

# LE SYSTÈME DE BORN-INFELD ÉLARGI: DES ONDES AUX PARTICULES ET AUX CORDES

YANN BRENIER

**Résumé.** Il est traditionnel de dériver la dynamique classique des particules à partir de solutions oscillantes d'équations d'onde de la mécanique quantique (Schrödinger ou Dirac), en passant à la limite sur la fréquence d'oscillation (méthodes WKB, intégrales de Feynman, phase stationnaire, mesures de Wigner etc...). Le but de l'exposé est de montrer qu'on peut non seulement retrouver ces mouvements, mais aussi ceux de cordes classiques, voire de membranes, d'une façon très différente, à partir de solutions de très grande intensité des équations introduites par Born et Infeld en 1934 pour leur théorie non-linéaire du champ électromagnétique. Il s'agit de l'exposé de travaux effectués pour partie avec Wen-An Yong, de l'université de Heidelberg. On discutera aussi du prolongement des solutions des équations de Born-Infeld au delà de l'apparition de singularités. On obtiendra comme sous-produit une reformulation purement hilbertienne des lois de conservation scalaires unidimensionnelles avec données initiales monotones.

## 1. INTRODUCTION

Le passage des ondes aux particules est un sujet de recherche courant en physique mathématique. Prenons l'exemple bien connu de l'équation de Schrödinger d'une particule quantique en présence d'un potentiel  $\Phi(t, x)$  dépendant du temps  $t$  et de la variable d'espace  $x \in \mathbb{R}^3$ :

$$(1.1) \quad i\epsilon\partial_t\psi + \frac{\epsilon^2}{2}\Delta\psi + \Phi\psi = 0,$$

où le paramètre  $\epsilon$  dépend de la constante de Planck et de la masse, après une mise à l'échelle adéquate. Là où la fonction d'onde complexe  $\psi$  ne s'annule pas, on peut l'écrire sans ambiguïté

$$\psi(t, x) = \sqrt{\rho(t, x)} \exp(i\frac{S(t, x)}{\epsilon})$$

et on trouve pour les variables  $\rho > 0$  et  $v = \nabla S$ , les équations de Madelung [15]:

$$(1.2) \quad \partial_t\rho + \nabla \cdot (\rho v) = 0, \quad \partial_t v + (v \cdot \nabla)v = \nabla\Phi + \frac{\epsilon^2}{2}\nabla\left(\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}\right).$$

Si l'on néglige  $\epsilon$  dans cette équation ("limite classique"), on retrouve les équations de mécanique classique d'un milieu continu de densité  $\rho$  et de vitesse  $v = \nabla S$ :

$$(1.3) \quad \partial_t\rho + \nabla \cdot (\rho v) = 0, \quad \partial_t v + (v \cdot \nabla)v = \nabla\Phi,$$

et d'accélération  $\nabla\Phi$ . En effet, en notant  $X(t, a)$  la position dans  $\mathbb{R}^3$  d'une particule d'étiquette  $a \in \mathbb{R}^3$  au temps  $t$ , la deuxième équation de (1.3), ne fait qu'exprimer la "loi de Newton":

$$\partial_{tt}X(t, a) = (\nabla\Phi)(t, X(t, a)).$$

Ainsi, on a un exemple élémentaire (au niveau formel seulement) de passage des ondes aux particules.

Le but de cet exposé est de montrer un autre exemple de passage onde/particule fondé sur la théorie de l'électromagnétisme non-linéaire de Born et Infeld [1]. La transition se fera par concentration avec des solutions de très haute énergie. La théorie de Born-Infeld est la formalisation d'une idée de Born, consistant à corriger de façon non-linéaire les équations de l'électrostatique, de sorte que le champ électrostatique généré par une charge ponctuelle (l'électron) reste inconditionnellement borné par une constante absolue  $E_0$  à déterminer (ce que fait Born en fonction de la masse de l'électron supposée d'origine purement électrostatique). Born propose comme Lagrangien de sa théorie électrostatique non-linéaire l'expression

$$L = -\sqrt{E_0^2 - E^2}$$

pour le champ électrique  $E(t, x)$ , en s'inspirant manifestement de la relativité restreinte (où toutes les vitesses sont supposées bornées par celle de la lumière).

Un petit calcul rapide permet de trouver le champ électrostatique correspondant à une charge ponctuelle. On trouve une solution radiale

$$E = E(r) = E_0 \frac{r_0^2}{\sqrt{r_0^4 + r^4}},$$

où  $r_0$  doit être ajusté en fonction de la charge et de  $E_0$ . Avec son choix de  $E_0$ , Born voit que cette valeur est atteinte par le champ électrostatique classique (de Coulomb) à une distance de l'ordre de  $10^{-15}$  mètres. Autrement dit, le champ de Born et celui de Coulomb ne diffèrent vraiment qu'à l'échelle atomique. Dans le travail avec Infeld [1], Born passe à l'électromagnétisme, corrige les équations de Maxwell en proposant le lagrangien

$$L = -\sqrt{E_0^2 - E^2 + B^2 - E_0^{-2}(E \cdot B)^2}$$

pour le champ électromagnétique  $(E, B)$ , sujet aux contraintes différentielles:

$$(1.4) \quad \nabla \cdot B = 0, \quad \partial_t B + \nabla \times E = 0.$$

Dorénavant, nous poserons  $E_0 = 1$  (quitte à modifier les unités). Après un calcul de variations élémentaire, on trouve les équations de Born-Infeld (homogènes):

$$(1.5) \quad \partial_t B + \nabla \times E = 0, \quad \partial_t D - \nabla \times H = 0, \quad \nabla \cdot B = \nabla \cdot D = 0,$$

$$(1.6) \quad E = \frac{B \times V + D}{h}, \quad H = \frac{-D \times V + B}{h},$$

où

$$(1.7) \quad h = \sqrt{1 + B^2 + D^2 + |D \times B|^2}, \quad V = D \times B,$$

et  $|\cdot|$  désigne la norme euclidienne.

