



PRINCIPES GÉNÉRAUX
DU MOUVEMENT DES FLUIDES.
PAR M. EULER.

I.

Ayant établi dans mon Mémoire précédent les principes de l'équilibre des fluides le plus généralement, tant à l'égard de la diverse qualité des fluides, que des forces qui y puissent agir ; je me propose de traiter sur le même pied le mouvement des fluides, & de rechercher les principes généraux, sur lesquels toute la science du mouvement des fluides est fondée. On comprend aisément que cette matière est beaucoup plus difficile, & qu'elle renferme des recherches incomparablement plus profondes : cependant j'espère d'en venir aussi heureusement à bout, de sorte que s'il y reste des difficultés, ce ne sera pas du côté du mécanique, mais uniquement du côté de l'analytique : cette science n'étant pas encore portée à ce degré de perfection, qui seroit nécessaire pour développer les formules analytiques, qui renferment les principes du mouvement des fluides.

II. Il s'agit donc de découvrir les principes, par lesquels on puisse déterminer le mouvement d'un fluide, en quelque état qu'il se trouve, & par quelques forces qu'il soit sollicité. Pour cet effet examinons en détail tous les articles, qui constituent le sujet de nos recherches, & qui renferment les quantités tant connues qu'inconnues. Et d'abord la nature du fluide est supposée connue, dont il faut considérer les diverses especes : le fluide est donc, ou incompressible, ou compressible. S'il n'est pas susceptible de compression, il faut distinguer deux cas, l'un où toute la masse est composée de parties homogènes, dont la densité est partout & demeure toujours la même, l'autre



tre où elle est composée de parties hétérogenes ; & ici on doit savoir la densité de chaque espece, & la proportion du mélange. Si le fluide est compressible, & que sa densité soit variable, il faut connoître la loi, selon laquelle son élasticité dépend de la densité ; si c'est uniquement de la densité, que l'élasticité dépend, ou encore d'une autre qualité, comme de la chaleur, qui est propre à chaque particule du fluide, au moins pour chaque instant du tems.

III. On doit aussi supposer, que l'état du fluide dans un certain tems soit connu, & que je nommerai l'état primitif du fluide : cet état étant quasi arbitraire, il faut premièrement connoître la disposition des particules, dont le fluide est composé, & le mouvement qui leur aura été imprimé, à moins que dans l'état primitif le fluide n'ait été en repos. Cependant le mouvement primitif n'est pas entièrement arbitraire, tant la continuité que l'impénétrabilité du fluide y mettent une certaine limitation, que je rechercherai dans la suite. Mais souvent on ne connoît rien d'un état primitif ; comme lorsqu'il s'agit de déterminer le mouvement d'une rivière ; & alors les recherches se bornent pour l'ordinaire à trouver l'état permanent, auquel le fluide parviendra enfin sans subir de nouveaux changemens. Or, ni cette circonstance, ni l'état primitif, ne changent rien dans les recherches qu'on aura à entreprendre, & le calcul demeurera toujours le même : ce n'est que dans les intégrations, où il y faut avoir égard pour déterminer les constantes, que chaque integration amene.

IV. En troisième lieu, il faut compter parmi les données les forces externes, à la sollicitation desquelles le fluide est assujetti : je nomme ici ces forces externes, pour les distinguer des forces intestines, dont les particules du fluide agissent les unes sur les autres, vû que celles - cy font le principal objet des recherches à faire ensuite. On peut donc supposer, que le fluide ne soit sollicité par aucune force externe, ou seulement par la gravité naturelle, qu'on regarde partout comme de la même quantité, & même direction. Or, pour rendre les recherches plus



générales, je considérerai le fluide sollicité par des forces quelconques, soit qu'elles soient dirigées vers un ou plusieurs centres, soit qu'elles suivent, tant par rapport à leur quantité qu'à leur direction, une autre loi quelconque. De ces forces on ne connoit immédiatement que leurs actions accélératrices, sans avoir égard aux masses sur lesquelles elles agissent. Je n'introduirai donc dans le calcul que les forces accélératrices, d'où il fera aisé de tirer les véritables forces motrices, en multipliant celles-là en chaque cas par les masses, qui en reçoivent la sollicitation.

