

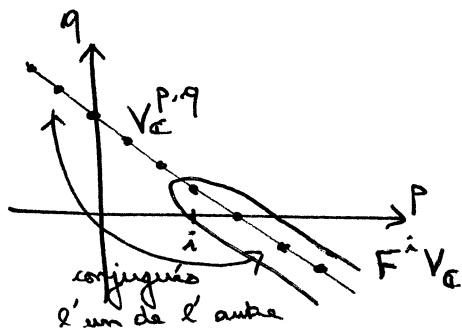
Structures de Hodge et groupes de Mumford-Tate

① Structures de Hodge

Déf : Une structure de Hodge rationnelle (\mathbb{Q} -HS en abrégé) pure de poids m est un \mathbb{Q} -espace vectoriel V de dimension finie muni d'une décomposition

$$V_{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=m} V_{\mathbb{C}}^{p,q}$$

telle que $\overline{V_{\mathbb{C}}^{p,q}} = V_{\mathbb{C}}^{q,p}$ (où $\bar{\cdot}$ désigne la conjugaison $v \otimes z \rightarrow v \otimes \bar{z}$).



Filtration de Hodge :

$$F^i V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\substack{p+q=m \\ p \geq i}} V_{\mathbb{C}}^{p,q}$$

$$\dots \supset F^i V_{\mathbb{C}} \supset F^{i+1} V_{\mathbb{C}} \supset \dots$$

Rem : On retrouve la décomposition de Hodge à partir de la filtration, puisque $V_{\mathbb{C}}^{p,q} = F^p V_{\mathbb{C}} \cap F^q V_{\mathbb{C}}$.

Déf : Une \mathbb{Q} -HS pure est une somme directe finie $\bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} V_m = V$ où V_m est une \mathbb{Q} -HS pure de poids m .

- Si $T \subset \mathbb{Z}^2$ on dit que V est de type T si $(p,q) \notin T \Rightarrow V_{\mathbb{C}}^{p,q} = 0$.
- Si V et W sont des \mathbb{Q} -HS, un morphisme de \mathbb{Q} -HS de V dans W est une application linéaire $f: V \rightarrow W$ telle que $f_{\mathbb{C}}$ envoie $V_{\mathbb{C}}^{p,q}$ dans $W_{\mathbb{C}}^{p,q}$ $\forall (p,q) \in \mathbb{Z}^2$.

Rem : La catégorie des \mathbb{Q} -HS ainsi définie est une catégorie abélienne \mathbb{Q} -linéaire.

Ex. 1 ~~choix~~ : $V = \frac{\mathbb{Q}[X]}{(X^2)}$ $V_C = \frac{\mathbb{C}[X]}{(X^2)}$

on obtient une \mathbb{Q} -HS de poids 1 en posant par exemple

$$V_C^{1,0} = \text{Vect}(1+iX)$$

$$V_C^{0,1} = \text{Vect}(1-iX)$$

On remarquera que la condition $\overline{V_C^{p,q}} = V_C^{q,p}$ empêche les $V_C^{p,q}$ d'être définis sur \mathbb{R} (sauf si $p=q$).

Ex 2 Soit X une variété projective lisse sur \mathbb{C} et X^{an} l'espace analytique associé. Alors la cohomologie de De Rham $H^m(X^{an}, \mathbb{Z})$ est naturellement une \mathbb{Z} -HS de poids m . La composante (p, q) de $H^m(X^{an}, \mathbb{C})$ est $H^q(X^{an}, \Omega_X^p)$.

Rem On obtient la notion de \mathbb{Z} -HS en remplaçant \mathbb{Q} par \mathbb{Z} dans la définition. (On demande alors à V d'être un groupe abélien de type fini. On perd évidemment la torsion dès que l'on étend les scalaires à \mathbb{Q} .)

② Quelques constructions

Soient $\begin{matrix} V \text{ de poids } m \\ W \text{ de poids } n \end{matrix}$ des \mathbb{Q} -HS.