Sur le caractère apparemment arbitraire de la théorie non-linéaire de Born-Infeld, il est bon de faire quelques observations. (Au fil de l'exposé, on se convaincra que les équations de Born-Infeld sont dotées de propriétés tout à fait exceptionnelles.) Rappelons que les contraintes différentielles (1.4) ne font qu'exprimer la propriété que le champ électromagnétique  $(E, B)$  dérive (en tant que 2-forme différentielle sur l'espace temps), au

moins localement, d'un potentiel vecteur (i.e. une 1-forme)  $A = (A_0, A_1, A_2, A_3)$ . Ainsi on a:

$$E_i = \partial_t A_i + \partial_i A_0, \quad i = 1, 2, 3, \quad B_1 = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2, \quad \text{etc...}$$

Le Lagrangien de Born-Infeld se réécrit simplement

$$L = -\sqrt{-\det(g + F)}$$

où  $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$  et  $g$  est la métrique de l'espace-temps, qui, ici, est celle de l'espace plat  $g = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ . (La métrique  $g$  peut, bien entendu, être une métrique de Minkowski quelconque, et même varier selon les équations d'Einstein. Nous ne ferons rien de tel le long de cet exposé. Notons aussi que  $\sqrt{-\det g}$  est l'élément de volume de la variété. Le lagrangien de Born-Infeld est donc une sorte de volume généralisé incluant une composante électromagnétique. On retrouve là l'idée assez commune dans les années 30, d'un tenseur  $g + F$  unifiant, avec sa partie symétrique, la gravité et, avec sa partie antisymétrique, l'électromagnétisme.)

Dès sa parution, le travail de Born-Infeld [1] attire l'attention (voir [17] par exemple), mais l'intérêt qui lui est porté s'étioule rapidement avec l'émergence de l'électrodynamique quantique. Revivifiée dans les années 50, la théorie de Born-Infeld réapparaît en physique des hautes énergies, dans les années 90, en connexion avec le concept de D-branes [16, 11]. Ceci n'est pas surprenant, puisque le lagrangien de base de la théorie des cordes, celui de Nambu-Goto, qui décrit les surfaces extrémales de dimension deux dans l'espace-temps quadridimensionnel de Minkowski, n'est rien d'autre que le lagrangien de Born-Infeld, lorsque le champ  $(E, B)$  ne dépend que d'une seule coordonnée spatiale. De même pour les champs ne dépendant que de deux coordonnées spatiales, avec  $E$  et  $B$  perpendiculaires, le lagrangien de Born-Infeld coïncide avec celui des surfaces extrémales de codimension un dans l'espace temps à trois dimension. Typiquement, on écrit  $B = (-\partial_2 \phi, \partial_1 \phi, 0)$ ,  $E = (0, 0, \partial_t \phi)$ , où  $\phi = \phi(t, x_1, x_2)$  est une fonction scalaire. Le lagrangien de Born-Infeld (avec la normalisation  $E_0 = 1$ ) devient alors

$$L = -\sqrt{1 - \partial_t \phi^2 + |\nabla \phi|^2},$$

i.e. l'élément d'aire (relatif à la métrique de Minkowski) du graphe

$$(t, x_1, x_2) \rightarrow (t, x_1, x_2, \phi(t, x_1, x_2))$$

dans l'espace-temps tridimensionnel. Les équations correspondantes:

$$\partial_t \left( \frac{\partial_t \phi}{L} \right) - \nabla \cdot \left( \frac{\nabla \phi}{L} \right) = 0,$$

ont été récemment étudiées, du point de vue des EDP, par Lindblad [14]. Utilisant les "formes nulles" de Klainerman, Lindblad montre l'existence globale de solutions régulières pour le problème de Cauchy, pour de petites données initiales nulles à l'infini. Dans la foulée, Chae et Huh [8] obtiennent le même type de résultats pour le système complet de Born-Infeld. Ces résultats peuvent être considérés comme perturbatifs par rapport à la théorie classique de Maxwell. Il y a pourtant d'autres régimes intéressants, lorsque les champs  $(B, D)$  sont forts. En effet, et c'est l'objet principal de l'exposé, le comportement des solutions s'approchent alors de celui d'un continuum de particules, ou de cordes suivant les échelles. Ainsi, on observe une transition ondes/particules (et ondes/cordes) par un itinéraire très différent de celui de Madelung, décrit au tout début de cette introduction. L'analyse mathématique de cette transition est considérablement simplifiée par

deux observations, l'une faite dans [4] et l'autre, avec le concours de Wen-An Yong, dans [6]:

1) Plutôt que de considérer les équations de Born-Infeld proprement dites (1.5,1.6,1.7), on leur ajoute quatre lois de conservation supplémentaires régissant  $h$  et  $V$  (définies par (1.7)), grace au théorème de Noether, et on découple les variables  $h, V$  des variables  $(B, D)$ , en oubliant les contraintes algébriques (1.7). (Introduite dans [4], cette idée a été développée dans une direction un peu différente, pour des modèles généraux d'électromagnétisme non-linéaire, dans [19].)

2) Ecrire les équations augmentées, un système de 10 lois de conservations à 10 inconnues, sous forme non-divergentielle, ce qui permet de complètement désingulariser les états correspondant aux champs intenses et, en prime, de complètement symétriser les équations.

## 2. LE SYSTÈME DE BORN-INFELD ET SA VERSION ÉTENDUE NON CONSERVATIVE

Les champs de vecteur  $B$  et  $D$  du système de Born-Infeld sont solutions de

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \partial_t B + \nabla \times \left( \frac{B \times V + D}{h} \right) &= 0, & \nabla \cdot B &= 0, \\ \partial_t D + \nabla \times \left( \frac{D \times V - B}{h} \right) &= 0, & \nabla \cdot D &= 0, \end{aligned}$$

où

$$(2.2) \quad h = \sqrt{1 + B^2 + D^2 + |D \times B|^2}, \quad V = D \times B,$$

et  $|\cdot|$  désigne la norme euclidienne. On voit tout de suite que les équations classiques de Maxwell dans le vide

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \partial_t B + \nabla \times D &= 0, & \nabla \cdot B &= 0, \\ \partial_t D - \nabla \times B &= 0, & \nabla \cdot D &= 0, \end{aligned}$$

peuvent s'interpréter comme limites des équations de BI, pour des champs de faible amplitude  $B, D \ll 1$ .

Comme le lagrangien de la théorie BI n'implique explicitement ni le temps ni l'espace, il en découle, par le théorème de Noether, des lois de conservation supplémentaires (de l'énergie et de l'impulsion, selon la terminologie des physiciens) pour les variables  $h$  (énergie) et  $V$  (impulsion ou vecteur de Poynting). L'idée de [4] est d'ajouter au système BI ces lois de conservation supplémentaires.