V. Passons maintenant aux articles, qui contiennent ce qui est inconnu. Or, pour connoître bien le mouvement, dont le fluide sera porté, il faut déterminer pour chaque instant & pour chaque lieu, tant le mouvement que la pression du fluide qui s'y trouve : & si le fluide est compressible, il en faut outre cela définir la densité, en connoissant la-dite autre qualité, qui avec la densité concourt à déterminer l'élasticité ; laquelle étant contrebalancée par la pression du fluide, lui doit être estimée égale, tout comme dans le cas d'équilibre, où j'ai développé plus soigneusement ces idées. On voit donc que le nombre des quantités, qui entrent dans la recherche du mouvement, est beaucoup plus grand, que dans le cas d'équilibre, puisqu'il faut introduire des lettres, qui marquent le mouvement de chaque particule, & que toutes ces quantités peuvent varier avec le tems. Donc, outre les lettres qui déterminent la situation de chaque point, qu'on peut concevoir dans la masse fluide, on doit aussi en faire entrer une, qui marque le tems déjà écoulé, & qui par sa variabilité puisse être appliquée à chaque tems proposé.

Fig 1.

VI. Soit donc écoulé après un état primitif le tems $= t$, & que maintenant le fluide se trouve dans un état & mouvement, qu'il faut chercher. Quel que soit l'espace que le fluide occupe à présent, je commence par considérer un point quelconque Z, qui se trouve dans la masse fluide ; & pour faire entrer dans le calcul la situation de ce point Z, je le rapporte à trois axes fixes, OA, OB, & OC, perpendicu-



diculaires entr'eux au point O , & donnés de position. Que les deux axes OA & OB se trouvent dans le plan, que la Planche représente, & le troisième OC y soit perpendiculaire. Qu'on tire donc du point Z au plan AOB la perpendiculaire ZY , & du point Y à l'axe OA la normale YX pour avoir les trois coordonnées : $OX = x$, $XY = y$, & $YZ = z$, parallèles à nos trois axes. Pour chaque point conçu dans la masse fluide, ces trois coordonnées x , y , & z , auront des valeurs déterminées, & en donnant à ces trois coordonnées successivement toutes les valeurs possibles, tant positives que négatives, on parcourra tous les points de l'espace infini, & partant aussi ceux, qui se trouvent dans l'espace, que le fluide occupe à chaque instant.

VII. En second lieu, je considère les forces accélératrices, qui agissent dans l'instant présent sur la particule du fluide, qui se trouve en Z ; or, quelles que soient ces forces, on les peut toujours réduire à trois, qui agissent suivant les trois directions ZP , ZQ , & ZR , parallèles à nos trois axes OA , OB , & OC . En prenant donc l'unité pour marquer la force accélératrice de la gravité naturelle, soient P , Q , & R , les forces accélératrices, qui agissent sur le point Z suivant les directions ZP , ZQ , & ZR ; & ces lettres P , Q , & R , marqueront des nombres absolus. S'il y a toujours les mêmes forces, qui agissent dans le même point de l'espace Z , les quantités P , Q , & R , seront exprimées par des certaines fonctions des trois coordonnées x , y & z ; mais en cas que les forces variaient aussi avec le tems t , elles renfermeront encore le tems t . Or je suppose ces fonctions connues, puisqu'on doit compter les forces sollicitantes parmi les quantités connues, soit qu'elles dépendent uniquement des variables x , y , z , ou encore du tems t .

VIII. Que r exprime maintenant la chaleur au point Z , ou cette autre qualité, qui outre la densité influë sur l'élasticité, au cas que le fluide soit compressible, & r doit aussi être considérée comme une fonction des trois variables x , y , z , & du tems t , puisqu'il pour-



roit arriver, qu'elle changeât avec le tems dans le même point Z de l'espace ; on pourra donc regarder cette fonction comme connue. Soit ensuite pour le tems présent la densité de la particule du fluide, qui se trouve en Z , $= q$, marquant par l'uuité la densité d'une certaine matiere homogene, dont je me servirai pour mesurer les pressions par des hauteurs, comme je l'ai expliqué plus amplement dans mon Mémoire sur l'équilibre des fluides. Soit donc aussi pour le tems présent la pression du fluide au point Z exprimée par la hauteur $= p$, qui marquera donc aussi l'élasticité ; & puisque la nature du fluide est supposée connue, on saura le rapport, que la hauteur p tient aux quantités q & r . Or p & q seront de même des fonctions des quatre variables $x, y, z, \& t$, mais inconnues ; mais quand le fluide n'est pas incompressible, la pression p est indépendante de la densité q , & l'autre qualité r n'entre point du tout en considération.