• dual $\check{V} = \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, \mathbb{Q})$ est une \mathbb{Q} -HS de poids $-m$.

$$(\check{V})_{\mathbb{C}} \simeq \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=m} \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}^{p,q}, \mathbb{C}) =: (\check{V})_{\mathbb{C}}^{-p,-q}$$

• $V \otimes W$ est naturellement une \mathbb{Q} -HS de poids $m+n$.

$$(V \otimes W)_{\mathbb{C}}^{p,q} = \bigoplus_{\substack{n+n'=p \\ s+s'=q}} V_{\mathbb{C}}^{n,s} \otimes V_{\mathbb{C}}^{n',s'}$$

• $\text{Hom}(V, W)$ $\simeq \check{V} \otimes W$ \mathbb{Q} -HS de poids $m-n$.

• $\text{Sym}^k(V)$ et $\wedge^k V$ \mathbb{Q} -HS de poids km .

Prop : La catégorie (\mathbb{Q} -HS) des \mathbb{Q} -HS est une catégorie karnabienne neutre. (Le neutre est le foncteur d'oubli $(\mathbb{Q}\text{-HS}) \rightarrow \mathbb{Q}$ -

3

Déf: Soit V une \mathbb{Q} -HS. Une classe de Hodge de type (p,p) est un élément de $V \cap V_{\mathbb{C}}^{p,p}$. Une classe de Hodge est une classe de Hodge de type $(0,0)$.

Ex: Soient V et W des \mathbb{Q} -HS. Alors $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}})$ se décompose en $\bigoplus_{\substack{(r,s) \in \mathbb{Z}^2 \\ (r',s') \in \mathbb{Z}^2}} \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}^{r,s}, W_{\mathbb{C}}^{r',s'})$ $M := \text{Hom}(V, W)$

ce terme contribue à $M_{\mathbb{C}}^{n'-n, s'-s}$.

On voit facilement qu'un élément $c \in \text{Hom}(V, W)$ est une classe de Hodge si et seulement si c' est un morphisme de \mathbb{Q} -HS.

③ Polarisation et semi-simplicité

Déf (opérateur de Weil): Soit V une \mathbb{Q} -HS. On note $C \in \text{GL}(V_{\mathbb{R}})$ l'opérateur de Weil défini par $C_{\mathbb{C}}(v) = i^{q-p} v$ si $v \in V_{\mathbb{C}}^{p,q}$.

Rem 1: Si $v \otimes \bar{z} \in V_{\mathbb{C}}^{p,q}$, le calcul ci-dessous montre que $\overline{C_{\mathbb{C}}(v \otimes \bar{z})} = C_{\mathbb{C}}(\overline{v \otimes \bar{z}})$ donc $C_{\mathbb{C}}$ provient bien d'un $C \in \text{GL}(V_{\mathbb{R}})$.

$$\begin{aligned} \overline{C_{\mathbb{C}}(v \otimes \bar{z})} &= \overline{i^{q-p} v \otimes \bar{z}} = (-i)^{q-p} \overline{v \otimes \bar{z}} \\ &= i^{p-q} \overline{v \otimes \bar{z}} = C_{\mathbb{C}}(\overline{v \otimes \bar{z}}) \quad \text{car } \overline{v \otimes \bar{z}} \in V_{\mathbb{C}}^{q,p}. \end{aligned}$$

Rem 2: $C_{\mathbb{C}}$ agit sur $V_{\mathbb{C}}^{p,q}$ par $(-1)^{q-p} = (-1)^{p+q} = (-1)^m$, donc si V est pure de poids m on a $C = (-1)^m \text{Id}_{V_{\mathbb{R}}}$.

Déf: Soit V une \mathbb{Q} -HS pure de poids m . Une polarisation sur V est un morphisme de \mathbb{Q} -HS

$$\varphi: \underbrace{V \otimes V}_{\text{pure de poids } 2m} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{Q}(-m)}_{\text{de type } (m,m)} =: (2i\pi)^{-m} \mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$$

tel que la forme bilinéaire

$$B_{\varphi}: V_{\mathbb{R}} \times V_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$(x, y) \longmapsto (2i\pi)^m \varphi(Cx \otimes y)$
soit un produit scalaire (i.e. symétrique et déf. > 0).

Rem : Comme φ est un morphisme de \mathbb{Q} -HS, φ_C est nul sauf sur la composante de type (m, m) , i.e. sur

$$\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V_C^{i, m-i} \otimes V_C^{m-i, i}$$

On φ_C agit trivialement sur cette composante.

