TRANSFORMATIONS CONSERVANT LA MESURE, HYDRODYNAMIQUE ET INTERACTION COULOMBIENNE

*Yann Brenier**

1 Un système de particules

Avant de commencer l'exposé proprement dit, examinons un exemple simple de système de particules. Soit le cube unité à d dimensions $D = [0,1]^d$, divisé en $N = h^{-d}$ sous-cubes de côté $h > 0$. Supposons qu'au barycentre A_α de chaque sous-cube de numéro α se trouve un "atome" immobile. Considérons N particules, appelées "électrons", se mouvant dans l'espace ambiant $\mathbb{R}^d$ et notons $X_\alpha(t) \in \mathbb{R}^d$ la position de l'électron de numéro α à l'instant t. A chaque temps discret $t = n\tau$, multiple entier de $\tau > 0$, nous couplons l'électron de numéro α et l'atome de numéro σ_α par un ressort, pour chaque $\alpha = 1, ..., N$, où σ est une bijection des N premiers entiers, de sorte que la position de l'électron oscille à la période $2\pi\epsilon$ suivant l'équation différentielle :

$$\epsilon^2 X''_\alpha + X_\alpha = A_{\sigma_\alpha} \tag{1}$$

dans l'intervalle de temps $n\tau \leq t < (n+1)\tau$. On a bien sur conservation de l'énergie totale

$$E(t) = \frac{1}{2}||X'(t)||^2 + \frac{1}{2\epsilon^2}||X(t) - \sigma A||^2, \tag{2}$$

avec les notations

$$X(t) = (X_\alpha(t))_{\alpha=1}^N, \quad A = (A_\alpha)_{\alpha=1}^N,$$

$$||Y||^2 = \frac{1}{N}\sum_\alpha |Y_\alpha|^2, \quad \sigma Y = (Y_{\sigma_\alpha})_{\alpha=1}^N, \quad \forall Y = (Y_\alpha)_{\alpha=1}^N \in (\mathbb{R}^d)^N.$$

*Institut Universitaire de France, et Laboratoire d'analyse numérique, Université Paris 6, France, brenier@ann.jussieu.fr

Pour avoir une dynamique intéressante, on change les couples électrons-atomes (α, σ_α) à l'instant $t = (n+1)\tau$ de façon à rendre *minimale* l'énergie potentielle totale des ressorts

$$\frac{1}{2\epsilon^2}||X((n+1)\tau) - \sigma A||^2. \tag{3}$$

Autrement dit, la permutation σ dépend du temps et s'ajuste aux temps multiples entiers de τ pour garder minimale l'énergie potentielle. Si on initialise ce système dynamique en fixant la position, la vitesse initiale des électrons, on demande quel peut bien être le comportement dynamique de ces "électrons" lorsque les paramètres h, τ et ϵ tendent vers 0 ? Méritent-ils vraiment d'être appelés électrons et se comportent-ils comme tels, au moins approximativement ? Ne se comportent-ils pas plutôt comme les particules d'un fluide ? Poser ces questions n'est qu'un prétexte pour faire un petit panorama de quelques concepts et recherches reliant géométrie, hydrodynamique et électrodynamique, autour de la notion de groupes de transformation conservant la mesure.

2 Groupes de transformation conservant la mesure

En toute généralité, si D désigne un espace mesuré muni d'une mesure de probabilité on dit qu'une transformation T de D dans lui-même conserve la mesure si pour toute partie mesurable U de D, l'image réciproque de U par T est mesurable et de même mesure que U. Ces transformations forment un semi-groupe pour la loi de composition des applications que nous noterons $S(D)$.

Si D désigne un ensemble fini, constitué par exemple de N points distincts de l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$, muni de la mesure de comptage, les transformations de D qui conserve cette mesure s'identifient évidemment, aux permutations des N premiers entiers.

En revanche, quand D est l'adhérence d'un ouvert borné assez régulier de $\mathbb{R}^d$ et qu'on le munit de la mesure de Lebesgue, normalisée pour en faire une mesure de probabilité, on peut utiliser des définitions plus restrictives de groupes de transformation conservant la mesure, suivant les applications et les modèles considérés.

