A.N.R ARIVAF - Workshop 5

Les conjectures de Weil
d'après Grothendieck et Deligne

I.H.P. - Paris, 19, 20 et 21 décembre 2012

Orateurs :

A. Cadoret
R. Casalis
B. Le Stum
S. Maugeais
N. Mazzari
J. Nicaise
C. Pépin
M. Perret
D. Tossici

Organisateurs : A. Cadoret, C. Pépin, J. Tong

A.N.R ARIVAF - Workshop 5

Organisateurs : A. Cadoret, C. Pépin, J. Tong

Les conjectures de Weil d'après Grothendieck et Deligne

1 Informations pratiques

Date : 19, 20 et 21 décembre 2012.

Lieu : Salle 201 (19 décembre), salle 314 (20 et 21 décembre), Institut Henri Poincaré.

Programme :

– 19/12	14 :00- 15 :30	: (1) Introduction
	Café	
	16 :00 - 17 :30	: (2) Preuve des conjectures de Weil en dehors de l'hypothèse de Riemann
– 20/12	09 :15 - 10 :30	: (3) Pinceaux de Lefschetz : existence
	Café	
	11 :00 - 12 :30	: (4) Formalisme des cycles évanescents
	14 :30 - 16 :00	: (5) Formule de Picard-Lefschetz
	Café	
	16 :30 - 17 :45	: (6) Théorie globale des cycles évanescents
– 21/12	09 :30 - 10 :30	: (7) La majoration fondamentale
	Café	
	11 :00 - 12 :30	: (8) Preuve de l'hypothèse de Riemann
	14 :30 - 16 :30	: (9) Applications

Orateurs :

1. B. Le Stum
2. D. Tossici
3. S. Maugeais
4. J. Nicaise
5. N. Mazzari
6. R. Casalis
7. C. Pépin
8. M. Perret
9. A. Cadoret

2 Introduction

André Weil, en menant des calculs assez élémentaires sur le nombre de solutions de certains systèmes d'équations algébriques dans les corps finis, a été conduit à formuler en 1949 une série de conjectures remarquables [13]. Pour une variété algébrique X définie sur un corps de nombres, les conjectures de Weil relient le nombre de points de (la réduction de) X à valeurs dans un corps fini et ses extensions, et certains invariants topologiques de la variété $X(\mathbb{C})$. Ce sont ces conjectures qui font l'objet de ce groupe de travail.

2.1 Énoncé des conjectures de Weil

Soit $\mathbb{F}_q$ un corps fini à $q = p^r$ éléments, et soit $X_0/\mathbb{F}_q$ un schéma projectif lisse sur $\mathbb{F}_q$, geométriquement connexe de dimension d. Pour un entier $m \geq 1$, on désigne par N_m le nombre de points de X à valeurs dans $\mathbb{F}_{q^m}$. La *fonction zêta de* $X_0/\mathbb{F}_q$ est la série formelle à coefficients rationnels

$$Z(X_0, t) := \exp\left(\sum_{m\geq 1} N_m \frac{t^m}{m}\right) = 1 + \sum_{m\geq 1} N_m \frac{t^m}{m} + \frac{1}{2!}\left(\sum_{m\geq 1} N_m \frac{t^m}{m}\right)^2 + \cdots .$$

Les conjectures de Weil peuvent se formuler comme suit :

1. (Rationnalité) La fonction zêta de $X_0/\mathbb{F}_q$ est une fraction rationnelle. Plus précisément, il existe des polynômes $P_0, \cdots, P_{2d}$ à coefficients *entiers*, de termes constants égaux à 1, tels que
$$Z(X_0, t) = \frac{P_1(t)P_3(t)\cdots P_{2d-1}(t)}{P_0(t)P_2(t)\cdots P_{2d}(t)}.$$
De plus, $P_0(t) = 1 - t$ et $P_{2d}(t) = 1 - q^d t$.

2. (Hypothèse de Riemann) On peut choisir les polynômes $P_0, P_1, \cdots, P_{2d}$ précédents de sorte que les racines de P_i soient toutes de module $q^{-i/2}$.

