Exemples de Groupes de Mumford-Tate

Dajano Tossici

Rencontre ANR, ARIVAF, 8-10 Novembre 2011, Paris, IHP

Le but de ces notes est de donner des exemples du groupes de Mumford-Tate, oú on le peut calculer explicitament ou donner des inormations plus precis. On commencent en rappellent les dédinitions et des généralités sur les structures de Hodge et sur les groupes de Mumford-Tate. Aprés on donne des encadrements pour le groupe de Mumford-Tate dans le cas de structure de Hodge polarisable et on traite plus en detail, dans le paragraph §3, le cas des courbes elliptiques. Dans le dérniere on enounce la conjecture de Hodge et on montre le lien entre cette conjecture et le groupe de Mumford-Tate. Et on montre la preuve de la conjecture pour multiples des courbes elliptiques. On suive essentiellement les notes de Moonen [?] and [?].

1. Structures de Hodge et groupe de Mumford-Tate

Définition 1.1. Une $\mathbb{Q}$-*structure de Hodge de poid* m est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie avec une decomposition

$$V_{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \oplus_{p+q=m} V_{\mathbb{C}}^{p,q}$$

tel que

$$\overline{V_{\mathbb{C}}^{p,q}} = V_{\mathbb{C}}^{p,q}.$$

Une $\mathbb{Q}$-structure de Hodge pure est une summande directe de structures de Hodge de poid m en faisant varier m.

Un morphisme entre deux structures de Hodge est un morphisme d'éspaces vectorials tel que sa $\mathbb{C}$-extension de scalaires envoie la composante (p,q) dans la composante (p,q).

Soit $\mathbb{S}$ la restriction de Weil $\mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\,\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$. On remarque que $\mathbb{S} \simeq \mathrm{Spec}(\mathbb{R}[S,T,1/S^2+T^2])$ comme schéma et la loi de groupe est donné par

$$S \mapsto S\otimes S - T\otimes T \text{ et } T \mapsto S\otimes T + T\otimes S.$$

On observe que l'isomorphisme

$$\mathbb{S}_{\mathbb{C}} \longrightarrow (\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}})^2$$

est donné par $S \mapsto S+iT$ and $T \mapsto S-iT$.

Enfin on peut observer que le groupe des caractéres de $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}$ est généré par $S+iT$ and $S-iT$. Et clairement la conjugation sur $\mathbb{C}$ permutes les deux caractéres. Sur les $\mathbb{R}$-points de $\mathbb{S}$ les deux caractéres sont l'identité et la conjugation. Donc le groupe des caractéres de $\mathbb{S}$ (qui sont les caractéres de $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}$ invariants pour conjugation) est généré par S^2+T^2, i.e. la moltiplication des deux caractéres. On appélle ce caractére Norme Nm. En fait la Norme sur les $\mathbb{R}$-points de $\mathbb{S}$ est la norms usuelle sur $\mathbb{C}$. On définit $w : \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{S}$ comme le morphisme donné par $S \longrightarrow S$ and $T \longrightarrow 0$.

En utilisant la classifications des répresentations des groupes de type multiplicatif on peut montrer que donner une structure de Hodge de poid m est equivalent á donner un $\mathbb{Q}$-éspace vectoriel avec un morphisme

$$h : \mathbb{S} \longrightarrow GL_{\mathbb{R}}(V_{\mathbb{R}})$$

tel que le morphisme $h\circ w : \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}} \longrightarrow GL_{\mathbb{R}}(V_{\mathbb{R}})$ est donné, sur le points, par $z \mapsto z^{-n}Id$. Pour une structure de Hodge pure on démande que $h\circ w$ est defini sur $\mathbb{Q}$. On a que $\mathbb{S}_{\mathbb{C}} \simeq (\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}})^2$ agit comme $z \mapsto z_1^{-p} z_2{}^{-q} z$ sur $V_{\mathbb{C}}^{p,q}$.

On appélle *classe de Hodge de type* (p,p) un élément de V qui est dans $V_{\mathbb{C}}^{p,p}$; si $p=0$ on dit simplement *classe de Hodge*. C'est facile á prouver le suivant lemme.

Lemme 1.2. *Soit* V *une* $\mathbb{Q}$-*structure de Hodge de poid* m *et soit* $v \in V$. *Alors*
- v *est une classe de Hodge si et seulement si est* v *est invariant par* $\mathbb{S}$.

– *v est une classe de Hodge de type (p,p) si et seulement si est $\mathbb{Q}\cdot v$ est stable par $\mathbb{S}$. Et le caractére induit est $(Nm)^{-p}$ et donc il ne depend pas par v.*

Finalement on définit $C := h(i) : V_{\mathbb{R}} \longrightarrow V_{\mathbb{R}}$. Sur $V_{\mathbb{C}}^{p,q}$ on a que C agit comme moltiplication par i^{q-p}.

Remarque 1.3. La catégorie $\mathbb{Q}HS$ des structures de Hodge pures est une catégorie abelienne. C'est facile á voir que dans la categorie $\mathbb{Q}\boldsymbol{HS}$ on peut faire toutes les constructions que on fait en algèbre lineaire.