On peut d'abord classiquement considérer tous les difféomorphismes de D dont le déterminant jacobien est identiquement égal à 1, ce qui assure la conservation de la mesure de Lebesgue et celle de l'orientation. Cela forme un groupe, pour la loi de composition, traditionnellement noté $SDiff(D)$, mais que nous noterons ici $G(D)$. On peut aussi considérer le sous-groupe

$G_c(D)$ constitué des difféomorphismes obtenus par intégration de champs de vecteur à divergence nulle et support compact dans l'intérieur de D. (Il s'agit bien d'un groupe qui se trouve strictement contenu dans $SDiff(D)$ puisque chacun de ses éléments conserve ponctuellement un voisinage du bord de D.) En sens inverse, on peut considérer le sur-groupe des difféomorphismes de déterminant jacobien égal à plus ou moins un (qui peuvent donc renverser l'orientation). Plus gros est le groupe des homéomorphismes T de D qui conservent la mesure et encore plus grand celui des applications boréliennes, presque partout bijectives et d'inverse borélienne, conservant la mesure.

Enfin, tout ces groupes sont inclus dans le semi-groupe $S(D)$ des applications boréliennes (non nécessairement presque partout bijectives) conservant la mesure. Celui-ci contient une grande variété d'applications, même dans le cas $d = 1$, $D = [0, 1]$, par exemple $T(x) = 1 - x$ qui renverse l'orientation, $T(x) = 2x$ mod. 1 qui n'est pas continue, $T(x) = \min(2x, 2 - 2x)$ qui n'est pas bijective, etc...

Puisque D est l'adhérence d'un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, le semi-groupe $S(D)$ ainsi que tous les groupes qu'il contient peuvent être vus (assez naivement) comme parties de l'espace de Hilbert $H = L^2(D, \mathbb{R}^d)$ des applications de carré sommable de D dans l'espace ambiant $\mathbb{R}^d$. Il est facile de voir que $S(D)$ est fermé borné dans H et contenu dans une sphère (et donc non convexe). On peut montrer qu'il est en fait l'adhérence dans H de tous les groupes déjà mentionnés, dès que $d \geq 2$.

En revanche $S(D)$ n'est ni compact ni convexe. Pour le compactifier, ou le convexifier, on introduit l'ensemble $M(D)$ des mesures de Borel $\mu \geq 0$ sur le produit $D \times D$ dont les projections sur chaque copie de D est la mesure de Lebesgue sur D. Cette ensemble, convexe et compact pour la topologie faible des mesures, est parfois appelé ensemble des mesures bistochastiques sur $D \times D$. On a une injection naturelle de $S(D)$ dans $M(D)$ en associant à toute transformation T appartenant à $S(D)$ la mesure μ_T qui donne, pour tous boréliens A, B contenus dans D, comme valeur à $\mu_T(A \times B)$ la mesure de Lebesgue de $A \times T^{-1}(B)$. Autrement dit (écrit comme distribution)

$$\mu_T(x, y) = \delta(y - T(x)). \tag{4}$$

On montre alors que cette injection est continue (ce qui est élémentaire) et dense (ce qui l'est un peu moins) de $S(D)$, muni de la topologie forte de H, dans $M(D)$, muni de la topologie faible des mesures. Ainsi l'ensemble $M(D)$ des mesures bistochastiques apparait comme une compactification-convexification du semi-groupe $S(D)$ des transformations conservant le volume et de tous les groupes qu'il contient. Observons que la propriété de groupe, perdue au niveau de $S(D)$ (car celui-ci contient des transformations non-inversibles), est en quelque sorte rétablie au niveau de $M(D)$, par la symétrie

$$(\mu(x,y)) \rightarrow (\tilde{\mu}(y,x)), \tag{5}$$

puisque, lorsque T est inversible, on a bien $\tilde{\mu}_T = \mu_{T^{-1}}$. Ceci montre, du même coup, que l'ensemble des points extrémaux du convexe compact $M(D)$ ne saurait se réduire à $S(D)$. (En effet si μ_T est extrémal, il en est de même de $\tilde{\mu}_T$, même si T n'est pas inversible.)

Retournons pour un instant, à titre de comparaison, au cas d'un ensemble fini, de cardinal N, et muni de la mesure de comptage. Comme on l'a vu, *le* groupe des transformations de cet ensemble, conservant la mesure, s'identifie au groupe des matrices de permutations $N \times N$. Un théorème classique de Birkhoff assure que, dans l'espace des matrices $N \times N$ à coefficients réels, les matrices de permutation sont les points extrémaux du convexe compact formé des matrices, dites bistochastiques, dont les coefficients sont positifs ou nulle et la somme de chaque ligne et de chaque colonne vaut 1.