En notant

$$v = V/h, \quad b = B/h, \quad d = D/h,$$

on obtient alors un système de 10 lois de conservation (toujours en dimension 3 d'espace), que nous appelons système ABI (augmented Born-Infeld):

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \partial_t h + \nabla \cdot (hv) &= 0, \\ \partial_t(hv) + \nabla \cdot (hv \otimes v - hb \otimes b - hd \otimes d) &= \nabla(h^{-1}), \\ \partial_t(hb) + \nabla \cdot (hb \otimes v - hv \otimes b) + \nabla \times d &= 0, \\ \partial_t(hd) + \nabla \cdot (hd \otimes v - hv \otimes d) - \nabla \times b &= 0 \end{aligned}$$

avec les contraintes différentielles:

$$(2.5) \quad \nabla \cdot (hb) = \nabla \cdot (hd) = 0.$$

L'idée principale de [4] est de substituer le système ABI au système BI après avoir noté que ce dernier n'est rien d'autre que le premier restreint à la variété algébrique, que nous appellerons variété BI, définie par:

$$V = D \times B, \quad h = \sqrt{1 + D^2 + B^2 + V^2}.$$

Plus précisément, toute solution régulière du système ABI à valeurs dans la variété BI au temps initial le restera pour tous les autres temps. L'écriture du système ABI sous forme non conservative, en utilisant comme variables  $d, b, v$  et  $\tau = h^{-1}$ , est encore plus frappante:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \partial_t \tau + (v \cdot \nabla) \tau - \tau \nabla \cdot v &= 0, \\ \partial_t v + (v \cdot \nabla) v - (b \cdot \nabla) b - (d \cdot \nabla) d - \tau \nabla \tau &= 0, \\ \partial_t b + (v \cdot \nabla) b - (b \cdot \nabla) v + \tau \nabla \times d &= 0, \\ \partial_t d + (v \cdot \nabla) d - (d \cdot \nabla) v - \tau \nabla \times b &= 0, \end{aligned}$$

où on omet les contraintes différentielles (2.5). On est en présence d'un système symétrique (donc forcément hyperbolique) dont les non-linéarités sont quadratiques homogènes. Ce système, que nous appellerons NCABI (non-conservative augmented Born-Infeld equations), possède une série de propriétés remarquables que nous allons examiner.

**2.1. Domaine de définition.** Le système NCABI est bien défini pour *tout* état  $(\tau, v, d, b) \in \mathbb{R}^{10}$ . En particulier, les états pour lesquels  $\tau = 0$  et même  $\tau < 0$  sont mathématiquement acceptables.

**2.2. Conservation de la variété BI.** La variété BI s'écrit très élégamment sous la forme

$$(2.7) \quad \tau > 0, \quad \tau^2 + b^2 + d^2 + v^2 = 1, \quad \tau v = d \times b.$$

Cette variété est conservée par les solutions régulières du système NCABI.

**2.3. Conservation des contraintes différentielles.** Les contraintes différentielles (2.5) sont également conservées par les solutions régulières du système NCABI.

**2.4. Invariance galiléenne classique.** Le système NCABI est invariant selon les transformations galiléennes classiques suivantes:

$$(t, x) \rightarrow (t, x + tc), \quad (\tau, v, d, b) \rightarrow (\tau, v - c, d, b),$$

pour toute "vitesse" constante  $c$ . Cette propriété est paradoxale, puisque le système BI est relativiste. Le mystère s'éclaircit une fois que l'on a observé que la variété BI (2.7) n'est pas compatible avec de telles transformations.

**2.5. Intégrabilité des solutions unidimensionnelles.** Les solutions régulières du système NCABI qui ne dépendent que d'une seule variable d'espace,  $x_1$  pour fixer les idées, peuvent se calculer aisément. On introduit d'abord les variables

$$(2.8) \quad z = \sqrt{b_1^2 + d_1^2 + \tau^2}, \quad u = \left( \frac{b_1}{z}, \frac{d_1}{z}, \frac{\tau}{z} \right), \quad w = (b_2, b_3, d_2, d_3, v_2, v_3).$$

Elles vérifient les équations suivantes:

$$(2.9) \quad (\partial_t + v_1 \partial_1)z = z \partial_1 v_1, \quad (\partial_t + v_1 \partial_1)v_1 = z \partial_1 z,$$

$$(2.10) \quad (\partial_t + v_1 \partial_1)u = 0, \quad (\partial_t + v_1 \partial_1)w = z A(u) \partial_1 w,$$

avec

$$(2.11) \quad A(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & u_3 & u_1 & 0 \\ 0 & 0 & -u_3 & 0 & 0 & u_1 \\ 0 & -u_3 & 0 & 0 & u_2 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_2 \\ u_1 & 0 & u_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_1 & 0 & u_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -iu_3 & u_1 \\ iu_3 & 0 & u_2 \\ u_1 & u_2 & 0 \end{pmatrix}$$

(avec des notations complexes évidentes). Tant que  $z$  reste borné entre  $\alpha$  et  $\alpha^{-1}$  pour une constante  $\alpha > 0$ , on peut effectuer, à chaque temps  $t$ , un changement de coordonnées spatiales (eulérien-lagrangien pour reprendre le langage de la mécanique des milieux continus)  $x \rightarrow s$ , défini par:

$$(2.12) \quad \partial_s X(t, s) = z(t, X(t, s)), \quad \partial_t X(t, s) = v_1(t, X(t, s)).$$

En posant

$$(2.13) \quad U(t, s) = u(t, X(t, s)), \quad W(t, s) = w(t, X(t, s)),$$

on peut réécrire le système (2.9,2.10) sous la forme

$$(2.14) \quad \partial_{tt} X = \partial_{ss} X, \quad \partial_t U = 0, \quad \partial_t W = A(U) \partial_s W,$$

la matrice  $A$  étant toujours définie par (2.11). Ainsi on a réduit le système NCABI unidimensionnel à une équation des ondes linéaires et à un système hyperbolique linéaire à coefficients variables en espace. Sachant que  $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$ , on voit que les valeurs propres de la matrice  $A$  sont toujours  $+1$ ,  $-1$  et  $0$ , chacune de multiplicité deux.

