usuelles d'endomorphismes de Λ -modules libres de type fini, et $\text{Tr}(u, P)$ ne dépend que de la classe d'homotopie de u .

2.12. Rappelons par ailleurs que les germes d'un faisceau de Λ -modules plat sont plats (cf. [SGA 4] V 1.6 1)), et donc libres de rang fini s'ils sont de type fini. La trace d'un endomorphisme d'un germe est alors bien définie.

Théorème 2.13 ([SGA 4 $\frac{1}{2}$] 4.10). *Soient X un schéma propre sur \mathbb{F}_q et L un \mathbb{Z}/ℓ^n -faisceau sur X , plat et constructible. Alors :*

$$\text{Tr} \left((F_{\overline{X}/\overline{k}}, \overline{F_{L/X}}^{-1}), \text{R}\Gamma(\overline{X}, \overline{L}) \right) = \sum_{x \in X(\mathbb{F}_q)} \text{Tr} \left(\overline{F_{L/X}}^{-1}, \overline{L}_x \right).$$

2.14. La suite de cet exposé est consacrée à la méthode de Artin et Verdier fournissant une démonstration de 2.13 lorsque X est une courbe propre et lisse. La première étape est la formule de Lefschetz-Verdier exprimant le membre de gauche en termes locaux, valable pour un \mathbb{F}_q -schéma propre quelconque. La seconde étape est le calcul des termes locaux dans le cas d'une courbe propre et lisse.

3 Formules de Künneth

3.1. Soient S le spectre d'un corps, ℓ un nombre premier inversible sur S , n un entier ≥ 1 et $\Lambda := \mathbb{Z}/\ell^n$. Pour un morphisme séparé de type fini $f : X \rightarrow S$, on écrira souvent f_* , $f_!$ et $f^!$ au lieu de Rf_* , $Rf_!$ et $Rf^!$. Si f est lisse de dimension d , alors $f^! = f^*(\cdot)(d)[2d]$ par dualité de Poincaré. On note $D(X)$ la catégorie dérivée des faisceaux de Λ -modules sur X et $D_{\text{ctf}}(X)$ la sous-catégorie pleine de $D^-(X)$ formée des complexes isomorphes dans $D^-(X)$ à un complexe borné de faisceaux de Λ -modules plats et constructibles.

3.2. Le lemme 2.6 et le théorème 2.7 se généralisent comme suit : un objet de $D^-(X)$ est un objet de $D_{\text{ctf}}(X)$ si et seulement si il est de Tor-dimension finie à cohomologie constructible ([SGA 4^{1/2}] 4.6) ; si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme de S -schémas séparés de type fini, alors $f_! D_{\text{ctf}}(X) \subset D_{\text{ctf}}(Y)$ (*loc. cit.* 4.5.1). On a par ailleurs $f^* D_{\text{ctf}}(Y) \subset D_{\text{ctf}}(X)$, et $f_* D_{\text{ctf}}(X) \subset D_{\text{ctf}}(Y)$, $f^! D_{\text{ctf}}(Y) \subset D_{\text{ctf}}(X)$ d'après les théorèmes de finitude de [SGA 4^{1/2}] [Th. finitude] (cf. *loc. cit.* 1.7).

3.3. Le lemme 2.9 admet la généralisation fondamentale suivante :

Théorème 3.4 ([SGA 5] III 3.1.1). *Soit un carré cartésien de S -morphisms séparés de type fini*

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ X_1 & & X_2 \\ f_1 \searrow & & \swarrow f_2 \\ & S & \end{array}$$

Pour tout $L_i \in \text{Ob } D_{\text{ctf}}(X_i)$, posant $K_{X_1} := f_1^! \Lambda$ et $DL_1 := \underline{\text{RHom}}(L_1, K_{X_1})$, on a un isomorphisme canonique

$$\underline{\text{RHom}}_S(L_1, L_2) \xrightarrow{\sim} DL_1 \otimes_S^L L_2$$

avec

$$\underline{\text{RHom}}_S(\cdot, \cdot) := \underline{\text{RHom}}(p_1^*(\cdot), p_2^!(\cdot)) \quad \text{et} \quad (\cdot) \otimes_S^L (\cdot) := p_1^*(\cdot) \otimes^L p_2^*(\cdot).$$

3.5. Signalons simplement que ce théorème est une conséquence des formules de Künneth suivantes, qui nécessitent [SGA 4^{1/2}] [Théorème de finitude] 1.9.