On voit alors l'analogie avec le cas continu, à la différence près que, dans ce dernier cas, $M(D)$ est non seulement la convexification de $S(D)$ (en un certain sens) mais aussi une compactification et, en revanche, $S(D)$ n'en constitue qu'une partie des points extrémaux. Au delà même de l'analogie, le cas discret est la base des démonstrations des résultats de densité précédemment évoqués (densité de $G(D)$ dans $S(D)$ pour la topologie forte L^2, densité de $S(D)$ dans $M(D)$ pour la topologie faible des mesures). L'idée est en effet la suivante, dans le cas du cube $D = [0,1]^d$: pour tout entier N puissance de 2^d, on partitionne (hiérarchiquement en fonction de la puissance de 2^d) le cube D en N sous-cubes $D_1, ..., D_N$ de volumes égaux et de côté $N^{-1/d}$. On considère alors le groupe $G_N(D)$ des $N!$ transformations de $S(D)$ permutant en bloc les sous-cubes. (Autrement dit, à chaque permutation σ, on associe la transformation T qui translate chaque D_i sur $D_{\sigma(i)}$.) En utilisant le théorème de Birkhoff, et en jouant sur deux niveaux assez disjoints de raffinement des sous-cubes (typiquement N et N^2), on voit assez aisément que l'injection de la réunion des $G_N(D)$ dans $M(D)$ est dense pour la topologie faible des mesures. Il s'ensuit que $G_N(D)$ est dense dans $S(D)$ pour la topologie forte L^2. On montre ensuite que chaque élément T de $G_N(D)$, N étant fixé, peut être approché arbitrairement près en norme L^2 par un difféomorphisme de $G_c(D)$, à condition que $d \geq 2$. (Pour cette étape, on se ramène, par décomposition des permutations, au cas où T transpose deux sous-cubes ayant une interface commune. On fait une construction quasi explicite du difféomorphisme en intégrant un champ de vecteur permettant d'échanger en temps fini l'essentiel des points des deux sous-cubes, sans déplacer ou presque les autres, les erreurs étant contrôlables en norme L^2, mais pas en norme du sup!). Tout cela suffit à montrer que le plus petit groupe considéré, $G_c(D)$, est déjà dense dans $S(D)$ pour la norme L^2 et que son image dans $M(D)$ est dense pour la topologie faible des mesures. Sur toutes ces questions, on pourra consulter, entre autres [AK], [Su], [Sh]... (et avec un point de vue très différent [Ne]).

3 Géodésiques et équation d'Euler

Intéressons-nous à présent aux courbes géodésiques sur chacun des groupes ou semi-groupe considérés, vus comme sous-ensembles du Hilbert $H = L^2(D, \mathbb{R}^d)$, dont on note la norme $||\cdot||_H$. On ne considère que le cas $d \geq 2$, de sorte que l'adhérence dans H de tous ces ensembles est le semi-groupe $S(D)$. Un point de vue naif (et fort peu intrinsèque) est de les définir comme des chemins (absolument continus) $t \to T(t) \in H$, prenant valeur dans le groupe ou sous-groupe considéré et minimisant, sur chaque intervalle I compact d'intérieur non vide assez petit, "l'action"

$$A_I(T) = \frac{1}{2}\int_I ||T'(t)||_H^2 dt, \tag{6}$$

où $T'(t)$ désigne la dérivée de $T(t)$ (au moins pour presque tout t). Notons la présence, contraire à l'usage le plus fréquent pour définir une géodésique, du carré dans cette intégrale, ce qui permet de fixer le paramétrage de la courbe et présente divers avantages. Concentrons-nous sur le cas de $S(D)$, ce qui est après tout bien naturel puisque lui seul est fermé dans H. On peut exprimer l'appartenance de $T(t) \in H$ à $S(D)$ en tous t simplement en requérant

$$\int_I \int_D (p(t, T(t,x)) - p(t,x))dxdt = 0, \tag{7}$$

pour toute fonction réelle p continue sur $I \times D$. Ainsi on est ramené au problème de point-selle

$$\inf_T \sup_p \int_I dt \int_D (\frac{1}{2}|\partial_t T(t,x)|^2 - p(t, T(t,x)) + p(t,x))dx, \tag{8}$$

où $|.|$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$, p décrit l'ensemble des fonctions réelles continues sur $I \times D$ et T l'ensemble des applications $t \to T(t,.) \in H$ ayant la différentiabilité (presque partout en t) minimale requise pour donner un sens à l'intégrale. Un calcul des variations formel conduit aussitôt à la condition d'optimalité :