Exemple 1.4. La structure de Tate $\mathbb{Q}(n)$ est définie comme l'éspace vectoriel $(2\pi i)^n\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{C}$ avec structure de Hodge purement de type $(-n,-n)$. Dans ce cas on $GL_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}(n)) \simeq \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}$ et le morphisme h est $(Nm)^{2n}$. On remarque que, si $n \geq 0$, $\mathbb{Q}(n) = \mathbb{Q}(1)^{\otimes n}$ et $\mathbb{Q}(-n) = (\mathbb{Q}(1)^{\otimes n})^{\vee}$. Pour toute structure de Hodge V on définit $V(n)$, avec $n \in \mathbb{Z}$, comme $V \otimes \mathbb{Q}(n)$. Si V a poid m alors $V(r)$ a poid $m-2n$. On a un isomoprhisme d'éspaces vectoriels

$$V(n)_{\mathbb{C}} \longrightarrow V_{\mathbb{C}}$$

donné par $v \otimes (2\pi i)^n \to (2\pi i)^n v$. Sous ce isomoprhisme on identifie $V(n)_{\mathbb{C}}^{p,q}$ avec $V_{\mathbb{C}}^{p+n,q+n}$. Donc si v a degree (p,p) in V alors $(2\pi i)^p v$ a degree $(0,0)$ in $V(p)$. En particulier si $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$ a degree (r,r) (on dit aussi de degree r), i.e. $f(V^{p,q}) \subseteq W^{p+r,q+r}$, alors $(2\pi i)^r f \in \mathrm{Hom}(V, W(r)) \simeq \mathrm{Hom}(V(-r), W)$ a degré $(0,0)$, i.e. il est un morphisme de structures de Hodge.

Définition 1.5. Soit V une structure de Hodge définit par un morphisme $h : \mathbb{S} \longrightarrow GL_{\mathbb{R}}V$. On appélle

- *groupe de Mumford-Tate de V* le plus petit sous-groupe algébrique $MT(V)$, définit sur $\mathbb{Q}$, de $GL_{\mathbb{R}}(V)$ tel que h factorize par $MT(V)$;
- *groupe de Mumford-Tate special (ou groupe de Hodge) de V* le plus petit subgroupe algébrique $Hg(V)$, définit sur $\mathbb{Q}$, de $GL_{\mathbb{R}}(V)$ tel que la restriction de h á $\mathbb{U} := \ker Nm$ factorize par $Hg(V)$.

Lemme 1.6. *Soit V une structure de Hodge de poid m. On a que*
(i) $MT(V)$ est connexe ;
(ii) si $m \neq 0$ alors $MT(V)$ contiens $\mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}$.
(iii) $Hg(V)$ est contenu dans $SL(V)$;
(iv) si $m = 0$ alors $Hg(V) = MT(V)$, et si $m \neq 0$ alors $MT(V)$ est un presque product direct de $\mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}$ and $MT(V)$, i.e. il a une isogénie $\mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}} \times Hg(V) \longrightarrow MT(V)$.

Démonstration. (i) est trivial parce que $\mathbb{S}$ est connexe. (ii). Si $m \neq 0$, $h \circ w$ donne un'immersione de $\mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}$ dans $MT(V)$. (iii). C'est facil á montrer que le déterminant $\mathbb{S} \to \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}$ de la représentation que définit V est donné par $(Nm)^{-\frac{m \dim(V)}{2}}$. Et Donc $Hg(V)$ est dans le noyeau du dterminant. (iv). On a que $\mathbb{S}$ est généré par $\mathbb{U}$ et $\mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}$ et si $m=0$ on a que $h \circ w = 0$ et donc $MT(V) = Hg(V)$.

Si $m \neq 0$ alors on a, en utilisant (ii), un morphisme naturel

$$\mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}} \times Hg(V) \longrightarrow MT(V).$$

Le morphisme est clairement surjectif avec le noyau fini, car le noyau est dans l'intersection de $Sl(V)$ avec le groupe de matrices scalaires. □

Exemple 1.7. En appliquent le lemme on a

$$MT(\mathbb{Q}(0)) = Hg(\mathbb{Q}(0)) = 0$$

et

$$MT(\mathbb{Q}(n)) = \mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}} \text{ et } Hg(\mathbb{Q}(n)) = 0$$

si $n \neq 0$.

Proposition 1.8. *Soit V une $\mathbb{Q}$-structure de Hodge. Pour une collection $\mu = \{(a_i, b_i)\}_{i=1,\ldots,t}$ des couples des entiers positifs on considérer la structure de Hodge*

$$T^\mu := \oplus_{i=1}^t V^{\otimes a_i} \otimes (V^\vee)^{b_i}.$$

Soit W un sous éspace vectoriel de T^μ.

(i) W est une sous structure de Hodge si et seulement si il est stable par l'action naturelle de $MT(V)$;
(ii) le groupe $MT(T^\mu)$ est l'image de $MT(V)$ par le morphisme naturel $r : GL(V) \longrightarrow GL(T^\mu)$
(iii) $v \in W$ est une classe de Hodge si et seulement si il est invariant par $MT(V)$;
(iv) $v \in W$ est une classe de Hodge de type (p,p) si et seulement si $\mathbb{Q} \cdot v$ est stable par $MT(V)$. Et le caractére induit ne depend pas par v.

Démonstration. L'assertion (i) est claire par les définitions.

Pour (ii) on observe que la structure de Hodge T^μ est donnée par la représentation $r \circ h$.

Donc (iii) et (iv) suivent par (ii) et 1.8. □

Exemple 1.9. Par la partie (ii) de la Proposition on a que $MT(V^\vee)$ est isomorphe à $MT(V)$ parce que r est le morphisme que à une matrice A associe la matrice $(A^t)^{-1}$. Egalement on a l'isomorphisme $M(T(V^n)) \simeq MT(V)$.