IX. Enfin, quel que soit le mouvement, qui convient à l'instant présent à l'élément du fluide, qui se trouve en Z , il pourra aussi être décomposé suivant les directions $ZP, ZQ, \& ZR$, paralleles à nos trois axes. Soient donc $u, v, \& w$ les vitesses de ce mouvement décomposé selon les trois directions $ZP, ZQ, \& ZR$, & il est clair que ces trois quantités doivent aussi être considérées comme des fonctions des quatre variables $x, y, z, \& t$. Car ayant trouvé la nature de ces fonctions, si l'on met le tems t constant, on connoitra par la variabilité des coordonnées $x, y, \& z$, les trois vitesses $u, v, \& w$, & partant le vrai mouvement dont chaque élément du fluide est porté dans l'instant présent ; & si l'on met constantes les coordonnées $x, y, \& z$, & qu'on considère le seul tems t comme variable, on trouvera le mouvement, non d'un certain élément du fluide, mais de tous les élémens, qui passeront successivement par le même point Z , ou on en connoitra à chaque tems le mouvement de cet élément du fluide, qui se trouvera alors dans le point Z .

X. Mais voyons aussi quel chemin décrira l'élément du fluide, qui est à présent en Z , pendant le tems infiniment petit dt ; ou à quel point

point il se trouvera un instant après. Or, si nous exprimons l'espace par le produit de la vitesse & du tems, l'élément du fluide, qui est à présent en Z, sera porté dans la direction ZP par l'espace $= udt$, dans la direction ZQ par l'espace $= vdt$, & dans la direction ZR par l'espace $= wdt$. Donc, si nous posons :

$$ZP = udt, \quad ZQ = vdt, \quad \& \quad ZR = wdt,$$

& qu'on acheve de ces trois côtés le parallelepiped, l'angle opposé à Z marquera le point, où l'élément du fluide en question se trouvera après le tems dt , & la diagonale de ce parallelepiped, qui est $= dt\sqrt{uu + vv + ww}$, donnera le vrai chemin décrit, & partant la vitesse de ce vrai mouvement sera $= \sqrt{uu + vv + ww}$; & la direction se déterminera aisément par les cotés de ce parallelepiped; car elle sera inclinée au plan AOB d'un angle dont le sinus

$$= \frac{w}{\sqrt{uu + vv + ww}}, \text{ au plan AOC d'un angle dont le sinus}$$

$$= \frac{v}{\sqrt{uu + vv + ww}}, \text{ \& enfin au plan BOC d'un angle dont}$$

$$\text{le sinus est } = \frac{u}{\sqrt{uu + vv + ww}}.$$

XI. Ayant déterminé le mouvement du fluide, qui se trouve à l'instant présent au point Z, examinons aussi celui d'un autre élément quelconque infiniment proche, qui soit en z, auquel point répondent les coordonnées $x + dx$, $y + dy$, & $z + dz$. Les trois vitesses de cet élément selon les directions des trois axes seront donc exprimées par les quantités u , v , w , après qu'on y aura substitué $x + dx$, $y + dy$, & $z + dz$; ou après qu'on y aura ajouté leurs différentiels en posant le tems t constant. Or entant qu'on met $x + dx$ au lieu de x , les incrémens de u , v , & w , sont :

$$dx \left(\frac{du}{dx} \right); \quad dx \left(\frac{dv}{dx} \right); \quad \& \quad dx \left(\frac{dw}{dx} \right);$$

& entant qu'on met $y + dy$ au lieu de y les incréments font :

$$dy \left(\frac{du}{dy} \right); \quad dy \left(\frac{dv}{dy} \right); \quad \& \quad dy \left(\frac{dw}{dy} \right);$$