En particulier, pour $x, y \in V_{\mathbb{R}}$,

$$\begin{aligned} \varphi(x \otimes Cy) &= (-1)^m \varphi(C^2x \otimes Cy) \\ &= (-1)^m \varphi(Cx \otimes y) \\ &= (-1)^m B_{\varphi}(x, y) \cdot \frac{1}{(2i\pi)^m} \\ &= (-1)^m \varphi(Cy \otimes x) \end{aligned}$$

et comme C est un automorphisme de $V_{\mathbb{R}}$ on en déduit

que la forme $V_{\mathbb{R}} \times V_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto (2i\pi)^m \varphi(x \otimes y)$ est $\begin{cases} \text{alternée si } m \text{ impair} \\ \text{symétrique si } m \text{ pair.} \end{cases}$

Def : • Une \mathbb{Q} -HS de poids m est dite polarisable si elle admet une polarisation.
 • Une \mathbb{Q} -HS est dite polarisable si toutes ses composantes pures le sont.

Rem : • Si V est une \mathbb{Q} -HS polarisable et $W \subset V$ une sous- \mathbb{Q} -HS, alors W est polarisable (ONS V pure de poids m , alors on a une polarisation φ sur V , et $\varphi|_W$ est une polarisation de W).
 • De même si V_1 et V_2 sont polarisables alors $V_1 \oplus V_2$ et $V_1 \otimes V_2$ le sont aussi.

Prop : La sous-catégorie $(\mathbb{Q}\text{-HS})^{\text{pol}} \subset (\mathbb{Q}\text{-HS})$ des \mathbb{Q} -HS polarisables est une sous-catégorie tannakienne.

Prop : La catégorie tannakienne $(\mathbb{Q}\text{-HS})^{\text{pol}}$ est semi-simple.

Dém Soit V une \mathbb{Q} -HS polarisable et $W \subset V$ une sous- \mathbb{Q} -HS. ONS V pure de poids m . Soit $\varphi : V \otimes V \rightarrow \mathbb{Q}(-m)$ une polarisation. On pose

$$W^{\perp} = \{x \in V \mid \forall w \in W \varphi(x \otimes w) = 0\}.$$

(On aimerait prendre l'orthogonal pour le produit scalaire B_{φ} mais B_{φ} n'est défini que sur \mathbb{R} .)
 On vérifie alors facilement que $W^{\perp} \subset V$ est

une sous \mathbb{Q} -HS (on prend pour $(W^\perp)_{\mathbb{C}}^{p,q}$ l'intersection $V_{\mathbb{C}}^{p,q} \cap (W^\perp)_{\mathbb{C}}$ dans $V_{\mathbb{C}}$), et que $V = W \oplus W^\perp$ comme \mathbb{Q} -HS. (En particulier il faut montrer que $V_{\mathbb{C}}^{p,q} = W_{\mathbb{C}}^{p,q} \oplus (W^\perp)_{\mathbb{C}}^{p,q}$.)

④ La tore de Deligne

- On note $\mathbb{S} = \text{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$ (restriction à la Weil).
Fonctiellement, \mathbb{S} est décrit par $\mathbb{S}(A) = (A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})^{\times}$
pour toute \mathbb{R} -algèbre A .

On a $\mathbb{S}_{\mathbb{C}} := \mathbb{S} \times_{\text{Spec } \mathbb{R}} \text{Spec } \mathbb{C} \simeq \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$
donc \mathbb{S} est un tore de rang 2 sur \mathbb{R} .

- $\Gamma = \text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit sur le groupe des

caractères $X(\mathbb{S}_{\mathbb{C}}) = \text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-gros}}(\mathbb{S}_{\mathbb{C}}, \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}) \simeq \mathbb{Z}^2$
par $(p, q) \mapsto (q, p)$. Donc dans l'équivalence

(tores réels) \longleftrightarrow (gros abéliens libres de rg fini
+ α° de $\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$)

le tore de Deligne correspond à \mathbb{Z}^2 munit de l'action
de Γ qui échange les composantes p et q de $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$.

$$\begin{aligned} \mathbb{S} &= \text{Spec} \left(\mathbb{C} [z, \bar{z}, z^{-1}, \bar{z}^{-1}]^{\Gamma} \right) & z &= A + iB \\ &= \text{Spec} \left(\mathbb{R} [A, B, (A^2 + B^2)^{-1}] \right) & \bar{z} &= A - iB \end{aligned}$$