Théorème 3.6 ([SGA 5] III 1.6.4 et 1.7.3). *Soient un diagramme de S -morphisms séparés de type fini*

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{f_1} & Y_1 \\ \uparrow & & \uparrow \\ X_1 \times_S X_2 & \xrightarrow{f=f_1 \times_S f_2} & Y_1 \times_S Y_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_2 & \xrightarrow{f_2} & Y_2 \end{array}$$

et $L_i \in \text{Ob } D_{\text{ctf}}(X_i)$, $M_i \in \text{Ob } D_{\text{ctf}}(Y_i)$. On a des isomorphismes de Künneth

$$f_{1*} L_1 \otimes_S^L f_{2*} L_2 \xrightarrow{\sim} f_*(L_1 \otimes_S^L L_2) \tag{2}$$

$$f_1^! M_1 \otimes_S^L f_2^! M_2 \xrightarrow{\sim} f^!(M_1 \otimes_S^L M_2). \tag{3}$$

4 Correspondances cohomologiques

4.1. Les notations sont celles de 3.1.

4.2. Soient un carré cartésien de S -morphisms séparés de type fini

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ p_1 \swarrow & \downarrow f & \searrow p_2 \\ X_1 & & X_2 \\ f_1 \searrow & & \swarrow f_2 \\ & S & \end{array}$$

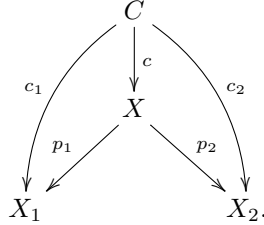
et $L_i \in \text{Ob } D_{\text{ctf}}(X_i)$.

Définition 4.3. *Les éléments de*

$$\mathrm{Hom}_S(L_1, L_2) := H^0(X, \mathrm{RHom}_S(L_1, L_2)) = \mathrm{Hom}(p_1^* L_1, p_2^! L_2)$$

sont les correspondances cohomologiques de L_1 à L_2 .

4.4. Soient $c : C \rightarrow X$ une immersion fermée, c_1, c_2 les morphismes obtenus par composition avec p_1, p_2 :



Définition 4.5. *Les éléments de $\mathrm{Hom}(c_1^* L_1, c_2^! L_2)$ sont les correspondances cohomologiques de L_1 à L_2 à support dans C .*

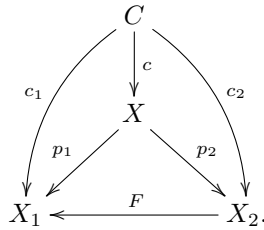
4.6. D'après la formule d'induction [SGA 4] XVIII 3.1.12.2, on a un isomorphisme canonique

$$c^! \mathrm{RHom}(p_1^* L_1, p_2^! L_2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{RHom}(c_1^* L_1, c_2^! L_2)$$

d'où, grâce à l'adjonction $c_* c^! \rightarrow \mathrm{Id}$, une flèche

$$\mathrm{Hom}(c_1^* L_1, c_2^! L_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(L_1, L_2).$$

4.7. Soient $F : X_2 \rightarrow X_1$ un S -morphisme et $c : C := \mathrm{Im}(F, \mathrm{Id}) \rightarrow X$ son graphe, définissant un diagramme