**2.6. Apparition de singularités en temps fini.** L'examen des solutions unidimensionnelles montre que le système NCABI a des solutions régulières tantôt globales tantôt locales en fonction des données initiales. En effet, la réduction à l'équation des ondes en dimension un n'est possible que tant que la transformation (2.12) est valide, ce qui suppose  $\partial_s X > 0$ . Or l'équation des ondes, réécrite sous forme:

$$(2.15) \quad \partial_t X = \partial_s U, \quad \partial_t U = \partial_s X,$$

est explicitement résolue par la formule de d'Alembert

$$(2.16) \quad \begin{aligned} X(t, s) &= \frac{1}{2}(X(0, s+t) + X(0, s-t) + U(0, s+t) - U(0, s-t)), \\ U(t, s) &= \frac{1}{2}(X(0, s+t) - X(0, s-t) + U(0, s+t) + U(0, s-t)). \end{aligned}$$

On voit tout de suite que la condition d'inversibilité  $\partial_s X > 0$  sera globalement assurée (pour  $-\infty < t < +\infty$ ) si et seulement si les conditions initiales vérifient:

$$(2.17) \quad \partial_s(X + U)(0, s) > \partial_s(U - X)(0, \tilde{s}), \quad \forall (s, \tilde{s}) \in \mathbb{R}^2.$$

Si cette condition n'est pas satisfaite, une singularité apparaît nécessairement en temps fini (positif ou négatif) pour la solution correspondante du système NCABI. (Ce résultat n'est pas nouveau. Voir par exemple [18] (volume II).)

### 3. LIMITES DE CHAMPS FORTS: PARTICULES, CORDES ET MEMBRANES

**3.1. Les systèmes réduits.** Pour le système NCABI (2.6), l'état  $\tau = 0$  n'est en rien singulier. Or il correspond au cas de champs infiniment intenses (puisque  $\tau = h^{-1}$ ). Le système réduit, obtenu en annulant  $\tau$  dans les équations s'écrit:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \partial_t v + v \cdot \nabla v - b \cdot \nabla b - d \cdot \nabla d &= 0, \\ \partial_t b + v \cdot \nabla b - b \cdot \nabla v &= 0, \\ \partial_t d + v \cdot \nabla d - d \cdot \nabla v &= 0. \end{aligned}$$

On peut encore réduire le système de façon cohérente en annulant la variable  $d$  à son tour:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \partial_t v + v \cdot \nabla v - b \cdot \nabla b &= 0, \\ \partial_t b + v \cdot \nabla b - b \cdot \nabla v &= 0. \end{aligned}$$

Finalement,  $\tau = 0$ ,  $b = d = 0$ , réduit le système NCABI (2.6) à la simple équation:

$$(3.3) \quad \partial_t v + v \cdot \nabla v = 0.$$

parallèlement, la variété de Born-Infeld (2.7) devient successivement:

$$(3.4) \quad b^2 + d^2 + v^2 = 1, \quad d \times b = 0, \quad v \cdot b = v \cdot d = 0,$$

$$(3.5) \quad b^2 + v^2 = 1, \quad v \cdot b = 0,$$

$$(3.6) \quad v^2 = 1,$$

en association respective avec les systèmes réduits (3.1), (3.2) et (3.3).

**3.2. Intégration des systèmes réduits.** La série des systèmes réduits (3.1), (3.2) et (3.3) a une interprétation simple en termes à la fois géométriques et physiques. En effet, l'équation la plus réduite (3.3) décrit un continuum de particules se mouvant en ligne droite à vitesse constante. Si, la contrainte BI réduite (3.6) est imposée de surcroît, ces particules ont la vitesse 1 (i.e. la vitesse de la lumière) et s'interprètent donc comme des particules sans masse (des photons). On retrouve donc l'optique géométrique. (En milieu homogène, bien entendu, avec une métrique  $g$  générale, on obtiendrait l'optique géométrique en toute généralité.)

le système réduit (3.2) est plus subtile et décrit en fait un continuum de cordes vibrantes, comme on va le voir dans un instant. La condition (3.5) assure que ces cordes sont authentiquement relativistes (i.e. correspondent à des surfaces extrémales dans l'espace de Minkowski). Il est notable que (3.2) décrit aussi la magnétohydrodynamique en "eau peu profonde" (shallow water MHD), à condition de négliger la gravité. Voir [12]. De même, le système (3.1) décrit un continuum de membranes vibrantes. Ces observations résultent du résultat élémentaire suivant:

**Proposition 3.1.** *Soit  $(s, r, u) \in \mathbb{R}^3 \rightarrow X(t, s, r, u)$  une famille de difféomorphismes de  $\mathbb{R}^3$ , paramétrée par  $t \in [-T, T]$ . Soient  $\lambda, \mu$  deux constantes positives ou nulles. Supposons:*

$$(3.7) \quad \partial_{tt}X = \lambda \partial_{ss}X + \mu \partial_{rr}X$$

et définissons implicitement

$$(3.8) \quad b(t, X(t, s, r, u)) = \partial_s X(t, s, r, u),$$

$$(3.9) \quad d(t, X(t, s, r, u)) = \partial_r X(t, s, r, u),$$

$$(3.10) \quad v(t, X(t, s, r, u)) = \partial_t X(t, s, r, u)..$$

Alors  $(b, d, v)$  sont des solutions régulières sur  $[-T, T]$  respectivement des systèmes (3.1), si  $\lambda = \mu = 1$ , (3.2) si  $\lambda = 1, \mu = 0$  et (3.3) si  $\lambda = \mu = 0$ .

La preuve est une application directe de la dérivation des applications composées: il suffit de dériver (3.8,3.9,3.10) par rapport à  $t$ , d'utiliser (3.7) pour trouver les équations voulues (3.1,3.2,3.3).

L'interprétation géométrique est très simple. Dans le cas  $\lambda = \mu = 0$ , chaque trajectoire  $t \rightarrow X(t, r, s, u)$  est droite et  $(r, s, u)$  varie dans  $\mathbb{R}^3$ .

Si  $\lambda = 1$  et  $\mu = 0$ , chaque surface  $(t, s) \rightarrow X(t, r, s, u)$  est régie par l'équation des ondes

$$\partial_{tt}X = \partial_{ss}X,$$

et correspond à une corde vibrante, alors que  $(r, u)$  varie dans  $\mathbb{R}^2$ . Notons que les contraintes algébriques (3.5) s'écrivent

$$\partial_t X^2 + \partial_s X^2 = 1, \quad \partial_t X \cdot \partial_s X = 0,$$

ce qui assure que les cordes sont bien relativistes (i.e. sont des surfaces extrémales dans l'espace de Minkowski).

Finalement, observons que les systèmes réduits, qui sont donc tous intégrables, à l'aide d'équations d'ondes linéaires, ont des solutions régulières globales ou non, selon les données initiales, suivant que  $(r, s, u) \rightarrow X(t, r, s, u)$  reste ou non inversible de  $\mathbb{R}^3$  dans lui-même.