On note :

$$a) \quad \gamma \text{ et } \bar{\gamma} : \underset{\text{SI}}{\mathbb{S}_{\mathbb{C}}} \longrightarrow \underset{\text{SI}}{\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}} \quad \text{les caractères}$$

$$\text{Spec } \mathbb{C} [z, \bar{z}, z^{-1}, \bar{z}^{-1}] \longrightarrow \text{Spec } \mathbb{C} [U, U^{-1}]$$

définis par $\gamma(U) = z$ et $\bar{\gamma}(U) = \bar{z}$. Ils engendrent $X(\mathbb{S}_{\mathbb{C}}) \simeq \mathbb{Z}^2$.

$$b) \quad N(\gamma \bar{\gamma}) : \mathbb{S} \longrightarrow \underset{\text{SI}}{\mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}} \quad \text{le caractère défini}$$

$$\text{Spec } \mathbb{R} [U, U^{-1}]$$

par $N(U) = A^2 + B^2$.

$N(\mathbb{R}) : \mathbb{S}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{C}^{\times} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times}$ est donné par $x \mapsto |x|^2$.

"norme"

On a $N_{\mathbb{C}} = \mathbb{Z}\bar{z}$ et on note $\text{Ker } N = U = \text{Spec} \left(\frac{\mathbb{R}[A, B]}{A^2 + B^2 - 1} \right)$.

U est un tore réel de rang 1 dont le groupe des \mathbb{R} -points s'identifie naturellement au groupe des nombres complexes de module 1.

c) $\mu : G_{m, \mathbb{C}} \rightarrow S_{\mathbb{C}}$ le cocaractère défini par $\mu(z) = U$ et $\mu(\bar{z}) = 1$ avec les notations ci-dessus.

Il est caractérisé par $\begin{cases} z \circ \mu = \text{id}_{G_{m, \mathbb{C}}} \\ \bar{z} \circ \mu \text{ trivial} \end{cases}$,

et donné fonctivement par $\mu(A) : A^{\times} \rightarrow A^{\times} \times A^{\times}$
 $a \mapsto (a, \bar{a})$

pour toute \mathbb{C} -algèbre A .

d) $\omega : G_{m, \mathbb{R}} \rightarrow S$
 $U \hookrightarrow A$
 $O \hookrightarrow B$

$\omega(\mathbb{R})$ est l'inclusion naturelle $\mathbb{R}^{\times} \hookrightarrow \mathbb{C}^{\times}$.

Par ailleurs si A est une \mathbb{C} -algèbre, $\omega_{\mathbb{C}}(A) : G_{m, \mathbb{C}}(A) \rightarrow S_{\mathbb{C}}(A) = G_{m, \mathbb{C}}^{\mathbb{Z}}(A)$
est le morphisme diagonal $a \mapsto (a, a)$.

⑤ Notion de structure de Hodge en termes du tore de Deligne

On note $\Gamma = \text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et on rappelle qu'il agit sur $X(S_{\mathbb{C}}) \simeq \mathbb{Z}^2$ par $(p, q) \mapsto (q, p)$.

On sait (voir exposé de Bakhtien) que l'on a une équivalence de catégories

$$\text{Rep}_{\mathbb{R}}(S) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{l} \mathbb{R}\text{-ev de dim}^{\circ} \text{ finie } V + \mathbb{Z}^2\text{-gradua}^{\circ} \text{ de } V_{\mathbb{C}} \\ \text{telle que l'ac}^{\circ} \text{ de } \Gamma \text{ sur } V_{\mathbb{C}} \text{ (par conjugaison)} \\ \text{soit compatible avec l'ac}^{\circ} \text{ de } \Gamma \text{ sur } \mathbb{Z}^2 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \text{Rep}_{\mathbb{R}}(S) &\longleftrightarrow \left(\begin{array}{l} \mathbb{R}\text{-ev de dim}^{\circ} \text{ finie } V + \text{décomposition} \\ V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{(p, q) \in \mathbb{Z}^2} V_{\mathbb{C}}^{p, q} \text{ telle que } \overline{V_{\mathbb{C}}^{p, q}} = V_{\mathbb{C}}^{q, p} \end{array} \right) \\ &\longleftrightarrow (\mathbb{R}\text{-HS}). \end{aligned}$$

• Se donner une \mathbb{R} -HS revient donc à se donner un \mathbb{R} -ev V de \dim finie et un morphisme de \mathbb{R} -groupes algébriques $h: \mathbb{S} \rightarrow \underline{GL}(V)$.