En identifiant C à X_2 via l'isomorphisme c_2 , on obtient

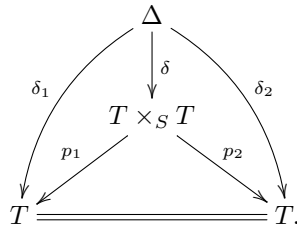
$$\mathrm{RHom}(c_1^* L_1, c_2^! L_2) = \mathrm{RHom}(F^* L_1, L_2)$$

$$\mathrm{Hom}(c_1^* L_1, c_2^! L_2) = \mathrm{Hom}(F^* L_1, L_2).$$

Par exemple, pour $X_1 = X_2 = T$, $L_1 = L_2 = L$,

$$1 \in \mathrm{Hom}(L, L)$$

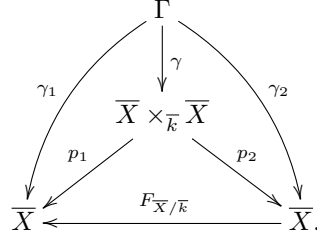
définit la *correspondance diagonale sur L à support dans la diagonale Δ de $T \times_S T$*



Avec les notations de la section 1, pour $X_1 = X_2 = \bar{X}$, $L_1 = L_2 = \bar{L}$,

$$\overline{F_{L/X}}^{-1} \in \mathrm{Hom}(F_{\bar{X}/\bar{k}}^* \bar{L}, \bar{L})$$

définit la *correspondance de Frobenius géométrique cohomologique* sur \overline{L} à support dans le graphe Γ de $F_{\overline{X}/\overline{k}}$



4.8. Le morphisme $f : X \rightarrow S$ de 4.2 induit une *image directe*

$$(\cdot)_* : \text{Hom}(c_1^* L_1, c_2^* L_2) \longrightarrow \text{Hom}(f_{1*} L_1, f_{2*} L_2).$$

On l'obtient en appliquant $H^0(X, \cdot)$ à la composée

$$f_* c_* c^! \text{RHom}_S(L_1, L_2) \longrightarrow f_* \text{RHom}_S(L_1, L_2) \xrightarrow{\sim} \text{RHom}_S(f_{1!} L_1, f_{2*} L_2),$$

où la première flèche est donnée par adjonction, et la seconde par dualité de Poincaré :

$$\begin{array}{ccc} f_* \text{RHom}_S(L_1, L_2) & \xrightarrow{\sim} & \text{RHom}_S(f_{1!} L_1, f_{2*} L_2) \\ \downarrow (2) \circ (3.4) & & \downarrow (3.4) \\ f_{1*} DL_1 \otimes_{\mathbb{S}}^L f_{2*} L_2 & \xrightarrow{\sim} & D(f_{1!} L_1) \otimes_{\mathbb{S}}^L f_{2*} L_2. \end{array}$$

4.9. Lorsque c est le graphe d'un endomorphisme F d'un $t : T \rightarrow S$ séparé de type fini, on peut vérifier que l'image directe d'une correspondance u sur un $L \in \text{Ob } D_{\text{ctf}}(T)$ à support dans le graphe de F est l'endomorphisme de $t_* L$ composé de l'image inverse $t_* L \rightarrow t_* F^* L$ et de $t_* u : t_* F^* L \rightarrow t_* L$ ([SGA 5] III 3.5 et 3.6). En particulier, l'image directe de la correspondance de Frobenius géométrique cohomologique 4.7 est précisément l'opération de Frobenius géométrique 1.4.

5 Accouplements de correspondances et formule de Lefschetz-Verdier

5.1. On considère toujours la situation 4.2. On a des flèches d'évaluation

$$p_i^* DL_i \otimes^L p_i^* L_i = p_i^* \text{RHom}(L_i, K_{X_i}) \otimes^L p_i^* L_i \longrightarrow p_i^* K_{X_i}$$

qui, compte tenu de l'isomorphisme de Künneth $K_{X_1} \otimes_{\mathbb{S}}^L K_{X_2} \xrightarrow{\sim} K_X$ (3), fournissent un accouplement

$$(DL_1 \otimes_{\mathbb{S}}^L L_2) \otimes^L (DL_2 \otimes_{\mathbb{S}}^L L_1) \longrightarrow K_X.$$

D'après 3.4, celui-ci peut encore s'écrire

$$\text{RHom}_S(L_1, L_2) \otimes^L \text{RHom}_S(L_2, L_1) \longrightarrow K_X.$$