& il en est de même à l'égard de la variabilité de z . Donc les trois vitesses de l'élément du fluide, qui se trouve à présent en z , seront

fuisant la direction $OA = u + dx \left(\frac{du}{dx} \right) + dy \left(\frac{du}{dy} \right) + dz \left(\frac{du}{dz} \right)$

fuisant la direction $OB = v + dx \left(\frac{dv}{dx} \right) + dy \left(\frac{dv}{dy} \right) + dz \left(\frac{dv}{dz} \right)$

fuisant la direction $OC = w + dx \left(\frac{dw}{dx} \right) + dy \left(\frac{dw}{dy} \right) + dz \left(\frac{dw}{dz} \right)$

XII. Ce sont les vitesses, qui conviennent à un élément du fluide en z , qui est infiniment proche du point Z , & dont le lieu est déterminé par les trois coordonnées $x + dx$, $y + dy$, & $z + dz$.

Fig. 2. Donc si nous prenons le point z en sorte, que la seule x y soit changée de dx , les deux autres coordonnées y & z demeurant les mêmes que pour le point Z , les trois vitesses de l'élément du fluide qui se trouve en ce point z , seront :

$$u + dx \left(\frac{du}{dx} \right); \quad v + dx \left(\frac{dv}{dx} \right); \quad w + dx \left(\frac{dw}{dx} \right)$$

par lesquelles cet élément fera transporté pendant le tems dt dans un autre point z' , dont il s'agit de définir le lieu par rapport au point Z' , qui soit celui, auquel l'élément du fluide, qui étoit en Z est transporté pendant le même tems dt ; & dont le lieu a été déterminé ci-dessus (§. 10.). Pour connoître ce point z' , je remarque, que si les vitesses de z étoient parfaitement les mêmes que celles de Z , le point z' tomberoit en p , de sorte que la distance $Z'p$ seroit égale & parallèle à la distance Zz . Et puisque par l'hypothese Zz est parallèle à l'axe OA , & égale à dx , la ligne $Z'p$ fera aussi $= dx$, & parallèle à l'axe OA .

XIII. Maintenant, puisque la vitesse selon OA n'est pas u , mais $u + dx \left(\frac{du}{dx} \right)$, par cette différence l'élément en question sera transporté de p & q , sur la direction $Z'p$, de sorte que $pq = dt dx \left(\frac{du}{dx} \right)$: il seroit donc en q , si les deux autres vitesses étoient v & w . Mais puisque la vitesse selon l'axe OB est $v + dx \left(\frac{dv}{dx} \right)$, cette différence transportera notre élément de q & r , par l'espace $qr = dt dx \left(\frac{dv}{dx} \right)$, & parallele à l'axe OB. Enfin l'incrément $dx \left(\frac{dw}{dx} \right)$ de la vitesse w transportera l'élément de r en z' , par la particule $rz' = dt dx \left(\frac{dw}{dx} \right)$, & parallele au troisième axe OC. D'où je conclus que l'élément du fluide, qui occupoit la petite ligne droite Zz , fera dans le tems dt transporté sur la ligne $Z'z'$, qui sera infiniment peu inclinée à l'axe OA, & dont la longueur à cause de $Z'q = dx \left(1 + dt \left(\frac{du}{dx} \right) \right)$ fera

$$dx \sqrt{\left(1 + dt \left(\frac{du}{dx} \right) \right)^2 + dt^2 \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + dt^2 \left(\frac{dw}{dx} \right)^2}.$$

Donc, en négligeant les termes, qui renferment le carré de dt , la longueur de Zz' ne différera pas de $Z'q$, & on aura : $Z'z' = dx \left(1 + dt \left(\frac{du}{dx} \right) \right)$, pour l'inclinaison de cette ligne à l'axe OA il suffit de remarquer, qu'elle est infiniment petite du premier degré, ou exprimée en forte $a dt$.