3. (Equation fonctionnelle) Soit $\chi(X_0) := \sum_i (-1)^i \deg(P_i)$ la *caractéristique d'Euler de* X_0. Pour un certain signe $\varepsilon = \pm 1$, la fonction zêta de $X_0/\mathbb{F}_q$ vérifie l'équation
$$Z\left(X_0, \frac{1}{q^d t}\right) = \varepsilon q^{d\chi(X_0)/2} t^{\chi(X_0)} Z(X_0, t).$$

4. (Interprétation topologique) Supposons que X_0 provienne, par réduction modulo un idéal premier, d'un schéma $\mathcal{X}$ projectif et lisse sur l'anneau des entiers d'un corps de nombres. Alors $\deg(P_i) = h^i_{\mathrm{Betti}}(\mathcal{X}^{\mathrm{an}}_{\mathbb{C}})$ pour tout i.

2.2 Grandes lignes de la preuve de l'hypothèse de Riemann (d'après [2])

Les conjectures 1., 3. et 4. sont des conséquences relativement formelles des résultats vus lors de ARIVAF 2 et 4. On se concentre donc ici sur la conjecture 2. Notations :

– $X_0/\mathbb{F}_q$ désigne un schéma projectif lisse de dimension d, $\mathbb{F}$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$, et $X := X_0 \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}$.

- $F \colon X \to X$ est l'*endomorphisme de Frobenius de* X, obtenu par extension des scalaires à partir de $(\mathrm{id}, x \mapsto x^q) : X_0 \to X_0$.

- ℓ est un nombre premier fixé différent de p. On note $\mathrm{H}^i(X, \mathbb{Q}_\ell)$ les groupes de cohomologie ℓ-adique de X. Par transport de structure et fonctorialité, ces groupes sont munis d'une action de $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q)$ et d'un endomorphisme de Frobenius F^*.

L'interprétation cohomologique des fonctions zêta de Grothendieck permet, par dévissage, de ramener l'hypothèse de Riemann à l'énoncé suivant :

Lemme 2.2.1 ([2] (1.7))**.** *Pour chaque* i*, et chaque* $\ell \neq p$*, les valeurs propres de l'endomorphisme* F^* *de* $\mathrm{H}^i(X, \mathbb{Q}_\ell)$ *sont des nombres algébriques dont tous les conjugués complexes* α *sont de valeur absolue* $|\alpha| = q^{i/2}$*.*

Quitte à remplacer X_0 par une composante connexe de $X_0 \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^n}$, n assez grand, on peut supposer $X_0/\mathbb{F}_q$ géométriquement connexe. Par dualité de Poincaré, il suffit de prouver le lemme 2.2.1 pour $0 \leq i \leq n$. La preuve se fait alors par récurrence sur la dimension d de X_0. Soit Y_0 une section hyperplane lisse de X_0, et $Y := Y_0 \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}$. D'après le théorème de Lefschetz faible, le morphisme de restriction

$$\mathrm{H}^i(X, \mathbb{Q}_\ell) \to \mathrm{H}^i(Y, \mathbb{Q}_\ell)$$

est injectif pour $i < d$. Comme il respecte les endomorphismes de Frobenius, une valeur propre de F^* sur $\mathrm{H}^i(X, \mathbb{Q}_\ell)$ est une valeur propre de F^* sur $\mathrm{H}^i(Y, \mathbb{Q}_\ell)$. Par hypothèse de récurrence, il suffit donc de prouver 2.2.1 pour $i = d$. Soit α une valeur propre de F^* sur $\mathrm{H}^d(X, \mathbb{Q}_\ell)$. D'après la formule de Künneth, α^k est une valeur propre de $\mathrm{H}^{kd}(X^k, \mathbb{Q}_\ell)$. Le lemme 2.2.1 résulte [1] donc du

Lemme 2.2.2 ([2] (7.1))**.** *Soit* X_0 *un schéma projectif lisse géométriquement connexe sur* $\mathbb{F}_q$*, de dimension* paire d*. Soient* X *sur* $\overline{\mathbb{F}_q}$ *déduit de* X_0 *par extension des scalaires et* α *une valeur propre de* F^* *sur* $\mathrm{H}^d(X, \mathbb{Q}_\ell)$*. Alors* α *est un nombre algébrique dont tous les conjugués complexes, encore notés* α*, vérifient*

$$q^{\frac{d}{2} - \frac{1}{2}} \leq |\alpha| \leq q^{\frac{d}{2} + \frac{1}{2}}$$

La preuve du lemme 2.2.2 se fait encore par récurrence sur d (toujours supposé pair). Posons $d = n + 1 = 2m + 2$. Le cas $d = 0$ étant trivial, on peut supposer $d \geq 2$. Pour pouvoir appliquer l'hypothèse de récurrence, l'idée est de trouver une fibration $X \to \mathbb{P}^1$ (ou $\widetilde{X} \to \mathbb{P}^1$ pour un certain éclaté $\widetilde{X}$ de X), dont les singularités sont aussi simples que possible. Une telle fibration va être réalisée par un *pinceau de Lefschetz*.