D'où un *cup-produit*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \text{Hom}_S(L_1, L_2) \otimes \text{Hom}_S(L_2, L_1) \longrightarrow H^0(X, K_X) :$$

l'accouplement de

$$u \in \text{Hom}_S(L_1, L_2) = H^0(X, \text{RHom}_S(L_1, L_2)) = \text{Hom}(\Lambda, \text{RHom}_S(L_1, L_2))$$

et

$$v \in \text{Hom}_S(L_2, L_1) = H^0(X, \text{RHom}_S(L_2, L_1)) = \text{Hom}(\Lambda, \text{RHom}_S(L_2, L_1))$$

est

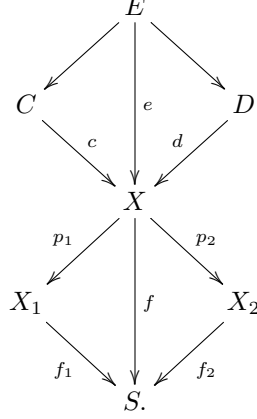
$$\langle u, v \rangle : \Lambda \xrightarrow{u \otimes v} \text{RHom}_S(L_1, L_2) \otimes^L \text{RHom}_S(L_2, L_1) \longrightarrow K_X.$$

5.2. Lorsque $X_1 = X_2 = S$ est le spectre d'un corps séparablement clos, c'est-à-dire dans la situation 2.5, le cup-produit s'écrit

$$\langle , \rangle : \mathrm{Hom}(P_1, P_2) \otimes \mathrm{Hom}(P_2, P_1) \longrightarrow \Lambda$$

et $\langle u, v \rangle = \mathrm{Tr}(uv) = \mathrm{Tr}(vu)$ ([SGA 6] I 8.3).

5.3. Plus généralement, considérons un carré cartésien d'immersions fermées au-dessus du carré 4.2



On construit un *cup-produit*

$$\langle , \rangle : \mathrm{Hom}(c_1^* L_1, c_2^* L_2) \otimes \mathrm{Hom}(d_2^* L_2, d_1^* L_1) \longrightarrow H^0(E, K_E)$$

de la façon suivante. On part de la flèche canonique

$$c^!(DL_1 \otimes_S^L L_2) \otimes_X^L d^!(L_1 \otimes_S^L DL_2) \longrightarrow e^!((DL_1 \otimes_S^L L_2) \otimes^L (L_1 \otimes_S^L DL_2))$$

obtenue par adjonction à partir de

$$e_*(c^!(DL_1 \otimes_S^L L_2) \otimes_X^L d^!(L_1 \otimes_S^L DL_2)) \xrightarrow{(2)} c_* c^!(DL_1 \otimes_S^L L_2) \otimes^L d_* d^!(L_1 \otimes_S^L DL_2) \longrightarrow (DL_1 \otimes_S^L L_2) \otimes^L (L_1 \otimes_S^L DL_2).$$

En lui appliquant e_* et en utilisant à nouveau l'isomorphisme de Künneth (2)¹, on obtient une flèche

$$c_* c^!(DL_1 \otimes_S^L L_2) \otimes^L d_* d^!(L_1 \otimes_S^L DL_2) \longrightarrow e_* e^!((DL_1 \otimes_S^L L_2) \otimes^L (L_1 \otimes_S^L DL_2)).$$

Composant avec l'accouplement

$$(DL_1 \otimes_S^L L_2) \otimes^L (DL_2 \otimes_S^L L_1) \longrightarrow K_X$$

de 5.1, il en résulte un accouplement

$$c_* c^!(DL_1 \otimes_S^L L_2) \otimes^L d_* d^!(L_1 \otimes_S^L DL_2) \longrightarrow e_* e^! K_X = e_* K_E,$$

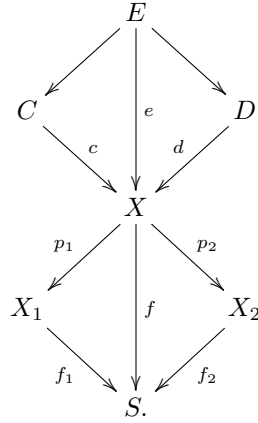
ou encore (3.4 et induction)

$$c_* \mathrm{RHom}(c_1^* L_1, c_2^* L_2) \otimes^L d_* \mathrm{RHom}(d_2^* L_2, d_1^* L_1) \longrightarrow e_* K_E,$$

d'où l'on déduit le cup-produit annoncé.