Corollaire 1.10. *Soit V une structure de Hodge donnée par une représentation $h : \mathbb{S} \longrightarrow GL_\mathbb{R}(V)$. Le foncteur naturel $Rep(MT(V)) \longrightarrow \mathbb{Q}HS$ qui associe une représentation $\varrho : MT(V) \longrightarrow GL_\mathbb{Q}(W)$ la structure de Hodge associé $\varrho_\mathbb{R} \circ h$ est pleinement fidéle. L'image est la sous catégorie plein $\langle V \rangle^\otimes$ qui a pour objects les structure de Hodge isomorphes á un sousquotient de quelques $T^\vee$ au-dessus.*

Démonstration. Soient W_1 et W_2 deux représentation de $MT(V)$. On doit montrer que

$$\mathrm{Hom}_{MT(V)-rep}(W_1, W_2) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}HS}(W_1, W_2).$$

Maintenaint on a que $MT(V)$ agit sur la structure de Hodge $\mathrm{Hom}(W_1, W_2)$ comme $(g \cdot \varphi)x = g(\varphi(g^{-1}x))$. On remarque que $Hom_{\mathbb{Q}HS}(W_1, W_2)$ est le groupe des classes de Hodge. Et donc par la proposition il correspond aux éléments de $\mathrm{Hom}(W_1, W_2)$ fixés par $MT(V)$. Ces éléments sont precisement les morphisms de représentations.

La deuxime assertion suive parce que tout représentation de $MT(V)$ est isomorphe un sous quotient de T^μ pour quelque μ (Deligne 3.1). □

On finis la section avec des bornes général du groupes de Mumford-Tate.

Lemme 1.11. *Soit $D := End_{\mathbb{Q}\boldsymbol{HS}}(V)$. On a que*

$$MT(V) \subseteq GL_D(V).$$

De plus, soit F le centre de D alors, si Z_M est le centre connexe de $MT(V)$, on a que

$$Z_M \subseteq GL_F(F) = T_F := Res_{F/\mathbb{Q}} \mathbb{G}_{m,F}.$$

Démonstration. Pour la Proposition 1.8 on a que

$$D := End_{\mathbb{Q}\boldsymbol{HS}}(V) = (End_\mathbb{Q}(V))^{MT(V)}. \tag{1}$$

En particulier on a que

$$MT(V) \subseteq GL_D(V).$$

De plus il suive encore par (1) que pour tout $\mathbb{Q}$-algbre R on a que

$$Z_M(R) \subseteq (F \otimes R)^*.$$

Donc

$$Z_M \subseteq T_F.$$

□

Remarque 1.12. Si V est de poid pur on a aussi

$$D = (End_{\mathbb{Q}}(V))^{Hg(V)},$$

car le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}$ dans $MT(V)$ agit comme la multiplication par un scalaire su V et donc trivialement sur $End_{\mathbb{Q}}(V)$.

2. Groupe de Mumford-tate des structure de Hodge polarizables

Définition 2.1. Une $\mathbb{Q}$-structure de Hodge V de poid n est dit *polarisable* s'il existe un morphisme de structures de Hodge $\varphi : V \otimes V \longrightarrow \mathbb{Q}(-n)$ tel que la forme bilineaire $\varphi_C : V_{\mathbb{R}} \times V_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $(x, y) \mapsto (2\pi i)^n \varphi(x \otimes Cy)$ est symmetrique et definie positive.

Lemme 2.2. *Si on est dans le cas de la définition alors φ est alternée si n est impair et symmetrique si n est pair.*

Démonstration. Car φ est un morphisme de structures de Hodge et C agit trivialement sur $\mathbb{Q}(-n)$, on a que, pour tous $x, y \in V$, $\varphi(Cx \otimes Cy) = \varphi(x \otimes y)$. Donc, pour la symmetrie de φ_C, on a

$$\varphi(x \otimes y) = \varphi(Cx \otimes Cy) = \varphi_C(Cx, y) = \varphi_C(y, Cx) = \varphi(y \otimes C^2 x) = \varphi(y \otimes (-1)^n x) = (-1)^n \varphi(y \otimes x).$$

□

Soit $\psi : V \times V \longrightarrow \mathbb{Q}$ une forme bilineaire. On définit

$$GU(V, \psi) := \{g \in GL(V) | \psi(gx, gy) = \nu(g)\psi(x, y) \text{ avec } \nu \text{ un caractére}\}$$

Ce $\mathbb{Q}$-groupe algébrique est aussi appelé *groupe des similitude orthogonales $GO(V, \psi)$* si φ est symmetrique et *groupe des similitude simplectique Gsp* si ψ est alterné. On a le suite exacte

$$1 \longrightarrow U(V, \psi) \longrightarrow GU(V, \psi) \xrightarrow{\nu} \mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}} \longrightarrow 1$$

oú $U(V, \psi)$ est le groupe ortogonal, si φ est symmetrique, et le groupe symplectique, si φ est alternée.

Lemme 2.3. *Soit V un espace de Hodge polarisable de poid n and soit φ une polarisation. Alors, si $\tilde{\varphi} = (2\pi i)^n \varphi$*

$$MT(V) \subseteq GU(V, \tilde{\varphi}).$$

De plus le caractre de $MT(V)$ induit par ν ne depend pas de la polarisation.

Démonstration. On remarque que $\tilde{\varphi}$ est une classe de Hodge de type $(-n, -n)$ dans $(V^\vee)^{\otimes 2}$. Donc par la Proposition 1.8 on que a que $\mathbb{Q} \cdot \tilde{\varphi}$ est stable par $MT(V)$, i.e. $MT(V) \subseteq GU(V, \tilde{\varphi})$, et le caractére μ ne depend pas de la polarisation car $\mathbb{S} \longrightarrow MT(V)_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\mu} \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}$ est Nm^{-n}. □

Donc si V est polarisable de poid n, en utilisant Lemma 1.11 et Remarque 1.12, on a que

$$MT(V) \subseteq GU_D(V, \varphi) := GU(V, \varphi) \cap GL_D(V),$$

oú $GL_D(V)$ est le groupe des automorphismes D-invariants. Et si V est de poid pur on a

$$Hg(V) \subseteq U_D(V, \varphi) := U(V, \varphi) \cap GL_D(V).$$

Théorme 2.4. *La catégorie $\mathbb{Q}\boldsymbol{HS}$ des $\mathbb{Q}$-structures de Hodge polarisables est une categorie semisimple. De plus si V est polarisable alors $Hg(V)$ et $MT(V)$ sont reductives.*