Définition 2.2.3. *Soient* $\mathbb{P}$ *un espace projectif sur* $\mathbb{F}$*, et* $\check{\mathbb{P}}$ *l'espace projectif dual, classifiant les hyperplans de* $\mathbb{P}$*. Soit* A *un sous-espace linéaire de codimension* 2 *de* $\mathbb{P}$*. Les hyperlans contenant* A *sont paramétrés par les points d'une droite* $D \subset \check{\mathbb{P}}$*, la duale de* A*. Ces hyperplans* $(H_t)_{t \in D}$ *forment le* pinceau d'axe A*.*

Soit $i \colon X \hookrightarrow \mathbb{P}$ un plongement projectif (défini sur $\mathbb{F}_q$). Notons $\widetilde{X} \subset X \times D$ l'ensemble des couples (x, t) tels que $x \in H_t$. Les applications première et seconde coordonnée forment un diagramme

$$\begin{tikzcd} X & \widetilde{X} \arrow[l, "\pi"'] \arrow[d, "f"] \\ & D. \end{tikzcd} \tag{1}$$

1. Utiliser le lemme 2.2.2 pour k pair, puis faire tendre k vers l'infini.

La fibre $\tilde{X}_t$ de f en $t \in D$ est alors la section hyperplane $X_t = X \bigcap H_t$ de X ; on identifiera souvent $\tilde{X}_t$ et X_t dans la suite. Le pinceau $(X_t)_{t\in D}$ est *de Lefschetz* si les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) L'axe A est transverse à X. L'espace $\widetilde{X}$ se déduit alors de X par éclatement de $X \bigcap A$, et est lisse.

(ii) Il existe une partie finie S de D, et pour chaque $s \in S$ un point $x_s \in X_s$, tels que f soit lisse en dehors de x_s.

(iii) x_s est un *point singulier quadratique ordinaire* de f.

On notera $U := D \setminus S$.

En général, il se peut qu'aucun pinceau de sections hyperplanes de $i \colon X \hookrightarrow \mathbb{P}$ ne soit de Lefschetz. Toutefois, si l'on considère le plongement projectif de X obtenu en composant i avec un plongement multiple de Segre de $\mathbb{P}$, on peut toujours trouver un pinceau de Lefschetz pour X (dans le nouvelle espace projectif). En particulier, pour la variété X_0 du lemme 2.2.2, quitte à modifier le plongement projectif de X_0, on peut trouver un diagramme (1) pour lequel les propriétés (i)-(ii)-(iii) sont satisfaites. Comme $\widetilde{X}$ s'obtient par éclatement de X le long du sous-schéma lisse $X \cap A$ de codimension 2, le morphisme canonique

$$\mathrm{H}^i(X, \mathbb{Q}_\ell) \to \mathrm{H}^i(\widetilde{X}, \mathbb{Q}_\ell)$$

est injectif. Comme il est de plus compatible aux endomorphismes de Frobenius, on est ramené à prouver 2.2.2 pour les valeurs propres de F^* agissant sur $\mathrm{H}^d(\widetilde{X}, \mathbb{Q}_\ell)$. Considérons alors la suite spectrale de Leray pour f :

$$E_2^{i,j} = \mathrm{H}^i(D, \mathrm{R}^j f_* \mathbb{Q}_\ell) \Longrightarrow \mathrm{H}^{i+j}(\widetilde{X}, \mathbb{Q}_\ell). \tag{2}$$

Les fibres de f étant de dimension $n = d-1$, il suffit de prouver 2.2.2 pour les valeurs propres α de F^* agissant sur les $E_2^{i,j}$ pour $i + j = d = n + 1 = 2m + 2$, i.e. pour $E_2^{0,n+1}, E_2^{1,n}, E_2^{2,n-1}$. Ceci nécessite une analyse très fine des images directes supérieures $\mathrm{R}^j f_* \mathbb{Q}_\ell$.