De plus, la \mathbb{R} -HS est de poids m ssi l'action correspondant à $h \circ w: \mathbb{G}_{m, \mathbb{R}} \rightarrow \underline{GL}(V)$ est donnée par $a \mapsto a^{-m} \text{id}$.

• Se donner une \mathbb{Q} -HS revient à se donner un \mathbb{Q} -ev V de \dim finie et une \mathbb{R} -HS sur $V_{\mathbb{R}}$, telle que la décomposition en poids $V = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} V_m$ soit définie sur \mathbb{Q} . On obtient

finallement une équivalence de catégories

$$(\mathbb{Q}\text{-HS}) \iff \left(\begin{array}{l} V \in \text{Vec}_{\mathbb{Q}} + \text{morphisme } h: \mathbb{S} \rightarrow \underline{GL}(V_{\mathbb{R}}) \text{ de poids } \\ \text{tel que } h \circ w: \mathbb{G}_{m, \mathbb{R}} \rightarrow \underline{GL}(V_{\mathbb{R}}) \text{ soit défini sur } \mathbb{Q} \end{array} \right)$$

Rem 1: La convention usuelle est la suivante.

L'espace $V_{\mathbb{C}}^{p, q}$ de la décomposition de Hodge est l'espace $V(\chi)$ pour le caractère $\chi = \bar{z}^{-p} z^{-q} \in X(\mathbb{S}_{\mathbb{C}})$.

Rem 2: Soit V une \mathbb{Q} -HS. On a un morphisme de groupes $h(\mathbb{R}): \mathbb{S}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{C}^{\times} \rightarrow \underline{GL}(V_{\mathbb{R}})$. L'élément $h(i) \in \underline{GL}(V_{\mathbb{R}})$ agit sur $V_{\mathbb{C}}^{p, q}$ par multiplication par $i^{-p} (i)^{-q} = i^{q-p}$. Donc $h(i) = C$ (l'opérateur de Weil)!

⑥ Groupe de Mumford-Tate et groupe de Hodge

Déf: Soit V une \mathbb{Q} -HS, correspondant à un morphisme $h: \mathbb{S} \rightarrow \underline{GL}(V_{\mathbb{R}})$. Le groupe de Mumford-Tate $MT(V)$ (resp. le groupe de Hodge) est le plus petit $Hg(V)$

\mathbb{Q} -sous-groupe algébrique (fermé) $M \subset \underline{GL}(V)$ tel que h se factorise en

$$h: \mathcal{S} \longrightarrow \Gamma_{\mathbb{R}} \longrightarrow \underline{GL}(V_{\mathbb{R}})$$

(resp. tel que $h|_{\mathcal{U}}$ se factorise en

$$h|_{\mathcal{U}}: \mathcal{U} = \text{Ker } N \longrightarrow \Gamma_{\mathbb{R}} \longrightarrow \underline{GL}(V_{\mathbb{R}})$$

Rem 1 : Le groupe de Hodge est parfois appelé "groupe de Mumford-Fate spécial".

Rem 2 : On peut aussi définir le groupe de Mumford-Fate $\text{MT}(V)$ via μ (le cocaractère défini en ④). En effet, h se factorise par $\Gamma_{\mathbb{R}}$ soit $h_{\text{op}}: \mathbb{G}_{m, \mathbb{C}} \longrightarrow \underline{GL}(V_{\mathbb{C}})$ se factorise par $\Gamma_{\mathbb{C}}$.

Rem 3 : $\text{MT}(V)$ existe bien : c'est l'intersection de tous les \mathbb{Q} -sous-groupes algébriques $M \subset \underline{GL}(V)$ tels que $h(\mathcal{S}) \subset \Gamma_{\mathbb{R}}$. (idem pour $\text{Hg}(V)$).

Rem 4 : On a un morphisme naturel de schémas $\underline{GL}(V_{\mathbb{R}}) \xrightarrow{p} \underline{GL}(V)$.