$$\partial_{tt}T(t,x) = -(\nabla p)(t, T(t,x)), \tag{9}$$

où on note $\nabla = (\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_d})$ le gradient dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$ et où p est le multiplicateur de Lagrange de la contrainte de conservation de la mesure imposée à T. Cette équation n'est rien d'autre que l'équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles. Décrivons brièvement le modèle physique. Le mouvement des particules du fluide est donné par T. On peut considérer la variable x comme l'étiquette (le "label") de chaque particule et $T(t,x)$ représente sa position dans le domaine D à l'instant t. Souvent on normalise T en posant $T(0,x) = x$, ce qui revient à étiqueter les particules par leurs positions au temps $t = 0$ dans le domaine D. La condition de conservation du domaine D et de la mesure de Lebesgue est la traduction mathématique de l'incompressibilité supposée du fluide et du fait qu'il se déplace dans le domaine D sans s'en échapper. L'équation d'Euler proprement dite (9) exprime que les particules sont accélérées par un champ dérivant d'un potentiel p, qui s'interprète comme la pression régnant dans le fluide et qui permet d'ajuster à tout moment la contrainte d'incompressibilité. On a ainsi rappelé une interprétation géométrique élémentaire d'une des équations les plus vénérables (1755) de la physique macroscopique (et qui reste fondamentale pour la modélisation des écoulements de l'atmosphère et de l'océan). Une référence majeure pour cette vision de l'hydrodynamique est bien sur le récent livre d'Arnold et Khesin [AK].

4 Le problème des géodésiques minimales

L'équation d'Euler est l'objet de recherches mathématiques très actives (comme en témoignent les livres très récents d'Arnold-Khesin, Chemin [Ch], Lions [Li], Marchioro-Pulvirenti [MP], etc...). Elle est abordée en général comme une équation d'évolution et une grande part de la recherche est consacrée au problème de valeurs initiales qui consiste à résoudre (9) en se donnant à l'instant initial, $t = 0$ pour fixer les idées, en tous points $x \in D$, la vitesse initiale $\partial_t T(0,x)$ de chaque parcelle de fluide, avec la normalisation naturelle $T(0,x) = x$. L'hypothèse naturelle sur le champ des vitesses initiales $v_0(x) = \partial_t T(0,x)$ est d'être à divergence nulle et parallèle au bord du domaine D. C'est la condition de compatibilité résultant (au moins formellement) de la conservation de la mesure. En contrepartie, la pression p n'a pas à être initialisée. Moyennant des hypothèses de régularité sur la donnée initiale v_0 et le domaine D, on sait montrer que le problème de valeurs initiales est bien posé, globalement en temps si $d = 2$ et localement si $d = 3$.

Nous ne développerons pas d'avantage la question, étudiée depuis les années 20 mais encore très largement ouverte, avec notamment la question de tout premier plan qu'est l'apparition ou non de singularités en temps fini dans le cas $d = 3$.

Un sujet de recherches beaucoup plus marginal, bien que très naturel du point de vue géométrique, est l'étude des géodésiques minimales (au sens "plus courts chemins") entre deux points sur les groupes de transformations conservant le volume. Cela revient à se fixer un intervalle I, $I = [0,1]$ pour fixer les idées, à se donner $T(0,.)$, qu'on normalise en prenant $T(0,x) = x$, et $T(1,.)$, puis à minimiser (6). On ne peut donc imposer les vitesses initiales $\partial_t T(0,.)$ et il s'agit, par rapport à la variable $t \in I$ d'un problème "aux deux bouts". (On peut se demander la pertinence d'un tel problème du point de vue, par exemple, de la prévision météorologique. On observera toutefois que cette dernière est également très éloignée du problème de valeurs initiales, car dans les calculs d'évolution concrets, on incorpore au fur et à mesure les observations -c'est-à-dire la connaissance d'une partie de la solution-par les techniques dites d'assimilation de données et le problème aux deux bouts peut être vu comme un problème d'assimilation très particulier.) Ce problème de calcul des variations est atypique, car la fonctionnelle d'action à minimiser (6) est très simple, mais la contrainte de conservation de la mesure est difficile à prendre en compte, même sous la forme affaiblie (7), car elle n'a aucune raison particulière de "passer à la limite" lorsqu'on considère les suites minimisantes du problème. Ce manque flagrant de compacité (ou de convexité) rend le problème non trivial. Néanmoins, si les données sont assez proches pour des topologies (d'espaces de Sobolev) assez fortes, l'existence et l'unicité de la solution résultent du travail d'Ebin et Marsden [EM]. En revanche, Shnirelman a montré en 1985 (voir [Sh]) dans le cas $d = 3$, $D = [0,1]^3$, l'existence de données $T(1,.)$ dans le plus petit groupe possible, à savoir $G_c(D)$, pour lesquelles il ne pouvait exister de géodésiques minimales, au moins sur $G(D) = SDiff(D)$. L'argument est assez simple à exprimer. Pour générer ces "mauvaises" données, on intègre sur l'intervalle de temps $I = [0,1]$ un champ de vecteur v à divergence nulle et support compact dans l'intérieur de D, qu'on choisit "bidimensionnel" au sens que, en coordonnées cartésiennes,

$$v(t,x) = (v_1(t,x_1,x_2), v_2(t,x_1,x_2), 0), \quad \forall x = (x_1,x_2,x_3) \in D, \tag{10}$$

c'est-à-dire que v a sa troisième composante nulle et ne dépend pas de x_3.