XIV. Si la petite ligne Zz avoit été prise $= dy$, & parallele à l'axe OB, par le même raisonnement on trouveroit, que le fluide qui occupoit cette ligne fût transporté sur une autre



$Z'z' = dy \left(1 + dt \left(\frac{dv}{dy} \right) \right)$, & dont l'inclinaison à l'axe OB fut aussi infiniment petite. Et si l'on prenoit la ligne $Zz = dz$, & parallèle au troisième axe OC, le fluide qui l'occupoit seroit transporté sur une autre ligne $Z'z' = dz \left(1 + dt \left(\frac{dw}{dz} \right) \right)$, & qui seroit infi-

Fig. 3. niment peu incliné à l'axe OC. Donc, si nous considérons un parallépipède rectangle $ZPQRzpqvr$ formé des trois côtés $ZP = dx$, $ZQ = dy$, & $ZR = dz$, le fluide qui occupoit cet espace sera transporté pendant le tems dt à remplir l'espace $Z'P'Q'R'z'p'q'r'$, infiniment peu différent d'un parallépipède rectangle, dont les trois côtés seront :

$$Z'P' = dx \left(1 + dt \left(\frac{du}{dx} \right) \right) ; Z'Q' = dy \left(1 + dt \left(\frac{dv}{dy} \right) \right) ; Z'R' = dz \left(1 + dt \left(\frac{dw}{dz} \right) \right)$$

Car les côtés ZP, ZQ, ZR , étant transportés en $Z'P', Z'Q', Z'R'$, on ne fauroit douter que le fluide contenu dans le premier espace ne soit transporté dans l'autre espace pendant le tems dt .

XV. A' présent on pourra juger si le volume du fluide, qui a occupé le parallépipède Zz , est devenu plus grand ou plus petit après le tems dt : on n'a qu'à chercher le volume ou la capacité de l'un & de l'autre de ces deux solides. Or le premier étant un parallépipède rectangle formé des côtés dx, dy, dz , son volume est $= dx dy dz$; mais pour l'autre, dont les angles plans différent infiniment peu du droit, je remarque que son volume se trouve également en multipliant ces trois côtés ; car l'erreur qui résulte de l'obliquité infiniment petite sera contenue en des termes, où l'élément du tems dt monteroit à deux dimensions, qu'il est permis par conséquent de négliger. Ce volume $Z'z'$ sera donc exprimé en forte :

$$dx dy dz \left(1 + dt \left(\frac{du}{dx} \right) + dt \left(\frac{dv}{dy} \right) + dt \left(\frac{dw}{dz} \right) \right).$$



Si l'on avoit encore quelque doute sur la justesse de cette conclusion, on n'auroit qu'à lire ma Piece latine: *Principia motus fluidorum*: où j'ai calculé ce volume sans rien négliger.

XVI. Donc, si le fluide n'est pas susceptible de compression, ces deux volumes doivent être égaux entr'eux, puisque la masse, qui occupoit l'espace Zz , ne sauroit être réduite, ni dans un plus grand, ni dans un plus petit espace. Mais, puisque je me propose de traiter cette matiere dans toute la généralité possible, & que j'ai nommé la densité en $Z = q$, considérant q comme une fonction des trois coordonnées & du tems, je remarque, que pour trouver la densité en Z' , il faut premièrement augmenter le tems t de son différentiel dt , ensuite le lieu Z' étant différent de Z , les quantités x, y, z , doivent être augmentées des petits espaces $u dt, v dt, w dt$; d'où la densité en Z' sera :

$$q' + dt \left(\frac{dq}{dt} \right) + u dt \left(\frac{dq}{dx} \right) + v dt \left(\frac{dq}{dy} \right) + w dt \left(\frac{dq}{dz} \right),$$

& de là, puisque la densité est réciproquement proportionnelle au volume, cette quantité sera à q , comme $dx dy dz$ à

$$dx dy dz \left(1 + dt \left(\frac{du}{dx} \right) + dt \left(\frac{dv}{dy} \right) + dt \left(\frac{dw}{dz} \right) \right).$$

Par conséquent, en divisant par dt , nous aurons cette équation, que la considération de la densité fournit :

$$\left(\frac{dq}{dt} \right) + u \left(\frac{dq}{dx} \right) + v \left(\frac{dq}{dy} \right) + w \left(\frac{dq}{dz} \right) + q \left(\frac{du}{dx} \right) + q \left(\frac{dv}{dy} \right) + q \left(\frac{dw}{dz} \right) = 0.$$