1. Ici et ci-dessus, on utilise (2) seulement dans sa version propre [SGA 4] XVII 5.4.3.

Théorème 5.4 (Formule de Lefschetz-Verdier [SGA 5] III 4.7). *Soient deux carrés cartésiens de S -morphisms propres, le carré supérieur étant constitué d'immersions fermées*



Soit

$$\int_E : H^0(E, K_E) \longrightarrow H^0(S, K_S)$$

la flèche déduite de l'adjonction $(fe)_*K_E = (fe)_*(fe)^!K_S \rightarrow K_S$. Alors, pour tout $L_i \in \text{Ob } D_{\text{ctf}}(X_i)$, le carré

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}(c_1^*L_1, c_2^!L_2) \otimes \text{Hom}(d_2^*L_2, d_1^!L_1) & \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle} & H^0(E, K_E) \\
 \downarrow (\cdot)_* \otimes (\cdot)_* & & \downarrow \int_E \\
 \text{Hom}(f_{1*}L_1, f_{2*}L_2) \otimes \text{Hom}(f_{2*}L_2, f_{1*}L_1) & \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle} & H^0(S, K_S)
 \end{array}$$

est commutatif :

$$(\text{Tr}(u_*v_*) = \text{Tr}(v_*u_*) =) \langle u_*, v_* \rangle = \int_E \langle u, v \rangle.$$

5.5. Le premier membre est de nature *globale* tandis que le second est de nature *locale*.

Corollaire 5.6. *Soit $t : T \rightarrow S$ un S -schéma propre, $\Delta \subset T \times_S T$ la diagonale, F un S -endomorphisme de T , $T^F := (\text{graphe de } F) \times_{T \times_S T} \Delta$ le schéma des points fixes de F , $L \in \text{Ob } D_{\text{ctf}}(T)$, $u \in \text{Hom}(F^*L, L)$ une correspondance sur L à support dans le graphe de F , $1 \in \text{Hom}(L, L)$ la correspondance diagonale sur L . Alors :*

$$\text{Tr}(u_*) = \int_{T^F} \langle u, 1 \rangle,$$

où u_* est l'endomorphisme de t_*L composé de l'image inverse $t_*L \rightarrow t_*F^*L$ et de $t_*u : t_*F^*L \rightarrow t_*L$.

5.7. Supposons que S soit le spectre de $\overline{\mathbb{F}}_q$, que T provienne d'un \mathbb{F}_q -schéma par extension des scalaires, que F soit l'endomorphisme de Frobenius relatif de T sur $\overline{\mathbb{F}}_q$, et que u soit la correspondance de Frobenius géométrique cohomologique sur L . Alors u_* est l'opération de Frobenius géométrique (4.9) et $T^F = T(\mathbb{F}_q)$ puisqu'alors $dF = 0$. Pour établir 2.13, il reste à calculer les termes locaux.

6 Calcul des termes locaux pour une courbe propre et lisse

6.1. On se place dans la situation de 5.6, et l'on suppose de plus que S est le spectre d'un corps algébriquement clos et que T est une courbe propre et lisse sur S . Pour prouver 5.6, il suffit d'étudier la situation au voisinage d'un point fixe z de F en lequel la fibre de L est nul ([SGA 5] III B 2.2 et 2.3). Suivant [V] 6, nous allons traiter le cas particulier clé où L est l'extension par 0 du faisceau constant de valeur $\Lambda := \mathbb{Z}/\ell$ sur $T - z$. On note X le localisé strict de $T \times_S T$ en $x := (z, z)$. On note X_1 et X_2 les sous-schémas fermés de X induits par les immersions $\text{Id} \times z$ et $z \times \text{Id}$ de T dans $T \times_S T$. On note $\gamma : \Gamma \rightarrow X$ le sous-schéma fermé de X induit par le graphe de F et $\delta : \Delta \rightarrow X$ celui induit par la diagonale de $T \times_S T$.