Ainsi la donnée finale $T(1,.)$ est elle de la forme

$$T(1,x) = (h_1(x_1,x_2), h_2(x_1,x_2), x_3), \qquad (11)$$

où h appartient au groupe $G_c([0,1]^2)$ et on peut considérer, en parallèle, le problème de géodésiques minimales en dimension trois sur le cube unité ou en dimension deux sur le carré unité et comparer les infimums de (6) dans les deux cas. Bien sur l'infimum en dimension deux ne peut être inférieur à celui de la dimension trois. Mais il se peut qu'il soit strictement plus grand. (Shnirelman montre qu'on peut construire les champs v adéquats pour cela, conformément à l'intuition que les mouvements incompressibles sont beaucoup plus flexibles en dimension trois qu'en dimension deux.) Dans un tel cas, il est alors facile de voir que l'infimum ne peut être atteint. En effet, si T réalise l'infimum, il n'y a qu'à le "laminer" (c'est-à-dire le remplacer par deux copies de lui-même aplaties d'un facteur deux dans la direction x_3 comme pour faire un mille-feuilles, modulo un peu de lissage pour le garder régulier) pour rendre (6) strictement plus petit et aboutir à une contradiction. Au-delà du contre-exemple, on voit se dessiner dans une telle situation le comportement des suites minimisantes, avec l'apparition de petites échelles dans la direction trois et de microstructures infiniment petites.

5 Géodésiques généralisées et écoulements hydrostatiques

Pour résoudre le problème des géodésiques minimales, on utilise dans [Br2] une idée simple de convexification, en s'inspirant de l'injection du semi-groupe $S(D)$ dans le convexe des mesures bistochastiques $M(D)$ décrite plus haut.

A chaque T, on associe une paire de mesures en les variables $t \in I = [0,1]$, $x \in D$, $a \in D$, l'une positive, l'autre vectorielle,

$$c(t,x,a) = \delta(x - T(t,a)), \quad m(t,x,a) = \partial_t T(t,a)\delta(x - T(t,a)), \qquad (12)$$

liées l'une à l'autre par la condition de compatibilité (au sens des distributions)

$$\partial_t c + \nabla_x . m = 0. \qquad (13)$$

On exprime ensuite les conditions initiales et finales par

$$c(0,x,a) = \delta(x - T(0,a)), \;\; c(1,x,a) = \delta(x - T(1,a)), \qquad (14)$$

puis la conservation de la mesure (7) par

$$\int_D c(t,x,da) = 1 \qquad (15)$$

(autrement dit la projection de la mesure sur l'espace des (t,x) est la mesure de Lebesgue) et on réécrit sans trop de peine l'action (6) sous la forme

$$A_I(T) = \sup_{\phi,\psi} \int \phi(t,x,a)dc(t,x,a) + \psi(t,x,a).dm(t,x,a) \tag{16}$$

où (ϕ,ψ) décrit l'ensemble des couples de fonctions continues des variables $(t,x,a) \in I \times D^2$ à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{R}^d$, vérifiant en tous points

$$\phi(t,x,a) + \frac{1}{2}|\psi(t,x,a)|^2 \leq 0. \tag{17}$$

On n'a rien changé au problème de géodésique minimale en recherchant un couple (c,m), *de la forme* (12), minimisant (16) sous les contraintes (13), (14), (15).

Mais si l'on relâche la contrainte de structure (12), qui impose notamment à la mesure c d'être une mesure de Dirac en la variable x, on obtient pour (c,m) un nouveau problème de minimisation, considérablement élargi, convexe, avec de bonnes propriétés de compacité et de continuité des contraintes. Or on parvient à montrer que, dans le cas où $d=3$, $D=[0,1]^3$, et où les données sont du type (11), on ne perd *rien* en relâchant la condition de structure (12), au sens que l'infimum du problème original et celui du problème convexifié coincident. (Ce résultat est à rapprocher de la densité de l'injection de $G(D)$ dans $M(D)$ discutée plus haut. Voir aussi le résultat de densité de Shnirelman [Sh].) En revanche, il n'y a pas coincidence dans le cas $d=2$. Autrement dit, en dimension trois, le problème de géodésique minimale peut être légitimement convexifié, ce qui le rend beaucoup plus accessible, mais pas en dimension deux! (C'est le contraire du problème de valeurs initiales, où l'équation d'Euler est beaucoup plus facile à traiter en dimension deux qu'en dimension trois.)