Démonstration. Pour la prémière assertion il suffit de prouver que tout $\mathbb{Q}$-structure de Hodge de poid n est summande directe des structures de Hodge simples. Soit $W \subseteq V$ un sous espace vectoriel. On considér

$$W^\perp := \{x \in V | \varphi(x, w) = 0 \text{ pour tout } w \in W\}.$$

On a que $W^\perp$ est une sous $\mathbb{Q}$-structure de Hodge car il est le noyeau du morphisme

$$V \longrightarrow V^\vee(-n) \longrightarrow (V^\vee / W^\vee)(-n),$$

oú le prémier morphism est donné par $v \mapsto \varphi(v, -)$. Maintenant on a que, car $W_{\mathbb{R}}$ est stable sous C,

$$W^{\perp} \otimes \mathbb{R} = \{x \in V_{\mathbb{R}} | \varphi_C(x, w) = 0 \text{ pour tout } w \in W\}.$$

Donc on a $W \oplus W^{\perp} = V$. Si W et $W^{\perp}$ sont simples on a fini, sinon on continue.

Car $Hg(V)$ est normal dans $MT(V)$, il suffit de prouver la deuxime assertion pour $MT(V)$. De plus, puisque on est en caractéristique 0, il suffit de prouver que $MT(V)$ a une représentation completement reducible. Par le Corollaire 1.10 on a que $Rep(MT(V)) \simeq \langle V \rangle^{\otimes}$ et la dérniére catégorie est semisimple, comme il suive facilement du fact que $\mathbb{Q}\boldsymbol{HS}^{pol}$ est semisimple. En particulier $Rep(MT(V))$ est semisimple. Et on a fini. □

Soit V une $\mathbb{Q}$-structure de Hodge polarisable simple et de poid n. Donc $D = End_{\mathbb{Q}\boldsymbol{HS}}(V)$ est une algébre de division sur $\mathbb{Q}$. Soit $\varphi : V \otimes V \longrightarrow \mathbb{Q}(-n)$ une polarisation. Car φ est non dégenerée on peut définir une (anti)-involution

$$D \longrightarrow D$$

donné par $d \mapsto d^{\dagger}$, oú $d^{\dagger}$ est tel que

$$\varphi(d(x) \otimes y) = \varphi(x \otimes d^{\dagger}(y)).$$

Car tout élément de D commute avec C on a aussi, sur $\mathbb{R}$,

$$\varphi_C(d(x), y) = \varphi(x, d^{\dagger}(y)).$$

On a donc que ι est une involution positive dans le sense suivant, en utilisant le lemme qui suive la définition.

Définition 2.5. Soit D une algébre de division sur $\mathbb{Q}$ avec un (anti)involution $\iota : D \longrightarrow D$. On dit que ι est *positive* si $Tr_{D/\mathbb{Q}}(x\iota(x)) > 0$ pour tout $x \in D$.

Lemme 2.6. *Soit B une $\mathbb{Q}$-algbre simple de dimension fini avec une (anti)-involution ι. Alors ι est positive si et seulement si existe un B-module V qui a une forme $\mathbb{Q}$-bilineaire symmetrique φ definie positive tel que*

$$\varphi(bx, y) = \varphi(x, \iota(b)y) \tag{2}$$

pour tout $b \in B$, $x, y \in V$.

Démonstration. Pour la *seulement si* part on prends $\varphi : B \times B \longrightarrow \mathbb{Q}$ donnée par $\varphi(x, y) = Tr_{B/\mathbb{Q}}(x\iota(y))$.

Maintenant on prouve la *si part.* Car tout B-module W est un summande directe d'un produit de copies de V alors on trouve aussi sur W une forme Q comme dessus. Maintenant, prs une extension de base, on peut supposer que le corps est réel. On considre sur B une forme bilineaire Q qui satisfait (2). On prends une base orthonormal $\{e_i\}$. Alors

$$Tr_{B/\mathbb{R}}(b\iota(b)) = \sum_i \varphi(e_i, b\iota(b)e_i) = \sum_i \varphi(be_i, be_i) > 0.$$

□

Remarque 2.7. Ce n'est pas necessaire de supposer que B est simple.

2.1. **Classification de Albert.**

On a vue que si V est une $\mathbb{Q}$-structure de Hodge simple et polarisable alors $End_{\mathbb{Q}\boldsymbol{HS}}V$ est une algèbre de division simple avec une involution positive. Ces algèbres ont été classifiées par Albert.

Théorme 2.8. *Soit D une $\mathbb{Q}$-algébre de division de rang fini sur $\mathbb{Q}$ avec une (anti)involution positive $\iota : D \longrightarrow D$. Soit F son centre, $F_0 = \{a \in F | \iota(a) = a\}$, $e_0 = [F_0 : \mathbb{Q}]$, $e = [F : \mathbb{Q}]$ et $d^2 = [D : F]$. Alors on a une des suivantes possibilités.*

Type$I(e_0)$: $e = e_0, d = 1$ *; $D = F = F_0$ est un corps totalement reél et ι est l'identité.*

<u>$TypeII(e_0)$:</u> $e = e_0, d = 2$; *D est l'algébre des quaternions sur un corps totalement reél $F = F_0$; pour toute immersione $\sigma : K \longrightarrow \mathbb{R}$ on a $D \otimes_K \mathbb{R}_\sigma \simeq M_2(\mathbb{R})$. Soit $d \longrightarrow d^* := \frac{tr_{D/F}(d)}{2} - d$ l'involution canonique de D, alors il exist un élément $a \in D$ avec $a^* = -a$ tel que ι est la conjugation par a et il existe une isomorphisme*

$$D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \simeq M_2(\mathbb{R}) \times \cdots \times M_2(\mathbb{R})$$

tel que l'involution est donnée par $(X_1, \ldots, X_s) \longrightarrow (X_1^t, \ldots, X_e^t)$.