Comme $f|_{f^{-1}(U)} \colon f^{-1}(U) \to U$ est lisse, le faisceau $\mathrm{R}^i f_* \mathbb{Q}_\ell$ est localement constant sur U, et sa fibre en un point $u \in U$ fournit une $\pi_1(U, u)$-représentation. Par le théorème de changement de base propre,

$$\mathrm{H}^i(\widetilde{X}_u, \mathbb{Q}_\ell) \simeq (\mathrm{R}^i f_* \mathbb{Q}_\ell)_u$$

est donc muni d'une action de $\pi_1(U, u)$. Pour chaque $s \in S$, la théorie locale des cycles évanescents fournit un cycle évanescent $\delta_s \in \mathrm{H}^n(\widetilde{X}_u, \mathbb{Q}_\ell)$ (bien défini au signe près). Le sous-espace

$$E \subset \mathrm{H}^n(\widetilde{X}_u, \mathbb{Q}_\ell)$$

engendré par les δ_s $(s \in S)$ définit la partie *évanescente* de la cohomologie.

Proposition 2.2.4. *Avec les notations ci-dessus (en particulier, $d = n + 1 = 2m + 2$) :*

1. *Le sous-espace E est stable sous l'action de $\pi_1(U, u)$, et les $\pm\delta_s$ $(s \in S)$ sont conjugués sous l'action de $\pi_1(U, u)$ sur $\mathrm{H}^n(\widetilde{X}_u, \mathbb{Q}_\ell)$.*

2. *Si les cycles évanescents sont non nuls :*

(a) Pour $i \neq n-1$, le $\mathbb{Q}_\ell$-faisceau $\mathrm{R}^i f_* \mathbb{Q}_\ell$ est constant (noter que $D = \mathbb{P}^1$ est la droite projective, donc simplement connexe).

(b) Soit j l'inclusion de U dans D. On a $\mathrm{R}^n f_* \mathbb{Q}_\ell = j_* j^* \mathrm{R}^n f_* \mathbb{Q}_\ell$.

(c) Soit $E \subset \mathrm{H}^n(X_u, \mathbb{Q}_\ell) = (j^* \mathrm{R}^n f_* \mathbb{Q}_\ell)_u$, le sous-espace engendré par les cycles évanescents. Ce sous-espace est stable sous $\pi_1(U, u)$, et son complément orthogonal $E^\perp$ par rapport à la dualité de Poincaré est égal à $\mathrm{H}^n(X_u, \mathbb{Q}_\ell)^{\pi_1(U,u)}$.

3. *Si les cycles évanescents sont nuls (on notera que si un cycle évanescent est nul, ils le sont tous car conjugués) :*
   (a) Pour $i \neq n+1$, le faisceau $\mathrm{R}^i f_* \mathbb{Q}_\ell$ est constant.
   (b) On a une suite exacte :

$$0 \to \bigoplus_{s \in S} \mathbb{Q}_\ell(m-n)_s \to \mathrm{R}^{n+1} f_* \mathbb{Q}_\ell \to \mathcal{F} \to 0$$

   avec $\mathcal{F}$ constant.
   (c) $E = 0$.

Ces résultats reposent sur la théorie des cycles évanescents (locale et globale), notamment sur la formule de Picard-Lefschetz (=monodromie des pinceaux de Lefschetz). On peut alors poursuivre l'étude de la suite spectrale (2) :

(A) $E_2^{2,n-1}$.
Comme $\mathrm{R}^{n-1} f_* \mathbb{Q}_\ell$ est constant, en utilisant la dualité de Poincaré (pour $\mathbb{P}^1$), on a

$$E_2^{2,n-1} = \mathrm{H}^2(D, \mathrm{R}^{n-1} f_* \mathbb{Q}_\ell) \simeq (\mathrm{R}^{n-1} f_* \mathbb{Q}_\ell)_u(-1) = \mathrm{H}^{n-1}(X_u, \mathbb{Q}_\ell)(-1).$$

Soit Y_0 une section hyperplane lisse de X_u[2], et $Y := Y_0 \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}$. Par Lefschetz faible, le morphisme $\mathrm{H}^{n-1}(X_u, \mathbb{Q}_\ell)(-1) \to \mathrm{H}^1(Y, \mathbb{Q}_\ell)(-1)$ est injectif. Puis Y_0 étant de dimension $n-1 = d-2$, on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence.