**3.3. Convergence vers les systèmes réduits.** La réécriture des équations de Born-Infeld sous la forme du système symétrique NCABI (2.6) rend triviale l'asymptotique des champs intenses, au moins en temps petit, puisque les états  $\tau = 0$ , ou  $\tau = d = 0$ , ne sont en rien singuliers! Avec un tel argument, l'intervalle de temps, sur lequel la convergence a lieu, dépend grossièrement de la norme  $H^s$  des données initiales, pour  $s > 5/2$ . Lorsque les systèmes limites ont des solutions sur un intervalle de temps plus grand, éventuellement infini, on s'attend à ce que les solutions approchées du système NCABI convergent sur un intervalle de temps comparable. Ce résultat peut en effet être obtenu par les méthodes d'énergie classique, dans la lignée de [13]. Les détails sont exposés dans [6]. Donnons un exemple de résultat reliant cordes et solutions du système de Born-Infeld lorsque le champ magnétique initial est très intense. (Pour simplifier on le suppose constant.)



**Théorème 3.2.** Soit  $B_0^* = (1, 0, 0)$  et  $D_0^*$  un champ régulier à divergence nulle et nul à l'infini sur  $\mathbb{R}^3$ . Pour  $\epsilon > 0$ , considérons  $(B, D) = (B_\epsilon, D_\epsilon)$  solution locale du système original de Born-Infeld (1.5) avec donnée initiale:

$$B(t=0, x) = \frac{B_0^*}{\epsilon}, \quad D(t=0, x) = D_0^*(x).$$

Soit la famille, paramétrée par  $a \in \mathbb{R}^2$ , de cordes vibrantes (relativistes)  $(t, s) \rightarrow X(t, s, a)$ , solutions de  $\partial_{tt}X = \partial_{ss}X$ , avec valeurs initiales:

$$(3.11) \quad \begin{aligned} X(t=0, s, a) &= (s, a), \\ \partial_t X(t=0, s, a) &= \frac{D_0^* \times B_0^*}{\sqrt{|B_0^*|^2 + |D_0^* \times B_0^*|^2}}(s, a). \end{aligned}$$

Alors il existe  $\epsilon_0 > 0$  et  $T > 0$  tels que, pour tout  $t \in [0, T]$  et tout  $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ :

- i)  $(s, a) \rightarrow X(t, s, a)$  est un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ ,
- ii)  $(B, D)$  est régulier avec  $\inf_{0 \leq t \leq T} \inf_{(x, \epsilon)} \epsilon |B(t, x)| > 0$ ,

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \frac{B}{\sqrt{B^2 + |D \times B|^2}}(t, X(t, s, a)) &= \partial_s X(t, s, a) + O(\epsilon), \\ \frac{D \times B}{\sqrt{B^2 + |D \times B|^2}}(t, X(t, s, a)) &= \partial_t X(t, s, a) + O(\epsilon). \end{aligned}$$

*Esquisse de preuve.* Pour montrer ce résultat il suffit d'appliquer les résultats indiqués plus haut pour le système NCABI. Plus précisément on pose d'abord.

$$\tau_\epsilon = \frac{1}{\sqrt{1 + B^2 + D^2 + |D \times B|^2}}, \quad b_\epsilon = \tau B, \quad d_\epsilon = \tau D, \quad v_\epsilon = \tau D \times B.$$

On note qu'au temps  $t = 0$ :

$$\tau_\epsilon = O(\epsilon), \quad d_\epsilon = O(\epsilon), \quad b_\epsilon = b_0^* + O(\epsilon), \quad v_\epsilon = v_0^* + O(\epsilon),$$

où

$$b_0^* = \frac{B_0^*}{\sqrt{|B_0^*|^2 + |D_0^* \times B_0^*|^2}}, \quad v_0^* = \frac{D_0^* \times B_0^*}{\sqrt{|B_0^*|^2 + |D_0^* \times B_0^*|^2}}.$$

Du caractère bien posé du système NCABI dans les espaces de Sobolev  $H^s$  pour  $s > 5/2$ , on déduit immédiatement qu'il existe un temps  $T > 0$  et un  $\epsilon_0 > 0$  pour lesquels

- 1) la solution  $(\tau_\epsilon, v_\epsilon, d_\epsilon, b_\epsilon)$  est bien définie pour  $t \in [0, T]$  et  $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ ;
- 2) cette solution est, en norme  $H^s$ , à distance  $\epsilon$  de la solution "limitée"  $(\tau^*, v^*, d^*, b^*)$  admettant pour données initiales  $(0, v_0^*, b_0^*, 0)$ .

Compte tenu de l'homogénéité du système NCABI (2.6), la solution limite vérifie  $\tau^* = 0$ ,  $d^* = 0$  et  $(v^*, b^*)$  est solution du système réduit (3.2) avec donnée initiale  $(v_0^*, b_0^*)$ . Selon la proposition 3.1, on peut donc intégrer le système réduit (3.2) à l'aide de cordes vibrantes, de sorte que

$$b^*(t, X(t, s, a)) = \partial_s X(t, s, a), \quad v^*(t, X(t, s, a)) = \partial_t X(t, s, a),$$

tant que  $(s, a) \rightarrow X(t, s, a)$  reste un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ .

Vérifions ensuite que  $\epsilon |B|$  reste minoré. Comme  $(\tau_\epsilon, v_\epsilon, d_\epsilon, b_\epsilon)$  est à distance  $\epsilon$  de

$(\tau^*, v^*, d^*, b^*) = (0, v^*, 0, b^*)$ , en norme  $H^s$  avec  $s > 3/2$ , on a  $\tau_\epsilon^2 + d_\epsilon^2 \leq K\epsilon^2$  sur l'intervalle  $[0, T]$  pour une certaine constante  $K > 0$ . Cela se réécrit:

$$\frac{1 + D^2}{K\epsilon^2} \leq 1 + B^2 + D^2 + |D \times B|^2 \leq (1 + B^2)(1 + D^2).$$

On en déduit que:  $1 + B^2 \geq K^{-1}\epsilon^{-2}$  et  $(1 + D^2)(1 - K\epsilon^2) \leq K\epsilon^2(B^2 + |D \times B|^2)$ . Ainsi  $\epsilon|B|$  reste minoré et

$$\frac{B^2 + |D \times B|^2}{1 + B^2 + D^2 + |D \times B|^2} = 1 + O(\epsilon).$$

Donc:

$$\frac{B}{\sqrt{B^2 + |D \times B|^2}} = b_\epsilon + O(\epsilon) = b^* + O(\epsilon), \quad \frac{D \times B}{\sqrt{B^2 + |D \times B|^2}} = v_\epsilon + O(\epsilon) = v^* + O(\epsilon),$$

et les résultats du théorème s'ensuivent sans difficulté.