<u>$TypeIII(e_0)$:</u> $e = e_0, d = 2$; *D est une algébre des quaternions sur un corps totalement reél $F = F_0$; l'involution de D est l'involution canonique et il existe une isomorphisme*

$$D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \simeq \boldsymbol{K} \times \cdots \times \boldsymbol{K}$$

tel que l'involution est donnée par le produit des involutions canoniques.

<u>$TypeIV(e_0, d)$:</u> $e = 2e_0$; *F est un corps de type CM et F_0 est totalement reél; D est une algébre de division de rang d^2 sur F. L'involution ι est tel que, sous un certain isomorphisme*

$$D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \simeq M_d(\mathbb{C}) \times \cdots \times M_d(\mathbb{C})$$

il corresponds á l'involution

$$(A_1, \ldots, A_{e_0}) \mapsto ({}^t\overline{A_0}, \ldots, {}^t\overline{A_{e_0}}).$$

En particulier ι est la conjugation complexe sur F.

Soit V une structure de Hodge polarisable simple. Soit φ une polarisation. Car V est simple alors l'involution de Rosati associée induces la conjugation complexe sur le centre F de D ou l'identité, si F est totalement reél. Soit Z_H le centre connexe de $Hg(V)$. Si le poid de V est zero alors $Z_H = Z_M$. Si le poid est différent de 0 alors Z_M est isogeneous á $\mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}} \times Z_H$. On a aussi $Z_H \subseteq Z_M \subseteq U_F$.

De plus, car $Hg(V) \in U(V, \varphi)$, on a pour tout $h \in Z_H$ que

$$\varphi(v \otimes w) = \varphi(hv \otimes hw) = \varphi(v \otimes \overline{h}h).$$

Donc $\overline{h}h = 1$ et ça implique que Z_H est contenu dans la composante connexe U_F^0 du neutre de

$$U_F := \{x \in T_F | x\overline{x} = 1\}.$$

Si V n'est pas simple alors on peut écrire

$$V = V_1^{m_1} \oplus \cdots \oplus V_r^{m_r}$$

avec $V_i, \ldots, V_r$ sont simples et pas isomorphes entre eux. Si $D = End_{\mathbb{Q}\boldsymbol{HS}}(V)$ et $D_i = End_{\mathbb{Q}\boldsymbol{HS}}(V_i)$ on a

$$D = M_{m_1}(D_1) \times \cdots \times M_{m_r}(D_r).$$

Donc $F = F_1 \times \cdots \times F_r$ est le produit de corps totalement reéls ou extensions quadratiques complexes et

$$U_F = U_{F_1} \times \cdots \times U_{F_r}.$$

On remarque que si F_i est totalement reél alors U_{F_i} est fini. Donc on a prouvé le resultat suivant.

Proposition 2.9. *Soit V une structure de Hodge polarisable et assume que V n'a pas de facteurs simples de type IV. Alors $Hg(V)$ est semisimple.*

De plus on observe que le groupe des caracters $X^*(T_F)$ de T_F est donné par le groupe abelien libre généré par l'ensemble Σ_F des immersions de F dans $\mathbb{C}$, avec l'action naturel de $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Le groupe $X^*(T_F)$ est le quotient de $X^*(T_F)$ par le sous-module généré par les éléments $\sigma + \overline{\sigma}$ oú $\overline{\sigma}$ indique la composition de σ avec la conjugation complexe de $\mathbb{C}$. Enfin, si GU_F est le sous-group de T_F généré par U_F et $\mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}\mathrm{id}$ alors $X^*(GU_F)$ est le quotient de $X^*(T_F)$ par le submodule généré par les éléments $\sigma + \overline{\sigma} - \tau - \overline{\tau}$ avec $\sigma, \tau \in \Sigma_F$.

Définition 2.10. Une $\mathbb{Q}$-structure de Hodge V est dit de *type CM* si V est polarizable et $MT(V)$ est un tore.

Lemme 2.11. *Soit V une structure de Hodge simple et polarisable. Alors V est de type CM si et seulement si on a une des situations suivantes.*

- *Si le centre F de $End_{\mathbb{Q}HS}(V)$ est totalement réel alors $V \simeq \mathbb{Q}(n)$, pour quelque n. De plus $F = \mathbb{Q}$.*
- *Si le centre F de $End_{\mathbb{Q}HS}(V)$ est une extension quadratique complexe d'un corps totalement réel alors*
  - *(i) $V \simeq F$ comme F-espaces vectoriels ;*
  - *(ii) il existe une function $\Phi : \Sigma_F \longrightarrow \mathbb{Z}^2$, $\sigma \mapsto (m_\sigma, n_\sigma)$ tel que $(m_{\overline{\sigma}}, n_{\overline{\sigma}}) = (n_\sigma, m_\sigma)$;*
  - *(iii) la fonction $\sigma \mapsto m_\sigma + n_\sigma$ est constante et est égale á l'opposé de le poid de V. Et on a*

$$V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \simeq F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \simeq \oplus_{\sigma \in \Sigma_F} \mathbb{C}_\sigma,$$

avec $\mathbb{C}_\sigma$ de type $(-m_\sigma, -n_\sigma)$.

De plus dans tous les deux cas on a que $End_{\mathbb{Q}\boldsymbol{HS}}(V)$ est commutative, i.e. $End_{\mathbb{Q}\boldsymbol{HS}}(V) = F$.