L'étude du problème convexifié aboutit aux conclusions suivantes, pour chaque donnée fixée de type (11) : Il existe des solutions (c,m) optimales. Pour chacune d'elles, c est une mesure positive et ne dépend pas de la variable x_3, m est une mesure vectorielle absolument continue par rapport à c et s'écrit $m(t,x,a) = c(t,x,a)(v_1,v_2,0)(t,x_1,x_2,a)$ avec v indépendante de x_3 et de carré sommable par rapport à la mesure c. Il existe un champ de pression $p(t,x_1,x_2)$ (indépendant de x_3), dont le gradient est une mesure de Radon, unique, telle que, pour toute solution (c,m), on ait

$$\partial_t(cv) + \nabla_x.(cv \otimes v) + c\nabla_x p = 0, \tag{18}$$

où l'on parvient à définir le produit $c\nabla_x p$ convenablement. Si la solution (c, m) respecte la structure (12), on retrouve l'équation d'Euler (9) (sous une formulation différente mais équivalente). Mais, en général, et en particulier dans les cas des contre-exemples de Shnirelman, il n'en sera rien et la mesure c ne sera plus une mesure de Dirac en la variable x. (Autrement dit, au lieu d'avoir une trajectoire unique pour la particule initialement placée en $a \in D$, comme c'est le cas de la description classique d'un fluide, on aura plutôt un faisceau de trajectoires dont les positions sont distribuées en (t, x), selon la loi de probabilité $c(t, x, a) \geq 0$, a étant fixé.) L'équation (18) généralise donc celle d'Euler. Mais elle peut sembler être un objet purement mathématique (certainement adéquat pour la résolution du problème géométrique des géodésiques minimales, comme on l'a vu), un artefact de l'approche variationnelle, sans rapport avec l'hydrodynamique réelle.

Heureusement, il n'en est rien, car, modulo des changements de variable adéquats, on retrouve derrière (18) une modélisation bien connue en mécanique des fluides, tout particulièrement pour l'atmosphère et l'océan, sous le nom d'hypothèse *hydrostatique*. En simplifiant quelque peu, on obtient le modèle hydrostatique (voir [Li], par exemple, et [Br3]) par une limite formelle des équations d'Euler tridimensionnelles dans un domaine infiniment mince dans la direction x_3 (ce qui est une approximation correcte dans le cas de l'océan et de l'atmosphère observés à moyenne échelle). A la limite, la pression ne dépend plus de la variable x_3 et les équations peuvent se réécrire sous la forme (18) après des changements d'inconnues appropriés.

Pour finir cette section sur les géodésiques, insistons sur le fait que de très nombreux problèmes, sans doute difficiles, restent ouverts. Tel est en particulier le cas de la dimension deux, où on n'a plus le droit de relâcher la contrainte de structure (12) et d'ainsi convexifier le problème. Un autre aspect complètement négligé dans notre présentation est le problème de l'existence et des propriétés des géodésiques fermées (périodiques). Là non plus, même en dimension trois, la technique de convexification est inadéquate. Enfin, signalons que d'autres aspects de la géométrie des groupes de transformation conservant la mesure sont discutés dans le livre d'Arnold et Khesin.

6 Géodésiques approchées

Une alternative au concept de géodésiques généralisées que nous venons d'évoquer pour résoudre en dimension trois le problème des géodésiques minimales, est le concept de géodésiques approchées. L'idée est très simple et très voisine (mais distincte) de la notion de "slightly compressible flows" introduite par Ebin [Eb] dans les années 70. Fixons un groupe de transformations du domaine D conservant la mesure, le groupe $G(D) = SDiff(D)$ pour fixer les idées, et introduisons sur l'espace de Hilbert ambiant $H = L^2(D, \mathbb{R}^d)$, la distance au groupe définie pour tout $X \in H$ par

$$d_H(X, G(D)) = \inf_{g \in G(D)} ||X - g||_H = \inf_{g \in S(D)} ||X - g||_H = d_H(X, S(D)), \quad (19)$$

où $||.||_H$ est la norme de H (i.e. la norme L^2). On peut alors considérer, au moins formellement, le système dynamique de dimension infinie

$$X'' + \nabla_X \left(\frac{d_H^2(X, G(D))}{2\epsilon^2}\right) = 0, \quad (20)$$