$\text{MT}(V)$ est aussi l'adhérence de Zariski dans $\underline{GL}(V)$ de l'image du morphisme composé $\mathcal{S} \xrightarrow{h} \underline{GL}(V_{\mathbb{R}}) \xrightarrow{p} \underline{GL}(V)$, i.e. $\text{MT}(V) = \overline{p(h(\mathcal{S}))}$. De même $\text{Hg}(V) = \overline{p(h(\mathcal{U}))}$.

En particulier, $\text{MT}(V)$ et $\text{Hg}(V)$ sont connexes.

⑦ Interprétation tensorielle

Soit V une \mathbb{Q} -HS et soit $h_V: \mathcal{S} \longrightarrow \underline{GL}(V_{\mathbb{R}})$ le morphisme correspondant. Soit T une construction tensorielle obtenue à partir de V , i.e. T est une somme directe finie de termes

de la forme $T^{a_i, b_i}(v) = v^{\otimes a_i} \otimes (\check{v})^{\otimes b_i}$.

T est naturellement une \mathbb{Q} -HS, on note $h_T: S \rightarrow \underline{GL}(T_{\mathbb{R}})$ le morphisme correspondant. Le groupe algébrique $\underline{GL}(V)$ agit naturellement sur T , donc $\Pi T(V)$ aussi.

- Prop: ① Soit $W \subset T$ un sous- \mathbb{Q} -ev. Alors W est une sous- \mathbb{Q} -HS si et seulement si il est stable sous $\Pi T(V)$.
- ② Un élément $t \in T$ est une classe de Hodge de type (p, p) (i.e. $t \in T_{\mathbb{C}}^{p,p}$) si et seulement si la droite $\mathbb{Q} \cdot t$ est stable sous $\Pi T(V)$.
- ③ Un élément $t \in T$ est une classe de Hodge si et seulement si t est fixe sous $\Pi T(V)$.

Preuve

① \Leftarrow Si W est stable sous $\Pi T(V)$, alors $W_{\mathbb{R}}$ est stable sous $\Pi T(V)_{\mathbb{R}}$, donc sous l'action de S , ce qui prouve que W est une sous- \mathbb{Q} -HS de T .

\Rightarrow Réciproquement, supposons que W est une sous- \mathbb{Q} -HS de T , ou ce qui revient au même, que $W_{\mathbb{R}}$ est stable sous l'action de S . Notons $H \subset \underline{GL}(V)$ le stabilisateur de W , défini factoriellement par $H = \{g \in \underline{GL}(V) \mid g.W = W\}$.

H est un sous- \mathbb{Q} -groupe algébrique de $\underline{GL}(V)$. Comme $W_{\mathbb{R}}$ est stable sous l'action de S , on voit, par définition de H , que le morphisme $S \rightarrow \underline{GL}(V_{\mathbb{R}})$ se factorise par $H_{\mathbb{R}}$. On en déduit que $\Pi T(V) \subset H$ par définition de $\Pi T(V)$. Donc $\Pi T(V)$ stabilise W .

② D'après ①, $\mathbb{Q} \cdot t$ est stable sous $\Pi T(V)$ si et seulement si c'est une sous- \mathbb{Q} -HS. Si $t \in T \cap T_{\mathbb{C}}^{p,p}$ il est clair que $\mathbb{Q} \cdot t$ est une sous- \mathbb{Q} -HS. Réciproquement, si $\mathbb{Q} \cdot t$ est une sous- \mathbb{Q} -HS, on voit que t est une classe de Hodge de type (p, p) car une \mathbb{Q} -HS de dimension 1 a

nécessairement une décomposition de Hodge réduite à un terme de type (p,p) pour un certain p . (Si $W_C^{p,q} \neq 0$ pour $p \neq q$ alors $W_C^{q,p} = \overline{W_C^{p,q}}$ est non nul aussi et la dim^o est ≥ 2 .)

③. S agit sur $T_C^{0,0}$ via le caractère trivial $\bar{z}^0 \bar{z}^0$, donc il agit trivialement sur toute classe de Hodge $t \in T$. On en déduit que le morphisme $S \rightarrow GL(V_{\mathbb{R}})$ se factorise par $(G_t)_{\mathbb{R}}$ où $G_t \subset GL(V)$ est le stabilisateur de t . Par définition de $\Pi(V)$, on a donc $\Pi(V) \subset G_t$, si bien que $\Pi(V)$ fixe toute classe de Hodge.