Démonstration. Si V est de type CM alors $MT(V)$ est un tore. En particulier il est égal á son centre connexe. Donc par le Lemma 1.11 on a que $MT(V)$ est contenu dans T_F. Alors, si $d = \dim_F V$, on a

$$D := (End_{\mathbb{Q}}(V))^{MT(V)} \supseteq (End_{\mathbb{Q}}(V))^{T_F} \supseteq M_d(F).$$

Mais, car D est un algbre de division, alors $d = 1$. Ça implique que

$$F \subseteq End_{\mathbb{Q}HS}(V) \subseteq End_F(V) = F,$$

donc $F = D$. Pour la classification de Albert on a que F est totalement reél ou un corps CM.

Si F est totalement réel alors pour la proposition précédente on a que $Hg(V)$ est semisimple. Mais, car $Hg(V)$ est un tore, alors $Hg(V) = 1$. Donc $F = End_{\mathbb{Q}}V$, qui implique que $V \simeq \mathbb{Q}$ et $F = \mathbb{Q}$. Donc V est necessairement isomorphe $\mathbb{Q}(n)$ pour quelque n. Et au contraire tout $\mathbb{Q}(n)$ est de type CM.

Supposons maintenant que F est de type CM. Alors l'involution associé la polarization fixée est la conjugation complexe sur F. Car $Hg(V) \subseteq U_F$ alors $MT(V)$ est contenu dans le tore GU_F. Le morphisme $\mathbb{S} \longrightarrow GU_F$ que donne la structure de Hodge est donné par un morphisme entre les respectifs groupes des caracters,, et ça est equivalent donner une fonction

$$\Sigma_F \longrightarrow \mathbb{Z}^2, \quad \sigma \mapsto (m_\sigma, n_\sigma)$$

tel que $(m_{\overline{\sigma}}, n_{\overline{\sigma}}) = (n_\sigma, m_\sigma)$ et $m_\sigma + n_\sigma$ n'est pas dépendent par σ. Car $V \simeq F$ comme F-espaces vectoriels on peut supposer $V = F$. Alors

$$V \otimes_{\mathbb{C}} F \simeq \oplus_{\sigma \in \Sigma_F} \mathbb{C}_\sigma.$$

Alors le summand $\mathbb{C}_\sigma$ est de type $(-m_\sigma, -n_\sigma)$ et les conditions su Φ ensure que V est une structure de Hodge. □

3. Le groupe de Mumford-Tate d'une variété abelienne.

Soit X une varieté abelienne complexe. C'est classique que, pour tout n, on a

$$H^n(X, \mathbb{Q}) \simeq \wedge^n H^1(X, \mathbb{Q}),$$

comme structure de Hodge. la structure de Hodge sur $H^n(X, \mathbb{Q})$ est donnée par la Théorie de Hodge. On a le suivant resultat.

Théorme 3.1. *Le foncteur $X \mapsto H_1(X, \mathbb{Z})$ donne une equivalence de catégories*

$\{$ *variéties abeliennes complexes*$\} \leftrightarrow \{\mathbb{Z}HS$ *polarizables et sans torsion de type* $(-1,0)+(0,-1)\}$.

De plus si on considére les variétes abeliennes á pres d'isogénies on doit remplacer $\mathbb{Z}HS$ avec $\mathbb{Q}HS$.

Démonstration. Le foncteur quasi-inverse est obtenu comme suive. Soit W l'espace $X_{\mathbb{R}}$ vue comme $\mathbb{C}$ espace vectoriel. La multiplication par i est donnée par l'operateur de Weil C. Nous definisson $X := W/V_{\mathbb{Z}}$. On a que X est projective car $V_{\mathbb{Z}}$ est polarisable. La deuxime assertion est claire, car X_1 est isogenous X_2 si et seulement si il y a un isomorphisme $H_1(X_1, \mathbb{Q}) \longrightarrow H_1(X_2, \mathbb{Q})$. □

Pour toute variété abelienne X soit $V_X := H^1(X, \mathbb{Q})$, qui est dual $H_1(X, \mathbb{Q})$. Par le théorme précédent il suive, en particulier que,

$$End^0(X, \mathbb{Q}) := End(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} \simeq End_{\mathbb{Q}\boldsymbol{HS}}(V_X).$$

Définition 3.2. Une variété abelienne de dimensione g est de type CM si $End^0(X)$ contienne une sous algbre semi-simple de rank $2g$ sur $\mathbb{Q}$.

Proposition 3.3. *Une variété abelienne X est de type CM si et seulement V_X est une structure de Hodge de type CM, i.e. $MT(X) := MT(V_X)$ est un tore.*

Démonstration. On a que X est isogenous un produit $Y_1^{m_1} \times \cdots \times Y_r^{m_r}$, avec les Y_i simples et pas isomorphes entre eux. C'est clair que X est de type CM si et seulement si tous Y_i est de type CM. Donc on suppose que X est simple.

Suppose que X est CM et soit F le corps maximal, de dimension $2g$ sur $\mathbb{Q}$. Alors V est libre de rank 1 sur F. Donc $MT(X) \subseteq GL_D(V) \subseteq G_F(V) = T_F$ et donc $MT(X)$ est un tore.

Viceversa si V_X est de type CM alors on a que le centre F de $End^0(X) \simeq End_{\mathbb{Q}HS}(V_X)$ est isomorphe V comme spaces vectoriels sur F. On a deja prouvé ça dans le Lemma 2.11 mais nous remettons la preuve (facile) ici pour rendre la preuve independent. En fait si $d = \dim_F V$, alors

$$D := (End_{\mathbb{Q}}(V))^{MT(V)} \supseteq (End_{\mathbb{Q}}(V))^{T_F} \supseteq M_d(F).$$

Mais, car D est un algbre de division, alors $d = 1$.

Donc F est une extension de $\mathbb{Q}$ de degree $2g$ et donc X est de type CM. □

Remarque 3.4. Dans la preuve on n'a pas utilisé le fait, bien connu, que $End^0(E)$ est commutatif si E de type CM. En fait on peut deduire ça par la proposition précedent et le Lemma 2.11.