où l'inconnue $t \to X(t) \in H$ est une famille paramétrée par le temps d'applications de carré sommable de D dans l'espace ambiant $\mathbb{R}^d$ et ∇_X est le gradient dans H. Dans ce système dynamique, lorsque ϵ tend vers 0, le potentiel pénalise fortement la non-appartenance de X à l'adhérence du groupe dans H (qui n'est rien d'autre, dès que $d \geq 2$, que le semi-groupe $S(D)$, comme on l'a vu plus haut). On s'attend donc à ce que, pourvu que les données initiales $X(0)$ et $X'(0)$ soient compatibles (c'est-à-dire appartiennent respectivement au groupe et à son espace tangent, ou peu s'en faut), les solutions $t \to X(t)$ de (20) se comportent approximativement comme des courbes géodésiques sur le groupe. Notons que le concept de géodésique approchée est assez robuste (ou flou suivant le point de vue) pour ne mettre en jeu que l'adhérence du groupe dans H, c'est-à-dire le semi-groupe $S(D)$. (Ainsi on n'a plus à se préoccuper du choix du groupe!)

Pour obtenir un système dynamique plus concret et de dimension finie, on peut procéder à une discrétisation du domaine D. Prenons le cas du cube $D = [0, 1]^d$, découpé en N sous-cubes égaux de barycentres $A_1, ..., A_N$. Remplaçons le Hilbert H et le groupe $G(D)$ respectivement par l'espace euclidien $(\mathbb{R}^d)^N$ et le groupe fini de toutes les permutations des A_α

$$\{(A_{\sigma_1}, ..., A_{\sigma_N}) \in (\mathbb{R}^d)^N\},$$

sans changer la définition du système dynamique (20), (19). Allons encore plus loin, en discrétisant le temps avec un pas uniforme τ et en n'actualisant le potentiel qu'aux instants discrets $n\tau$, n entiers. En procédant ainsi, on retrouve exactement le système de particules qui nous a servi de prétexte à l'exposé! On s'attend donc que, dans la limite où h, τ et ϵ tendent vers 0, on retrouve les équations d'Euler qui décrivent les géodésiques de $G(D)$. On peut démontrer [Br4] (par une technique élémentaire et un résultat de Lax

[La] sur l'approximation des homéomorphismes conservant la mesure à l'aide de permutations) un tel résultat aux conditions suivantes. On initialise la position et la vitesse des particules

$$X_\alpha(t=0) = A_\alpha, \quad X'_\alpha(t=0) = v_0(A_\alpha), \tag{21}$$

où v_0 est un champ de vitesse à divergence nulle, tangent au bord de D et assez régulier. On hiérarchise les paramètres de discrétisation

$$h = O(\epsilon^8), \quad \tau = 0(\epsilon^4). \tag{22}$$

On montre alors que, tant que la solution T de l'équation d'Euler (9) reste régulière, on aura

$$\frac{1}{N}\sum_\alpha |X_\alpha(t) - T(t, A_\alpha)|^2 = O(\epsilon^2). \tag{23}$$

On a ainsi donné une première réponse à notre "énigme" : à la limite, les "électrons" se comportent comme les particules d'un fluide parfait incompressible régi par les équations d'Euler.

7 Une caricature d'interaction coulombienne

Reste à justifier le nom d'électrons dont nous avons affublé nos particules! Revenons à l'équation (20) des géodésiques approchées, qui met en jeu la distance au groupe $G(D)$, ou, ce qui revient au-même quand $d \geq 2$, au semi-groupe $S(D)$, et plus précisément le gradient de cette distance au carré. L'inconnue est une famille paramétrée par le temps t d'applications $X = X(t)$ de carré sommable de D dans l'espace ambiant $\mathbb{R}^d$. Or une telle application X, moyennant la condition de non-dégénerescence que la mesure image ρ par X de la mesure de Lebesgue sur D est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue (autrement dit l'image réciproque par X de toute partie Lebesgue négligeable reste Lebesgue négligeable), admet une unique décomposition *polaire* [Br] (voir aussi [Ca])

$$X = \nabla\Phi \circ g, \tag{24}$$

où Φ est une fonction réelle sur D, restriction d'une fonction convexe, et g appartient au semi-groupe $S(D)$. (Cette décomposition généralise la décomposition du même nom bien connue pour les matrices carrées $d \times d$ réelles, qui correspond au cas particulier des applications linéaires lorsque D est la boule unité de $\mathbb{R}^d$.) Le facteur g est caractérisé comme l'unique point de $S(D)$ réalisant la distance de X à $S(D)$, le vecteur $X - g$ est le gradient de

$$X \in H \to \frac{1}{2} d_H^2(X, S))$$

au point X. De plus,

$$g = \nabla \Psi \circ X, \tag{25}$$

où Ψ (transformée de Legendre-Fenchel de Φ par rapport à $x \in D$) est solution convexe (en un sens adéquat) de l'équation de Monge-Ampère equation (réelle) [Ca]

$$det(D^2 \Psi) = \rho, \tag{26}$$

où $det(D^2 \Psi)$ est le déterminant de la matrice des dérivées secondes de Ψ.