Observons qu'une démonstration directe de ce théorème serait probablement très lourde sans l'utilisation du système élargi NCABI.

#### 4. SOLUTIONS DISSIPATIVES AU DELÀ DES SINGULARITÉS

Les systèmes BI, NCABI et les systèmes réduits à haute énergie sont tous susceptibles de voir apparaître des singularités en temps fini. C'est en particulier le cas du plus simple d'entre eux (3.3), bien connu (souvent sous le nom d'équation de Burgers). La question se pose naturellement de prolonger ces solutions au delà des singularités et de voir si l'on peut ainsi rendre le problème de Cauchy bien posé globalement dans un espace de solutions peu régulières. La procédure la plus simple (et dont la pertinence est à discuter en fonction du contexte physique) est de nature dissipative et ne concerne que le problème de Cauchy progressif (i.e. pour les  $t > 0$ ). On connaît ainsi, pour les équations de type Burgers et sous certaines conditions, la théorie des solutions entropiques, remontant à Kruzhkov et Volpert dans les années 70, fondée sur l'espace  $L^1$  et celle des solutions de viscosité, due à Crandall et Lions et fondée sur l'espace  $C^0$ , dans les années 80. Elles permettent de donner un sens à des solutions généralisées et de montrer le caractère bien posé des équations correspondantes dans les espaces appropriés ( $L^1$  et  $C^0$  respectivement). Il est remarquable que les équations couvertes par ces deux théories décrivent des particules se déplaçant en ligne droite, selon l'équation  $\partial_{tt}X = 0$ , ou plus généralement selon une dynamique de particules ponctuelles sous l'action d'une force extérieure imposée. Les équations qui nous préoccupent dans cet exposé sont plus complexes. Typiquement, le système NCABI en dimension un et le système réduit (3.2) décrivent des cordes vibrantes selon le système (2.15). Les singularités apparaissent dès qu'une solution  $(t, s) \rightarrow X(t, s)$  de ce système (2.15) viole la condition de passage eulérien lagrangien, à savoir, dans le cas unidimensionnel:  $\partial_s X > 0$ . Or, la théorie classique des opérateurs maximaux montones [7] permet de rendre les solutions globales en imposant la contrainte relâchée  $\partial_s X \geq 0$ . Il suffit pour cela, de considérer l'espace  $H = L^2(\mathbb{R})^2$  et d'y définir un potentiel convexe  $\Phi$  par

$$(4.13) \quad \Phi(X) = 0, \quad \text{si } \partial_s X \geq 0, \quad \Phi(X) = +\infty \quad \text{sinon.}$$

Au lieu de résoudre (2.15) on cherche plutôt les solutions de:

$$(4.14) \quad 0 \in \partial_t X - \partial_s U + (\partial\Phi)(X), \quad \partial_t U = \partial_s X,$$

avec les notations de l'analyse convexe [7]. Les solutions sont bien définies dans l'espace des fonctions continues du temps à valeurs dans  $H = L^2(\mathbb{R})^2$ ,  $t \rightarrow (X(t, \cdot), U(t, \cdot))$  et forment, pour  $t \geq 0$ , un semi-groupe de contraction dans  $H$ . En particulier deux solutions  $(X, U)$  et  $(Y, V)$  vérifient toujours:

$\|X(t, \cdot) - Y(t, \cdot)\|_{L^2} + \|U(t, \cdot) - V(t, \cdot)\|_{L^2} \leq \|X(s, \cdot) - Y(s, \cdot)\|_{L^2} + \|U(s, \cdot) - V(s, \cdot)\|_{L^2}$ , pour tous  $t \geq s \geq 0$ . Plus concrètement, les solutions de (4.13,4.14) peuvent être obtenues par approximation, des deux façons différentes suivantes.

*Approximation numérique.* On introduit un réseau discret pour les variables  $(t, s)$ , de pas uniformes  $\delta t > 0$  en  $t$  et  $\delta s > 0$  en  $s$ . On impose  $\delta t = \delta s$  de sorte que les ondes générées par (2.15) se propagent exactement sur le réseau. L'approximation numérique  $X_{n,i}$  de la solution  $X(n\delta t, i\delta s)$  est définie, pour chaque pas de temps  $n = 0, 1, \dots$ , en deux étapes. On utilise d'abord la formule de d'Alembert (2.16) et on pose:

$$(4.15) \quad \begin{aligned} \tilde{X}_{n+1,i} &= \frac{1}{2}(X_{n,i+1} + X_{n,i-1} + U_{n,i+1} - U_{n,i-1}), \\ U_{n+1,i} &= \frac{1}{2}(X_{n,i+1} - X_{n,i-1} + U_{n,i+1} + U_{n,i-1}). \end{aligned}$$

La suite obtenue  $i \rightarrow \tilde{X}_{n+1,i}$  n'étant pas forcément croissante, on la réarrange dans l'ordre croissant, ce qui fournit les valeurs valeurs  $X_{n+1,i}$  désirées. On alors:

**Théorème 4.1.** *Lorsque  $\delta t = \delta s \rightarrow 0$  les solutions approchées fournies par le schéma numérique et convenablement initialisées convergent vers les solutions de (4.13,4.14).*

La démonstration est essentiellement la même que celle utilisée dans [5] pour la théorie des cordes vibrantes "bien ordonnées". Cette théorie a d'ailleurs été développée pour rendre globales les solutions de (3.2), dans le cas particulier de solutions  $(b, v)$  de la forme:

$$b = (b_1(t, x_1, x_3), 0, 1), \quad v = (v_1(t, x_1, x_3), 0, 0).$$

*Une simulation numérique.* Les deux figures suivantes montrent une simulation numérique du système dissipatif (4.13,4.14) qu'on approche par le schéma (4.15), réarrangement compris, avec  $\delta t = \delta s = 0.005$ .