3.1. **Courbes elliptiques.**

Dans cette section on calcule le groupe de Mumford-Tate d'une courbe elliptique.

Proposition 3.5. *Soit E une courbe elliptique complexe.*
- *(i)Si $End^0(E) = \mathbb{Q}$ alors $Hg(E) = Sl(V_E)$ et $MT(E) \simeq GL_2(V_E)$.*
- *(ii) Si $End^0(E)$ est un corps quadratique immaginaire F alors $Hg(E) \simeq U_F$ et $MT(E) \simeq T_F$.*

Démonstration. Car V_E est polarizable alors $Hg(E)$ est reductives. De plus on a que $Hg(U) \subseteq Sl(V_E) \simeq Sl_{2,\mathbb{Q}}$.

Lemme 3.6. *Soit $car(k) = 0$. Les sous groupes reductifs de $Sl_{2,k}$ sont le groupe triviale, les tores maximaux et $Sl_{2,k}$.*

Démonstration. On remarque d'abord que tout tore de $Sl_{2,k}$ a dimension 1. Soit maintenant G un sous-groupe reductif de $Sl_{2,k}$. S'il a dimension 1 alors $G_{\overline{k}}$ est $\mathbb{G}_a$ ou $\mathbb{G}_m$. Car G est reductive il suive que G est un tore, donc un tore maximale. Si G a dimension 2 alors son radical $R(G)$ est un tore de dimension 0 ou 1. Donc $G/R(G)$ est un groupe semi-simple de dimension 1 ou 2. Aussi sa algbre de Lie est semi-simple de dimension 1 ou 2. Mais tout algbre de Lie de dimension ≤ 2 est risoluble et donc il n'existe pas un sous-groupe reductif de dimension 2. □

Donc on a les suivantes possibilités
– $Hg(E) = 0$ ou
– $Hg(E) =$ tore maximal dans $SL(V_E)$ ou
– $Hg(E) = SL(V_E)$.
Dans le prémiér cas

$$D = End(V_E)^{Hg(V_E)} = End(V_E),$$

qui n'est pas commutative. Donc ce cas est impossible.

On a aussi que D est $\mathbb{Q}$ ou un corps quadratique imaginaire F. Les deux cas correspondent aux cas E pas de type CM ou E de type CM.

Donc, si $D = \mathbb{Q}$, $Hg(E)$ n'est pas un tore. Ainsi $Hg(E) = Sl(V_E)$ et $MT(E) \simeq GL_2(V_E)$.

Si $D = F$ alors $Hg(E)$ est un tore et donc $Hg(E)$ est un tore maximal de $Sl(V_E)$ et $MT(E)$ est un tore maximal de $GL(V_E)$. De plus on sait que $MT(E) \subseteq GL_D(V_E) \simeq T_F$. Donc $MT(E) \simeq T_F$ et $Hg(E) \simeq U_F$. □

Remarque 3.7. Dans tous les deux cas on a

$$MT(E) = GSp_D(V_E, \varphi) := GSp(V_E, \varphi) \cap GL_D(V).$$

En fait on a que, car V_E a dimension deux, $GSp(V_E, \varphi) = GL(V_E)$. De plus $GL_D(V_E)$ est gal $GL(V_E)$ si $D = \mathbb{Q}$ et $GL_F(V_E) \simeq T_F$ si $D = F$.

4. La Conjecture de Hodge

Soit X une variété complexe propre de dimension n et soit $\mathcal{B}^p(X) \subseteq H^{2p}(X, \mathbb{Q})(p)$ le sousespace des classes de Hodge. On appélle *l'anneaux de Hodge* la $\mathbb{Q}$-algbre commutative graduée $\mathcal{B}^\bullet := \oplus_p \mathcal{B}^p(X)$, oú la multiplication est donnée par le produit wedge. Soit $\mathcal{Z}_X^p$ le groupe abelien libre sur $\mathbb{Q}$ généré par les sous schémas fermé et intègres de X de codimension p. On peut construire naturellement un morphisme

$$HC(X, p) : \mathcal{Z}_X^p \longrightarrow \mathcal{B}^p(X)$$

qui associe une cycle Z une classe de cohomologie $cl(Z)$, qui est le Dual de Poincaré de la classe fondamentale $[Z]$ de $H_{2n-2p}(X, \mathbb{Q})$.

Théorme 4.1. *L'accouplement*

$$\Omega^i(X) \times \Omega^{n-i}(X) \longrightarrow \mathbb{C}$$

donné par $(\omega, \eta) \mapsto \int \omega \wedge \eta$ *induit un isomorphisme*

$$H^i(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H^{2n-i}(X, \mathbb{C})^\vee.$$

On a aussi un isomorphisme

$$H^{p,q}(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H^{n-p,n-q}(X, \mathbb{C})^\vee.$$

Remarque 4.2. Par contre pour le Théorème de De rham on a aussi un isomorphisme de $H_{n-i}(X, \mathbb{C})$ avec $H^{n-i}(X, \mathbb{C})^\vee$ donnée par $[c] \mapsto (\omega \mapsto \int_c \omega)$.

On a que fait $cl(Z)$ est dans $H^{p,p}(X, \mathbb{C})$ et donc dans $\mathcal{B}^p(X)$. En fait si on prend $\alpha \in H^{n-a,n-b}(X, \mathbb{C})$ avec $a + b = 2p$ et $a \neq b$ alors on a que $n - a > n - p$ ou $n - b > n - q$. Donc α est zeros sur la desingularisation $\tilde{Z}$ de Z. Donc

$$\int_{\tilde{Z}} \alpha = \int_X cl(Z) \wedge \alpha = 0.$$

Ça implique que, pour le Théorème de Poincaré, que $cl(Z) \in H^{p,p}(X)$.