• Réciproquement, si $t \in T$ est fixe sous $\Pi(V)$, on particulier $\mathbb{Q} \cdot t$ est stable donc d'après ② t est une classe de Hodge de type (p,p) . OPS V pure de poids $m = 2p$ et si $m \neq 0$, $\Pi(V)$ contient $G_{m,\mathbb{Q}}(f+bas)$ donc t ne peut être invariant.

Conclusion: Le foncteur $Rep_{\mathbb{Q}}(\Pi(V)) \rightarrow (\mathbb{Q}\text{-HS})$
 $(\rho: \Pi(V) \rightarrow GL(W)) \mapsto (\rho \circ h: S \rightarrow GL(W))$
est pleinement fidèle. Son image essentielle est la sous-catégorie tannakienne de $(\mathbb{Q}\text{-HS})$ engendrée par V , i.e. la sous-catégorie $\langle V \rangle^{\otimes}$ dont les objets sont les sous-quotients d'objets T comme ci-dessus.
D'où $Rep_{\mathbb{Q}}(\Pi(V)) \xrightarrow{\sim} \langle V \rangle^{\otimes} \subset (\mathbb{Q}\text{-HS})$.

Dém: voir [Mo04] (4.5).

⑧ Propriétés élémentaires

Prop 1: $\Pi(V)$ et $Hg(V)$ sont connexes. (déjà vu).

Prop 2: Si V est polarisable, alors $\Pi(V)$ et $Hg(V)$ sont réductifs.

11

Dém On a vu que $\text{Rep}_{\mathbb{Q}}(\text{MT}(V)) = \langle V \rangle^{\otimes} \subset (\mathbb{Q}\text{-HS})^{\text{tot}}$,
 et que $(\mathbb{Q}\text{-HS})^{\text{tot}}$ est une catégorie tannakienne
 semi-simple. La catégorie $\text{Rep}_{\mathbb{Q}}(\text{MT}(V))$ est donc
 semi-simple, ce qui entraîne que $\text{MT}(V)$ est réductif.
 (Il est connexe.) On en déduit que $\text{Hg}(V)$ est réductif
 car c'est un sous-groupe normal de $\text{MT}(V)$ (cf. + bras).

Prop 3: Soit V une \mathbb{Q} -HS pure de poids m .

- a) $\text{Hg}(V)$ est un sous-groupe normal de $\text{MT}(V)$.
- b) $\text{Hg}(V) \subset \text{SL}(V)$
- c) Si $m=0$, $\text{Hg}(V) = \text{MT}(V)$ (en particulier $\text{MT}(V) \subset \text{SL}(V)$).
- d) Si $m \neq 0$, $\text{MT}(V)$ contient $G_{m, \mathbb{Q}} \cdot \text{Id}$.

Il est alors engendré par $G_{m, \mathbb{Q}}$ et $\text{Hg}(V)$.

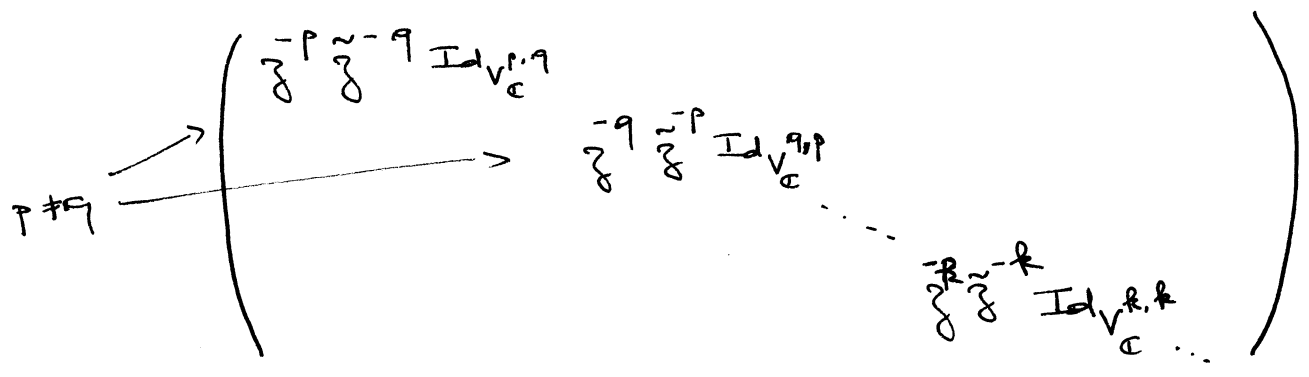
De plus le morphisme induit $G_{m, \mathbb{Q}} \times \text{Hg}(V) \rightarrow \text{MT}(V)$
 est surjectif à noyau fini.