6.2. Par localisation stricte en x (et formule d'induction), on est ramené à voir que le cup-produit

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(\gamma_1^* L, \gamma_2^! L) \otimes \mathrm{Hom}(\delta_1^* L, \delta_2^! L) & \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle} & H^0(x, K_x) = \Lambda \\ \parallel & & \parallel \\ H_\Gamma^0(X, DL \otimes_{\mathbb{S}}^L L) \otimes H_\Delta^0(X, L \otimes_{\mathbb{S}}^L DL) & \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle} & H^0(x, K_x) = \Lambda \end{array}$$

est nul. Or celui-ci se décompose en

$$H_\Gamma^0(X, DL \otimes_{\mathbb{S}}^L L) \otimes H_\Delta^0(X, L \otimes_{\mathbb{S}}^L DL) \longrightarrow H_x^0(X, (DL \otimes_{\mathbb{S}}^L L) \otimes^L (L \otimes_{\mathbb{S}}^L DL)) \longrightarrow H^0(x, K_x)$$

et la première flèche se factorise par

$$r' \otimes 1 : H_\Gamma^0(X, DL \otimes_{\mathbb{S}}^L L) \otimes H_\Delta^0(X, L \otimes_{\mathbb{S}}^L DL) \longrightarrow H_x^0(\Delta, DL \otimes^L L) \otimes H_\Delta^0(X, L \otimes_{\mathbb{S}}^L DL).$$

Il suffit donc de montrer que la restriction

$$r' : H_\Gamma^0(X, DL \otimes_{\mathbb{S}}^L L) \longrightarrow H_x^0(\Delta, DL \otimes^L L)$$

est nulle.

6.3. En utilisant la suite exacte longue d'hypercohomologie à support dans Γ , on obtient le diagramme commutatif exact

$$\begin{array}{ccccc} H^{-1}(X - \Gamma, DL \otimes_{\mathbb{S}}^L L) & \longrightarrow & H_\Gamma^0(X, DL \otimes_{\mathbb{S}}^L L) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ H^{-1}(X - \Gamma - X_2, DL \otimes_{\mathbb{S}}^L L) & & & & \\ \downarrow r & & \downarrow r' & & \\ H^{-1}(\Delta - x, DL \otimes^L L) & \longrightarrow & H_x^0(\Delta, DL \otimes^L L) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

et il suffit de montrer que r est nulle.

6.4. D'après notre choix particulier de L (6.1), on a des isomorphismes (non canoniques)

$$\begin{aligned} H^{-1}(X - \Gamma - X_2, DL \otimes_{\mathbb{S}}^L L) &\xrightarrow{\sim} H^1(X - \Gamma - X_2, \Lambda_{X-X_1}) \\ H^{-1}(\Delta - x, DL \otimes^L L) &\xrightarrow{\sim} H^1(\Delta - x, \Lambda) \end{aligned}$$

et il s'agit de montrer que la restriction

$$r : H^1(X - \Gamma - X_2, \Lambda_{X-X_1}) \longrightarrow H^1(\Delta - x, \Lambda)$$

est nulle.

6.5. La suite exacte

$$0 \longrightarrow \Lambda_{X-X_1} \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \Lambda_{X_1} \longrightarrow 0$$

fournit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} H^1(X - \Gamma - X_2, \Lambda_{X-X_1}) & \longrightarrow & H^1(X - \Gamma - X_2, \Lambda) & \xrightarrow{v} & H^1(X_1 - x, \Lambda) \\ & \searrow r & \downarrow u & & \\ & & H^1(\Delta - x, \Lambda) & & \end{array}$$

et l'on est finalement ramené à montrer l'inclusion $\mathrm{Ker} v \subset \mathrm{Ker} u$. Celle-ci a la signification suivante :

Soit $X' \rightarrow X - \Gamma - X_2$ un revêtement galoisien de groupe \mathbb{Z}/ℓ dont la restriction à $X_1 - x$ est triviale. Alors sa restriction à $\Delta - x$ est triviale.