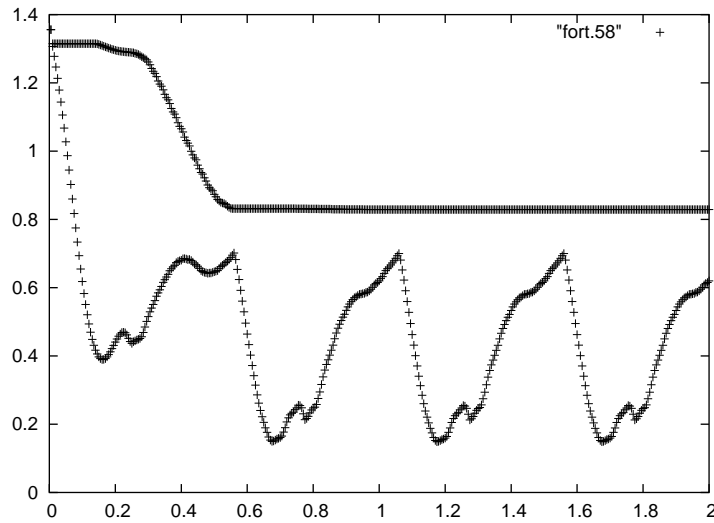
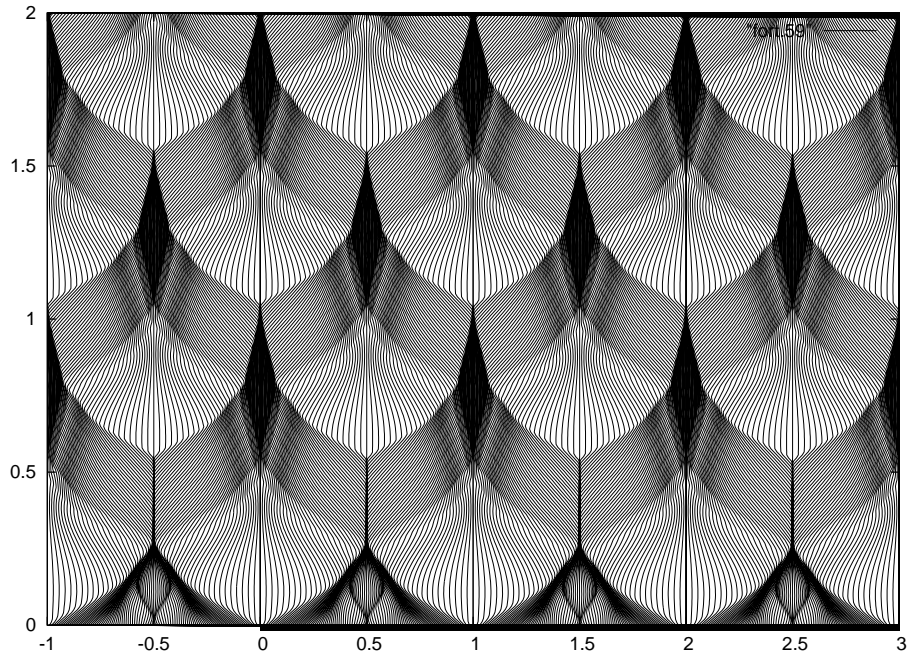
La première figure montre les trajectoires  $t \in [0, 2] \rightarrow X(t, s)$ , pour  $-1 \leq s \leq 3$ . (L'axe vertical correspond au temps et l'axe horizontal à l'espace.) On y voit les concentrations de trajectoires se développer rapidement avec une intensité maximale entre  $t = 0.25$  et  $t = 0.5$ . Sur la seconde figure on voit l'évolution de l'énergie totale

$$100 \sum_{i=2}^{200} (|X_{n,i} - X_{n,i-1}|^2 + |U_{n,i} - U_{n,i-1}|^2)$$

et celle de l'énergie cinétique:

$$100 \sum_{i=2}^{200} |U_{n,i} - U_{n,i-1}|^2.$$

On observe la diminution rapide de l'énergie totale dans la phase de concentration maximale. Ensuite l'énergie totale stationne peu après  $t = 0.5$ : c'est la fin des concentrations dissipatives d'énergie. La solution devient alors périodique en temps.



*Approximation parabolique.* Voici un second procédé d'approximation du système dissipatif (4.13,4.14). On prend n'importe quelle fonction convexe  $\tau \rightarrow \psi(\tau)$ , valant  $+\infty$  pour  $\tau < 0$ , régulière pour  $\tau > 0$  et nulle en  $\tau = 1$ . Par exemple,  $\psi(\tau) = \tau \log \tau$ ,  $\psi(\tau) = -\log \tau$  ou  $\psi(\tau) = 1/\tau - 1$  conviennent. Ensuite, on introduit un petit paramètre  $\epsilon > 0$  et on remplace dans (4.14) la fonctionnelle  $X \rightarrow \Phi(X)$ , qui ne prend que les valeurs 0 et  $+\infty$ , par

$$X \rightarrow \epsilon \int \psi(\partial_s X) ds.$$

Ecrit en clair, l'équation résultante devient (au moins formellement):

$$(4.16) \quad \partial_t X = \partial_s U + \epsilon \partial_s (\psi'(\partial_s X)), \quad \partial_t U = \partial_s X,$$

ce que l'on peut interpréter comme l'équation d'un milieu viscoélastique. Formellement, le pendant eulérien, au travers des formules (2.12), de cette équation dissipative est une approximation de type "Navier-Stokes" du système (2.9), à savoir:

$$(4.17) \quad \begin{aligned} (\partial_t + v_1 \partial_1)z &= z \partial_1 v_1, \\ (\partial_t + v_1 \partial_1)v_1 &= z \partial_1 z + \epsilon \partial_1(\mu(1/z) \partial_1 v), \end{aligned}$$

où  $\mu(\tau) = \tau \psi''(\tau)$ . (Par exemple  $\psi(\tau) = \tau \log \tau$  conduit à une "viscosité" constante:  $\mu = 1$  et  $\psi(\tau) = -\log \tau$  donne  $\mu(1/z) = z$ .)

## 5. REFORMULATION DES LOIS DE CONSERVATION SCALAIRES

La version dissipative (4.13,4.14) de l'équation des ondes avec vitesse de propagation 1 (2.15) se généralise aisément au cas où la vitesse de propagation est une constante  $\gamma > 0$ . Ainsi

$$(5.18) \quad \partial_t X = \partial_s U, \quad \partial_t U = \gamma^2 \partial_s X$$

a pour version dissipative:

$$(5.19) \quad 0 \in \partial_t X - \partial_s U + (\partial \Phi)(X), \quad \partial_t U = \gamma^2 \partial_s X.$$