Dém

a) Notons $H \subset \underline{\text{GL}}(V)$ la normalisateur de $\text{Hg}(V)$. (C'est
 un \mathbb{Q} -sous-groupe algébrique.) Comme U est le
 noyau de N , il est distingué dans S et on en
 déduit facilement que $h(S) \subset H_{\mathbb{R}}$. Par définition
 de $\text{MT}(V)$, ceci implique $\text{MT}(V) \subset H$, cf.

b) En la définition de $\text{Hg}(V)$, il suffit de montrer que
 le morphisme $U \rightarrow \underline{\text{GL}}(V_{\mathbb{R}})$ se factorise par $\underline{\text{SL}}(V_{\mathbb{R}})$.

Il suffit de la vérifier pour les \mathbb{C} -points. On un
 couple $(z, \bar{z}) \in S(\mathbb{C})$ agit sur $V_{\mathbb{C}}^{p, q}$ par $\bar{z}^{-1} \bar{z}^{-q}$,
 donc la matrice de $h(z, \bar{z})$ dans une base convenable
 de $V_{\mathbb{C}}$ est



et son déterminant est $(z\tilde{z})^{-m \frac{\dim V}{2}}$.

Si $z\tilde{z}=1$ on a donc $h(z, \tilde{z}) \in SL(V_C)$.

c) Il suffit de vérifier que $h(S)$ et $h(U)$ ont les mêmes \mathbb{C} -points dans $GL(V_{\mathbb{R}})$. On a si $m=0$ et si $(z, \tilde{z}) \in S(\mathbb{C})$, $h(z, \tilde{z})$ agit sur $V_C^{p, -p}$ par $\begin{pmatrix} z^{-p} & \\ & \tilde{z}^p \end{pmatrix}$ donc $h(z, \tilde{z}) = h(1, \frac{1}{z}) \in h(U)$ si $z \in \mathbb{C}$ est choisi tel que $z^2 = \frac{z}{\tilde{z}}$. (rappel: $U(\mathbb{C}) = \{(z, \tilde{z}) \in \mathbb{C}^2 \mid z\tilde{z} = 1\}$).

d) Si $z \in \mathbb{R}^x$, alors $h(z) = z^{-m} Id_V$, donc $h(S)$ contient l'image de $G_{m, \mathbb{R}} \rightarrow GL(V_{\mathbb{R}})$, qui est dense $a \mapsto a^m Id$ dans $G_{m, \mathbb{Q}} \cdot Id$ si $m \neq 0$. Donc dans ce cas, $G_{m, \mathbb{Q}} \cdot Id \subset \Gamma\Gamma(V)$. Le fait que $G_{m, \mathbb{Q}} \cdot Id$ et $Hg(V)$ engendrent $\Gamma\Gamma(V)$ résulte du fait que $G_{m, \mathbb{R}}$ et U engendrent S . On en déduit que le morphisme induit $G_{m, \mathbb{Q}} \times Hg(V) \rightarrow \Gamma\Gamma(V)$ (bien déf. car $G_{m, \mathbb{Q}}$ est dans le centre) est surjectif. On voit facilement que le noyau s'identifie à μ_m si $m = \dim V$.

Prop 4: Si V_1 et V_2 sont des \mathbb{Q} -HS, alors $MT(V_1 \oplus V_2) \subset \Gamma\Gamma(V_1) \times \Gamma\Gamma(V_2)$ comme sous-groupes de $GL(V_1 \oplus V_2)$, et les projections $p_i: MT(V_1 \oplus V_2) \rightarrow \Gamma\Gamma(V_i)$ sont surjectives.

Démo conséquence immédiate des définitions.