6.6. Prouvons cette assertion. Soient a et b des paramètres de Γ et X_2 dans X . D'après le lemme de pureté rappelé ci-dessous, le revêtement X' est donné par une équation du type

$$Z^\ell = a^{q_a} b^{q_b}, \quad q_a, q_b \in \{0, \dots, \ell - 1\}.$$

On peut supposer ce revêtement non-trivial, c'est-à-dire $q_a + q_b > 0$. Comme Γ est en position générale par rapport à X_1 , a engendre l'idéal maximal de $\mathcal{O}(X_1)$, tout comme b . Notant π_1 une uniformisante de $\mathcal{O}(X_1)$, l'équation de X' au-dessus de $X_1 - x$ est donc de la forme

$$Z^\ell = u_1 \pi_1^{q_a + q_b}$$

où u_1 est une unité de $\mathcal{O}(X_1)$. Comme par hypothèse cette équation possède une solution dans le corps $\text{Frac}(\mathcal{O}(X_1))$, on en déduit que $q_a + q_b = \ell$. Par suite, Δ étant en position générale par rapport à Γ et X_2 , la restriction de X' au-dessus $\Delta - x$ est de la forme

$$Z^\ell = u_\Delta \pi_\Delta^\ell$$

où π_Δ est une uniformisante de $\mathcal{O}(\Delta)$ et u_Δ une unité de $\mathcal{O}(\Delta)$. Mais $Z^\ell - u_\Delta$ est scindé à racines simples puisque $\mathcal{O}(\Delta)$ est strictement hensélien, et par conséquent X' est bien trivial au-dessus de $\Delta - x$.

Lemme 6.7 ([SGA 4] XIX 1.3). *Soient A un anneau strictement local régulier, $a \in \text{rad } A$ un paramètre, $X := \text{Spec}(A)$ et $U := \text{Spec}(A[1/a])$. Alors pour tout n inversible sur X , on a des isomorphismes*

$$H^1(U, \mu_n) \xleftarrow{\sim} H^0(U, \mathbb{G}_m)/H^0(U, \mathbb{G}_m)^n \xrightarrow[\text{ord}_a]{\sim} \mathbb{Z}/n.$$

Démonstration. Comme X est régulier, la restriction $\text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(U)$ est surjective, et par conséquent

$$\text{Pic}(U) = \text{Pic}(X) = 0$$

puisque X est local. Le premier isomorphisme en résulte via la suite exacte de Kummer pour n sur U . Le second isomorphisme provient quant à lui de la suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(X, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & H^0(U, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & A^* & \longrightarrow & A[1/a]^* & \xrightarrow{\text{ord}_a} & \mathbb{Z}/n \longrightarrow 0, \end{array}$$

en notant que A^* est n -divisible puisque A est strictement hensélien et n premier à la caractéristique résiduelle. \square

Références

- [SGA 4] A. Grothendieck et al., *Théorie des topos et cohomologie étale*, Lect. Notes Math. **269**, **270**, **305**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1972-1973.
- [SGA 4 $\frac{1}{2}$] P. Deligne et al., *Cohomologie étale*, Lect. Notes Math. **569**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1977.
- [SGA 5] A. Grothendieck et al., *Cohomologie ℓ -adique et fonctions L* , Lect. Notes. Math. **599**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1977.
- [SGA 6] A. Grothendieck et al., *Théorie des intersections et Théorème de Riemann-Roch*, Lect. Notes Math. **225**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.
- [V] J.-L. Verdier, *The Lefschetz fixed point formula in étale cohomology*, Proceedings of a conference on local fields, Springer-Verlag, 1967.