XVII. Voilà donc une condition bien remarquable, qui établit déjà un certain rapport entre les trois vitesses x, y , & z , à l'égard de la densité du fluide q . Or cette équation peut être réduite à une plus

grande simplicité: car $u \left(\frac{dq}{dx} \right)$ ne differe pas de $\left(\frac{u dq}{dx} \right)$, puisque



par cette maniere d'exprimer il faut entendre, que dans la différentiation de q la seule quantité x est prise pour variable ; il est donc de

même $q \left(\frac{du}{dx} \right) = \left(\frac{q du}{dx} \right)$: d'où il est évident que

$$q \left(\frac{du}{dx} \right) + u \left(\frac{dq}{dx} \right) = \left(\frac{u dq + q du}{dx} \right) = \left(\frac{dqu}{dx} \right),$$

prenant le différentiel du produit qu en sorte, qu'on regarde la seule quantité x comme variable. C'est pourquoi notre équation trouvée se réduit à celle-cy :

$$\left(\frac{dq}{dt} \right) + \left(\frac{dqu}{dx} \right) + \left(\frac{dqv}{dy} \right) + \left(\frac{dqw}{dz} \right) = 0.$$

Si le fluide n'étoit pas compressible, la densité q seroit la même en Z , & en Z' , & pour ce cas on auroit cette équation :

$$\left(\frac{du}{dx} \right) + \left(\frac{dv}{dy} \right) + \left(\frac{dw}{dz} \right) = 0.$$

qui est aussi celle sur laquelle j'ai établi mon Mémoire latin allégué ci-dessus.

XVIII. Cette formule ayant été fournie par la considération de la continuité du fluide, renferme déjà un certain rapport qui doit régner entre les quantités u , v , w , & q . Les autres déterminations doivent être tirées de la considération des forces, auxquelles chaque particule du fluide est assujettie : or, outre les forces accélératrices P , Q , R , qui agissent sur le fluide en Z , il est aussi sollicité par la pression qui agit de toutes parts sur l'élément du fluide contenu en Z . De la combinaison de ces doubles forces on tirera trois forces accélératrices selon la direction des trois axes ; & puisqu'on peut assigner les accélérations mêmes par la considération des vitesses u , v , & w , nous tirerons de là trois équations, qui jointes à celle que nous venons de trouver, renfermeront tout ce qui regarde le mouvement des fluides, de sorte que nous aurons alors des principes généraux & complets de toute la science du mouvement des fluides.



XIX. Pour trouver les accélérations que l'élément du fluide en Z subit, nous n'avons qu'à comparer les vitesses u, v, w , qui répondent à présent au point Z , avec celles qui répondent après le tems dt au point Z' . Il arrive donc un double changement, & à l'égard des coordonnées x, y, z , qui reçoivent les incréments $u dt, v dt, w dt$, & à celui du tems qui augmente de dt . D'où les trois vitesses qui conviennent au point Z' sont :

$$\text{selon la direction } OA = u + dt \left(\frac{du}{dt} \right) + u dt \left(\frac{du}{dx} \right) + v dt \left(\frac{du}{dy} \right) + w dt \left(\frac{du}{dz} \right)$$

$$\text{selon la direction } OB = v + dt \left(\frac{dv}{dt} \right) + u dt \left(\frac{dv}{dx} \right) + v dt \left(\frac{dv}{dy} \right) + w dt \left(\frac{dv}{dz} \right)$$

$$\text{selon la direction } OC = w + dt \left(\frac{dw}{dt} \right) + u dt \left(\frac{dw}{dx} \right) + v dt \left(\frac{dw}{dy} \right) + w dt \left(\frac{dw}{dz} \right)$$