Conjecture. *Pour tout variété complexe lisse propre X et pour tout p on a que $HC(X, p)$ est surjective.*

La conjecture est vrai si $n = 1$ (Théorme de Lefschetz). En fait la suite exponential

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0$$

donne une suite exacte longe

$$\ldots \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow Pic(X) \xrightarrow{\delta} H^2(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha} H^2(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \ldots$$

On a que α est la composition de l'inclusion $H^2(X, \mathbb{Z}) \hookrightarrow H^2(X, \mathbb{C})$ avec la projection $H^2(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H^2(X, \mathcal{O}_X)$ dans la composante $(0, 2)$ de la decomposition de Hodge. Car

$$H^2(X, \mathbb{C}) \simeq H^1(X, \Omega_X^1) \oplus H^2(X, \mathcal{O}_X) \oplus H^0(X, \Omega_X^2)$$

et

$$\overline{H^2(X, \mathcal{O}_X)} = H^0(X, \Omega_X^2)$$

alors $\ker(\alpha) = H^1(X, \Omega_X^1) \cap H^2(X, \mathbb{Z})$, i.e. $\ker(\alpha)$ est fait par les classes de Hodge. Mais il est aussi égale l'image de δ, qui est precisement fait par les cycles algébriques.

Donc $\mathcal{B}^1(X) \subseteq H^2(X, \mathbb{Q})$ est généré par les classes de diviseurs. Soit $\mathcal{D}^\bullet \subseteq \mathcal{B}^\bullet$ la $\mathbb{Q}$-sousalgbre généré par $\mathcal{B}^1(X)$. car $cl(Z_1) \cup cl(Z_2) = cl(Z_1 \cap Z_2)$ on a que $\mathcal{D}^\bullet$ est fair par cycles algébriques.

Donc, une strategie possible pour prouver la Conjecture de Hodge dans certains cas (car en géneral est faux) est de prouver que

$$\mathcal{D}^\bullet = \mathcal{B}^\bullet.$$

Théorme 4.3. *Soit A une variété abelienne isogéne un produit de courbes elliptiques*

$$E_1^{m_1} \times \cdots \times E_r^{m_r}$$

avec les E_i pas isomorphes entre eux. Alors

$$Hg(A) \simeq Hg(E_1) \times \cdots \times Hg(E_n)$$

et la conjecture de Hodge est vrai pour A.

Démonstration. On donne la prouve seulement dans le case que $r = 1$ et m_1 quelqonque.

Soit E une courbe elliptique. On suppose d'abord que $End^0(E) = \mathbb{Q}$. On sait que $Hg(E^m) = Hg(E) = Sl(V_E) = Sp(V_E, \varphi)$. Donc

$$\mathcal{B}(E^m) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = [\wedge^\bullet(V_{X,\mathbb{C}}^{\oplus m})]^{Sp(V_E,\varphi)\otimes\mathbb{C}}$$

Alors on applique la suivant proposition de la théorie des invariants.

Soit mainenant $F = End^0(E)$ un corps quadratique imaginaire. On sait que $Hg(V_E) = U_F$. Soit $\Sigma_F = \{\sigma, \tau\}$ et $H = V_E^\vee$. Alors on a, par 2.11, que $H_\mathbb{C} \simeq \mathbb{C}_\sigma \oplus \mathbb{C}_\tau$ avec $\mathbb{C}_\sigma$ de type $(1, 0)$ et $\mathbb{C}_\tau$ de type $(0, 1)$. Si on considére $W := H^{2m}(E^n, \mathbb{Q}) = \wedge^{2m} H$ alors

$$W_\mathbb{C} \simeq \oplus_\varrho W_\mathbb{C}^\varrho$$

avec ϱ qui varie dans le groupe des caractérs de $T_{F,\mathbb{C}}$, qui est généré par σ et τ. Les éléments de Hodge de type (p, p) sont les éléments de $W_\mathbb{C}^{p\sigma+p\tau}$. Mais par contre on a

$$\mathcal{B}(E^m) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \wedge^\bullet(H_\mathbb{C}^{\oplus m})]^{U_F\otimes\mathbb{C}} = \oplus(H_\mathbb{C} \otimes \cdots \otimes H_\mathbb{C})^{Hg(E)\otimes\mathbb{C}}.$$

et l'action de $U_F \otimes \mathbb{C} \simeq \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$ sur $H_\mathbb{C} \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ est donnée par $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha^{-1} y)$. Donc tout elément de $W_\mathbb{C}^{p\sigma+p\tau}$ est combination lineaire des élements de la forme

$$x_1 \wedge y_1 \wedge \ldots x_n \wedge y_n$$

avec x_i dans $H_\mathbb{C}(\sigma)$ et y_i dans $H_\mathbb{C}(\tau)$. Mais on a que $\alpha(x_i \wedge y_i) = (\alpha x_i \wedge \alpha^{-1} y_i) = x_i \wedge y_i$. Donc $W_\mathbb{C}^{p\sigma+p\tau}$ est généré par les éléments de degré 2. $\square$

Proposition 4.4. *Soit W un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ avec une non dǵenere symplectique forme φ et soit m un entier. Alors, si $G = Sp(W, \varphi)$,*

$$[\wedge^\bullet(W)^{\oplus m}]^G$$

est généré par les éléments de degré 2.

On a aussi un resultat plus général.

Théorme 4.5. *Soit X une variété abelienne complexe. Soit $D := End^0(X)$, $V := H_1(X, \mathbb{Q})$ et φ sa forme de Riemann d'une polarization. Alors on a $\mathcal{B}^\bullet(X^n) = \mathcal{D}^\bullet$ pour tout n si et seulement si $Hg(X) = Sp_D(V, \varphi)$ et X n'a pas des factors de type III.*

Corollaire 4.6. *La conjecture de Hodge est vrai pour tout variété abelienne simple de dimensione prémière.*