Revenons à une géodésique approchée $t \to X(t)$ et introduisons la mesure image à l'instant t

$$\rho(t, x) = \int_D \delta(x - X(t, a)) da. \tag{27}$$

A chaque instant t où $\rho(t, .)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, on peut réécrire (20) :

$$X''(t, a) = E(t, X(t, a)), \ \ \forall a \in D, \tag{28}$$

où le champ E est donné par

$$E(t, x) = \frac{\nabla \Psi(t, x) - x}{\epsilon^2} \tag{29}$$

avec Ψ solution de (26). On a donc (formellement) reformulé (20) par (27), (26), (28) et (29). Lorsqu'ϵ est petit, il est naturel de poser

$$\Psi(t, x) = \frac{|x|^2}{2} - \epsilon^2 \phi(t, x), \tag{30}$$

ce qui, au travers de (29) et (26) donne

$$E(t, x) = -\nabla \phi(t, x), \tag{31}$$

$$\rho(t, x) = 1 - \epsilon^2 \Delta \phi(t, x) + O(\epsilon^4). \tag{32}$$

En négligeant le terme en $O(\epsilon^4)$, on trouve l'équation de Poisson

$$\rho(t, x) = 1 - \epsilon^2 \Delta \phi(t, x), \tag{33}$$

qui décrit bien exactement l'interaction coulombienne. Comme les équations (27), (28), (31), (33) décrivent raisonnablement un plasma non-collisionnel non-relativiste avec un fond neutralisant uniforme (voir, entre autres, [BR], [MMZ],...), le système de particules qui a servi de prétexte à l'exposé est bien une caricature d'électrodynamique, d'autant plus ressemblante que le nombre de particules est grand et que leur période d'oscillation est petite.

References

[AK] V.I.Arnold, B.Khesin, *Topological methods in hydrodynamics, Springer, New York, 1998.*

[BR] J.Batt, G.Rein, *Global classical solutions of the periodic Vlasov-Poisson system, C.R. Acad. Sci. Paris 313 (1991) 411-416.*

[Br] Y. Brenier, *Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions, Comm. Pure Appl. Math. 44 (1991) 375-417.*

[Br2] Y.Brenier, *Minimal geodesics on groups of volume-preserving maps, Comm. Pure Appl. Math. 52 (1999) 411-452.*

[Br3] Y.Brenier, *Homogeneous hydrostatic flows with convex velocity profiles, Nonlinearity 12 (1999) 495 - 512.*

[Br4] Y.Brenier, *Derivation of the Euler equations from a caricature of Coulomb interaction, preprint 1999.*

[Ca] L. Caffarelli, *Boundary regularity of maps with convex potentials, Comm. Pure Appl. Math. 45 (1992) 1141-1151.*

[Ch] J.-Y.Chemin, *Fluides parfaits incompressibles, Astérisque 230 (1995).*

[Eb] D. Ebin, *The motion of slightly compressible fluids viewed as a motion with strong constraining force, Ann. of Math. (2) 105 (1977) 141-200.*

[EM] D. Ebin, J. Marsden, *Groups of diffeomorphisms and the notion of an incompressible fluid, Ann. of Math. (2) 92 (1970) 102-163.*

[Li] P.-L. Lions, *Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 1. Incompressible models, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, Oxford University Press, New York, 1996.*

[La] P. Lax, *Approximation of measure preserving transformations, Comm. Pure Appl. Math. 24 (1971) 133-135.*

[MMZ] A. Majda, G. Majda, Y.X. Zheng, *Concentrations in the one-dimensional Vlasov-Poisson equations. I. Temporal development and non-unique weak solutions in the single component case*, Phys. D 74 (1994) 268-300.

[MP] C.Marchioro, M.Pulvirenti, *Mathematical theory of incompressible nonviscous fluids*, Springer, New York, 1994.

[Ne] Y. Neretin, *Categories of symmetries and infinite-dimensional groups*, London Mathematical Society Monographs. New Series, 16. Oxford University Press, 1996.

[Sh] A. I. Shnirelman, *Generalized fluid flows, their approximation and applications*, Geom. Funct. Anal. 4 (1994) 586-620.

[Su] V. N. Sudakov, *Geometric problems in the theory of infinite-dimensional probability distributions*, Proc. Steklov Inst. Math. 1979, 2, 1-178.