Le cas dégénéré  $\gamma = 0$  est instructif. On trouve:

$$(5.20) \quad f \in \partial_t X + (\partial \Phi)(X),$$

où  $f = \partial_s U$  devient une donnée, indépendante du temps. La propriété de contraction se réduit alors, pour deux données distinctes  $f$  et  $g$ , avec solutions correspondantes  $X$  et  $Y$ :

$$(5.21) \quad \|X(t, \cdot) - Y(t, \cdot)\|_{L^2} \leq \|X(s, \cdot) - Y(s, \cdot)\|_{L^2} + (t - s) \|f - g\|_{L^2},$$

pour  $t \geq s$ . Bien entendu, on peut approcher les solutions de (4.13,5.20) par le schéma numérique dérivé de (4.15) lorsque  $\gamma \rightarrow 0$ . Ce schéma consiste à réarranger, dans l'ordre croissant, à chaque pas de temps  $n$ , la suite  $i \rightarrow \tilde{X}_{n+1,i}$  donnée par:

$$\tilde{X}_{n+1,i} = X_{n,i} + \delta t f_i.$$

Or ce schéma (introduit par l'auteur dans [3] sous le nom de "transport-collapse method") est connu pour permettre l'approximation de la loi de conservation scalaire

$$(5.22) \quad \partial_t u + \partial_x F(u) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0,$$

pour toute fonction  $F$  Lipschitz continue et toute donnée initiale  $x \rightarrow u_0(x)$  monotone croissante (avec valeurs 0 et 1 lorsque  $x$  tend respectivement vers  $-\infty$  et  $+\infty$ , pour fixer les idées). (Pour plus de détails sur la théorie des lois de conservation hyperboliques, voir [9], [18].) Plus précisément, on prend  $N > 0$  entier, on pose pour  $i = 1, \dots, N$ :

$$f_i = N \left( F\left(\frac{i}{N}\right) - F\left(\frac{i-1}{N}\right) \right),$$

et on choisit  $X_{0,i}$  sur l'axe réel de sorte que

$$u_0(X_{0,i} - 0) = \frac{i - 1/2}{N}.$$

Selon [3], pour tout  $t \geq 0$ , l'unique solution (au sens de Kruzhkov)  $x \rightarrow u(t, x)$  de (5.22), telle que  $u(0, \cdot) = u_0$ , est la limite (localement dans  $L^1$ ) de l'approximation

$$u_N(n\delta t, x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N H(x - X_{n,i})$$

(où  $H$  désigne la fonction d'Heaviside), lorsque  $n\delta t \rightarrow t$  et  $N \rightarrow +\infty$ .  
Il en découle aisément:

**Théorème 5.1.** *Les solutions de Kruzhkov  $u(t, x)$  de la loi scalaire (5.22), avec donnée initiale monotone variant de 0 à 1 sur la droite réelle, s'écrivent exactement:*

$$u(t, x) = \int_0^1 H(x - X(t, s)) ds,$$

où  $X$  est solution de (4.13, 5.20) avec  $f = F'$ .

On a donc obtenu, dans le cas très simple des lois de conservation scalaires avec données initiales monotones et flux arbitraires, une formulation impliquant un semi-groupe contractant dans  $L^2$ . Ainsi, on a une structure hilbertienne sous-jacente des lois de conservation scalaires, ce qui semble n'avoir jamais été observé à ce jour.

*Remarque.* Pour deux solutions à la Kruzhkov,  $u$  et  $v$  avec flux  $F$  et  $G$ , la propriété de contraction (5.21) peut se réécrire:

$$d_{W,2}(\partial_x u(t, \cdot), \partial_x v(t, \cdot)) \leq d_{W,2}(\partial_x u(s, \cdot), \partial_x v(s, \cdot)) + (t - s) \|F' - G'\|_{L^2},$$

pour  $t \geq s$ , où  $d_{W,2}$  désigne la distance de "Wasserstein" d'exposant 2 entre deux mesures de probabilité (voir [20] par exemple). Sous cette forme, le résultat était déjà connu de [2] (dans le cas  $F = G$ ).

## REFERENCES

- [1] M. Born & L. Infeld, *Foundations of a new field theory*, Proc. Roy. Soc. London A 144 (1934) 425-451.
- [2] F. Bolley, Y. Brenier, G. Loeper *Contractive metrics for scalar conservation laws*, à paraître dans Journal of Hyperbolic Differential Equations.
- [3] Y. Brenier, *Averaged multivalued solutions for scalar conservation laws*, SIAM J. Numer. Anal. 21 (1984) 1013-1037.
- [4] Y. Brenier, *Hydrodynamic structure of the augmented Born-Infeld equations*, Arch. Rational Mech. Anal. 172 (2004) 65-91.
- [5] Y. Brenier, *Order preserving vibrating strings and applications to Electrodynamics and Magnetohydrodynamics*, à paraître dans Methods and Applications of Analysis.
- [6] Y. Brenier, W. Yong, *Derivation of particle, string and membrane motions from the Born-Infeld electromagnetism*, à paraître dans J. Math. Physics.
- [7] H. Brezis, *Semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland Mathematics Studies, No. 5. 1973.
- [8] D. Chae & H. Huh, *Global existence for small initial data in the Born-Infeld equations*, J. Math. Phys. 44 (2003) 6132-6139.
- [9] C. M. Dafermos, *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*, Springer, Berlin, 2000.
- [10] P. Gérard, P. Markowich, N. Mauser, F. Poupaud, *Homogenization limits and Wigner transforms*, Comm. Pure Appl. Math. 50 (1997) 323-379.
- [11] G. W. Gibbons & C. A. Herdeiro, *Born-Infeld theory and stringy causality*, Phys. Rev. D3 63 (2001), no. 6, 064006.

- [12] P. Gilman, *MHD “shallow water” equations for the solar tachocline*, *Astrophys. J. Lett.* 544 (2000) 79.
- [13] S. Klainerman, A. Majda *Compressible and incompressible fluids*, *Comm. Pure Appl. Math.* 35 (1982) 629-651.
- [14] H. Lindblad, *A remark on global existence for small initial data of the minimal surface equation in Minkowskian space time*, *Proc. Amer. Math. Soc.* 132 (2004) 1095-110.
- [15] E. Madelung, *Z. Phys.* 40 (1926) 322.
- [16] J. Polchinski, *String theory. Vol. I*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [17] E. Schrödinger, *Proc. R. Soc. London A*150 (1935) 465.
- [18] D. Serre, *Systems of conservation laws*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, vol I (1999) et II (2000).
- [19] D. Serre, *Hyperbolicity of the nonlinear models of Maxwell’s equations*, *CArch. Ration. Mech. Anal.* 172 (2004) 309-331.
- [20] C. Villani, *Topics in optimal transportation*, Graduate Studies in Mathematics, 58, AMS, Providence, 2003.

CNRS, FR 2800, UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS, PARC VALROSE, 06108 NICE CEDEX 2, FRANCE

*E-mail address:* `brenier@math.unice.fr`