(B) $E_2^{0,n+1}$.
   (a) Si les cycles évanescents sont non nuls, $\mathrm{R}^{n+1} f_* \mathbb{Q}_\ell$ est constant et $E_2^{0,n+1} = \mathrm{H}^{n+1}(X_u, \mathbb{Q}_\ell)$. A nouveau, soit Y_0 une section hyperplane lisse de X_u, et $Y := Y_0 \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}$. Par Lefschetz faible, le morphisme de Gysin (dual du morphism de restriction)

$$\mathrm{H}^{n-1}(Y, \mathbb{Q}_\ell)(-1) \to \mathrm{H}^{n+1}(X_u, \mathbb{Q}_\ell)$$

   est surjectif, et on applique l'hypothèse de récurrence à Y_0.
   (b) Si les cycles évanescents sont nuls, on dispose de la suite exacte

$$\bigoplus_{s \in S} \mathbb{Q}_\ell(m-n) \to E_2^{0,n+1} \to \mathrm{H}^{n+1}(X_u, \mathbb{Q}_\ell).$$

   La valeur propre de F agissant sur $\mathbb{Q}_\ell(m-n)$ est $q^{n-m} = q^{d/2}$, et $\mathrm{H}^{n+1}(X_u, \mathbb{Q}_\ell)$ se traite comme plus haut.

2. Dans ce qui suit, quitte à faire une extension des scalaire, on suppose implicitement que $u \in U(\mathbb{F}_q)$ et que $X_u = \tilde{X}_u$ est défini sur $\mathbb{F}_q$.

(C) $E_2^{1,n}$.

Si les cycles évanescents sont nuls, le $\mathbb{Q}_\ell$-faisceau $\mathrm{R}^n f_* \mathbb{Q}_\ell$ est constant, et en particulier $E_2^{1,n} = 0$. On peut donc supposer les cycles évanescents non nuls. Notons $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{E}^\perp$) le faisceau localement constant sur U correspondant à la $\pi_1(U,u)$-représentaion E (resp. $E^\perp$). Comme $E^\perp = \mathrm{H}^n(\widetilde{X}_u, \mathbb{Q}_\ell)^{\pi_1(U,u)}$, le faiceau $\mathcal{E}^\perp$ est constant, et on peut vérifier qu'il en est de même du quotient de $\mathrm{R}^n f_* \mathbb{Q}_\ell$ par $j_*\mathcal{E}$. On dévisse le $\mathbb{Q}_\ell$-faisceau $\mathrm{R}^n f_* \mathbb{Q}_\ell$ par les sous-faisceaux $j_*\mathcal{E}$ et $j_*(\mathcal{E} \cap \mathcal{E}^\perp)$. Deux cas sont encore à distinguer :

(a) Si les cycles évanescents ne sont pas dans $\mathcal{E} \cap \mathcal{E}^\perp$, on dispose de suites exactes

$$0 \to j_*\mathcal{E} \to \mathrm{R}^n f_* \mathbb{Q}_\ell \to \text{faisceau constant} \to 0$$

et

$$0 \to \text{faisceau constant } j_*(\mathcal{E} \cap \mathcal{E}^\perp) \to j_*\mathcal{E} \to j_*(\mathcal{E}/\mathcal{E} \cap \mathcal{E}^\perp) \to 0,$$

donnant lieu à

$$\mathrm{H}^1(D, j_*\mathcal{E}) \to \mathrm{H}^1(D, \mathrm{R}^n f_* \mathbb{Q}_\ell) \to 0 \quad \text{et} \quad 0 \to \mathrm{H}^1(D, j_*\mathcal{E}) \to \mathrm{H}^1(D, j_*(\mathcal{E}/\mathcal{E} \cap \mathcal{E}^\perp)).$$

Il faut donc étudier les valeurs propres du Frobenius de $\mathrm{H}^1(D, j_*(\mathcal{E}/\mathcal{E} \cap \mathcal{E}^\perp))$, ce qui se fait à l'aide de la majoration fondamentale (§ 3 et § 6 de [2]).

(b) Si $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^\perp$, on dispose de suites exactes

$$0 \to \text{faisceau constant } j_*\mathcal{E}^\perp \to \mathrm{R}^n f_* \mathbb{Q}_\ell \to \text{un faisceau } \mathcal{F} \to 0$$

et

$$0 \to \mathcal{F} \to \text{faisceau constant } j_* j^* \mathcal{F} \to \bigoplus_{s \in S} \mathbb{Q}_\ell(n-m)_s \to 0,$$

fournissant

$$0 \to \mathrm{H}^1(D, \mathrm{R}^1 f_* \mathbb{Q}_\ell) \to \mathrm{H}^1(D, \mathcal{F}) \quad \text{et} \quad \bigoplus_{s \in S} \mathbb{Q}_\ell(n-m) \to \mathrm{H}^1(D, \mathcal{F}) \to 0.$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que F agit sur $\mathbb{Q}_\ell(n-m)$ par multiplication par $q^{n-m} = q^{d/2}$.

Quelques mots concernant les références. Les références de base sont bien sûr l'article de Deligne [2] et SGA 7 II ([4]). Les notes manuscrites de Katz ([8] et [9]) sont aussi très utiles. On pourra également consulter le livre de Freitag et Kiehl [5], ainsi que les notes de Milne [11].

3 Proposition d'exposés

3.1 Introduction ($\sim$ 1h-1h30)

Le contenu de cet exposé a été élaboré par Bernard le Stum. Esquisse du plan :

- Comptage de points modulo p et formes naïves des conjectures de Weil.
- Introduction des méthodes cohomologiques.
- Les conjectures de Weil, sauf la pureté, résultent facilement de l'existence d'un bon formalisme.

3.2 Preuve des conjectures de Weil, en dehors de l'hypothèse de Riemann ($\sim$ 1h30)

Les références sont [2] § 1-§ 2, et [11] § 27.

- Rappels des définitions : $\mathbb{Q}_\ell$-faisceau, cohomologie ℓ-adique, action du Frobenius sur la cohomologie.
- Preuve de la rationnalité. Rappeler notamment la formule des traces, donner l'interprétation cohomologique des fonctions L (en plus de [2] et [11], on pourra consulter [3], *Rapport sur la formule des traces*, section 3).
- Preuve le l'équation fonctionnelle. Rappeler notamment la dualité de Poincaré.
- Preuve de l'interprétation topologique. Voir [11], page 159 (e), et les références à 25.1, 20.5 qui s'y trouvent.

3.3 Pinceaux de Lefschetz : existence ($\sim$ 1h15)

La référence standard est l'exposé XVII de [4], mais on suggère ici de suivre [5] Chap. III, § 1-§ 2, où l'on trouvera une version simplifiée de l'existence de pinceaux de Lefschetz (proposition 1.5 de *loc.cit.*), et qui est suffisante pour la preuve de l'hypothèse de Riemann.

- Quadriques et points doubles ordinaires.
- Défintion des pinceaux de Lefschetz.
- Existence des pinceaux de Lefschetz (1.5 de *loc. cit.* et la preuve de $j(d)$ pour $d \geq 3$).
- Classification des points doubles ordinaires (donner l'énoncé 2.7 de *loc. cit.*, et sa forme géométrique 2.8 (*loc. cit.*) ; si possible, esquisser la preuve).

3.4 Formalisme des cycles évanescents ($\sim$ 1h30)

La référence générale est l'exposé XIII de [4]. On pourra utiliser [9] p. 310-321 pour les énoncés dont on a besoin, puis renvoyer à XIII de [4] pour les détails. Une autre référence possible est le Chap. III., § 3 de [5].

- Définition de $\mathrm{R}\Psi$ (cycles proches) et $\mathrm{R}\Phi$ (cycles évanescents) (2.1.1, 2.1.2 de [4] XIII, mais on ne cherche pas à définir le topos $Y \times_s \eta$, la description galoisienne suffit). Expliciter la fibre de $\mathrm{R}\Psi$ (=un groupe muni d'une action du groupe de galois, 2.1.4 de *loc. cit.*). Donner la suite exacte longue 2.1.8.9 de *loc. cit.* lorsque le morphisme structural est propre.
- Définition du morphisme de variation $\mathrm{Var}(\sigma)\colon \mathrm{R}\Psi \to \mathrm{R}\Phi$ pour un élément σ du groupe de Galois (1.4 de *loc. cit.* et sa version dérivée).
- Singularités isolées (2.4 de *loc. cit.*).

3.5 Formule de Picard-Lefschetz ($\sim$ 1h30)

Il s'agit de l'exposé XV de [4]. Une autre référence commode est sans doute [5] (Chap. III, § 4). Donner l'énoncé de la formule de Picard-Lefschetz, puis esquisser la preuve (par exemple, on peut esquisser la preuve de [5] Chap III, § 4, en admettant le lemme fondamental 4.10 de *loc. cit.*). Voir aussi [9] pages 337-350. Pour une preuve sans passer par voie transcendante, voir [7].

3.6 Théorie globale des cycles évanescents ($\sim$ 1h15)

Il s'agit du § 5 (5.8-5.11) de [2]. La référence détaillée est [9] pages 350-367. Voir aussi [5] Chap. III, § 7.

3.7 La majoration fondamentale ($\sim$ 1h)

Il s'agit de § 3 de [2] (ou [11] 30.6).

3.8 Preuve de l'hypothèse de Riemann ($\sim$ 1h30)

- Enoncer le théorème [2] 1.6 à démontrer, puis faire (ou admettre) le dévissage *loc. cit.* 1.7.
- Enoncer Lefschetz faible (corollaire de SGA 4, XIV 3.2, ou [5] Chap. I 9.4), qui sera constamment utilisé.
- Faire la preuve de l'hypothèse de Riemann, en suivant [2] § 6 et 7.

3.9 Applications ($\sim$ 2h)

Nous proposons de consacrer deux exposés aux application des conjectures de Weil. Voici quelques suggestions.

Dans [2] § 8, Deligne donne trois applications des conjectures de Weil :

1. estimation du nombre de points rationnels d'une intersection complète lisse sur $\mathbb{F}_q$;
2. majoration de coefficients de certaines formes modulaires (dont un cas particulier est la conjecture de Ramanajam pour les formes modulaires [1], [12]) ;
3. majoration de sommes complexes associées à certaines hypersurfaces lisses sur $\mathbb{F}_q$.

Deux autres applications possibles sont les suivantes :

5. Polynômes caractéristiques du Frobenius pour une cohomologie de Weil sur les variétés projectives lisses sur un corps fini de caractéristique $p > 0$ (ils doivent coincider avec ceux de la cohomologie ℓ-adique pour $\ell \neq p$) [10] ;
6. Définition de la filtration par le poids dans la conjecture monodromie-poids [6].

Il nous semble que les applications (1), (5) et (6) sont les plus naturelles dans le cadre de ce workshop et devraient être traitées. Cependant, si un orateur motivé souhaite présenter l'application (2), cela peut-être une bonne idée aussi : c'est une belle application des conjectures de Weil, et ça peut intéresser un public légèrement différent. Inconvénients : ce n'est plus tellement sur les conjectures de Weil elles-mêmes, et il faut avoir des connaissances sur les formes modulaires qui ne sont pas détaillées dans [2]. Deligne renvoie à son exposé Bourbaki *Formes modulaires et représentations ℓ-adiques*, exposé 35, février 1969, dans : Lecture Notes in Mathematics **79**.

Références

[1] B. Conrad, *Modular forms, Cohomology, and the Ramanujam conjecture*, notes.

[2] P. Deligne, *La conjecture de Weil. I*, Publ. Math. IHÉS **43** (1974), 273-307.

[3] P. Deligne et al., *Cohomologie étale*, SGA $4\frac{1}{2}$, Lect. Notes Math. **569**.

[4] P. Deligne et N. Katz, *Groupes de monodromie en géométrie algébrique, SGA 7 II*, Lect. Notes Math. **340**.

[5] E. Freitag et R. Kiehl, *Étale cohomology and the Weil conjecture*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3. Folge, Band 13.

[6] T. Ito, *Weight-monodromy conjecture over equal characteristic local fields*, Amer. J. Math. **127** (2005), 647-658.

[7] L. Illusie, *Sur la formule de Picard-Lefschetz*, in Algebraic geometry 2000, Azumino. (Hotaka), Adv. Stud. Pure Math. **36** (2002), Math. Soc. Japan, 249-268.

[8] N. Katz, *Lectures on Deligne's proof of the RH for the varieties over finite fields I*, unpublished handwritten lecture notes.

[9] N. Katz, *Lectures on Deligne's proof of the RH for the varieties over finite fields II*, unpublished handwritten lecture notes.

[10] N. Katz et W. Messing, *Some consequences of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields*, Inventiones. Math. **23** (1974), 73-77.

[11] J. Milne, *Lectures on étale cohomology*, notes disponibles sur sa page web.

[12] T. Saito, *Galois representations and modular forms*, notes.

[13] A. Weil, *Numbers of solutions of equations in finite fields*, Bull. Am. Math. Soc. **55** (1949), 497-508.