Et partant les accélérations, étant exprimées par les incréments des vitesses divisés par l'élément du tems dt , seront :

$$\text{selon la direction } OA = \left(\frac{du}{dt} \right) + u \left(\frac{du}{dx} \right) + v \left(\frac{du}{dy} \right) + w \left(\frac{du}{dz} \right)$$

$$\text{selon la direction } OB = \left(\frac{dv}{dt} \right) + u \left(\frac{dv}{dx} \right) + v \left(\frac{dv}{dy} \right) + w \left(\frac{dv}{dz} \right)$$

$$\text{selon la direction } OC = \left(\frac{dw}{dt} \right) + u \left(\frac{dw}{dx} \right) + v \left(\frac{dw}{dy} \right) + w \left(\frac{dw}{dz} \right)$$

XX. Cherchons maintenant les forces accélératrices selon ces mêmes directions, qui résultent des pressions du fluide sur le parallépipède Zz , dont le volume est $= dx dy dz$, & partant la masse du fluide qui l'occupe $= \rho dx dy dz$. Or la pression au point Z étant exprimée par la hauteur p , la force motrice, qu'en reçoit la face $ZQRp$ est $= p dy dz$; & pour la face opposée $zqrP = dy dz$, la hauteur p est augmentée de son différentiel $dx \left(\frac{dp}{dx} \right)$, qui résulte



en supposant la seule x variable. Donc cette masse fluide Zz est repoussée dans la direction AO par la force motrice $dx dy dz \left(\frac{dp}{dx} \right)$, ou bien par la force accélératrice $= \frac{1}{q} \left(\frac{dp}{dx} \right)$. De même manière on verra que la masse fluide Zz est sollicitée dans la direction BO par la force accélératrice $= \frac{1}{q} \left(\frac{dp}{dy} \right)$, & dans la direction CO par la force accélératrice $= \frac{1}{q} \left(\frac{dp}{dz} \right)$. Ajoutons à ces forces les données P, Q, R , & les forces accélératrices entières seront :

$$\text{selon la direction } OA = P - \frac{1}{q} \left(\frac{dp}{dx} \right)$$

$$\text{selon la direction } OB = Q - \frac{1}{q} \left(\frac{dp}{dy} \right)$$

$$\text{selon la direction } OC = R - \frac{1}{q} \left(\frac{dp}{dz} \right).$$

XXI. Nous n'avons donc qu'à égaler ces forces accélératrices avec les accélérations actuelles que nous venons de trouver, & nous obtiendrons les trois équations suivantes :

$$P - \frac{1}{q} \left(\frac{dp}{dx} \right) = \left(\frac{du}{dt} \right) + u \left(\frac{du}{dx} \right) + v \left(\frac{du}{dy} \right) + w \left(\frac{du}{dz} \right)$$

$$Q - \frac{1}{q} \left(\frac{dp}{dy} \right) = \left(\frac{dv}{dt} \right) + u \left(\frac{dv}{dx} \right) + v \left(\frac{dv}{dy} \right) + w \left(\frac{dv}{dz} \right)$$

$$R - \frac{1}{q} \left(\frac{dp}{dz} \right) = \left(\frac{dw}{dt} \right) + u \left(\frac{dw}{dx} \right) + v \left(\frac{dw}{dy} \right) + w \left(\frac{dw}{dz} \right)$$

Si nous ajoutons à ces trois équations premièrement celle, que nous a fournie la considération de la continuité du fluide :

$$\left(\frac{dq}{dt} \right)$$

$$\left(\frac{d\eta}{dt}\right) + \left(\frac{d.q\mu}{dx}\right) + \left(\frac{d.q\nu}{dy}\right) + \left(\frac{d.gw}{dz}\right) = 0;$$

& ensuite celle que donne le rapport entre l'élasticité p , la densité q , & l'autre qualité r , qui influë sur l'élasticité p , outre la densité q , nous aurons cinq équations qui renferment toute la Théorie du mouvement des fluides.

XXII. De quelque nature que soient les forces P, Q, R , pourvû qu'elles soient réelles, il faut remarquer que $P dx + Q dy + R dz$ est toujours un différentiel réel d'une certaine quantité finie & déterminée, en supposant les trois coordonnées x, y , & z , variables; de sorte qu'il y aura toujours :

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right); \quad \left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right); \quad \left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right),$$

& si nous posons cette quantité finie $= S$, en sorte qu'il y ait :

$$dS = P dx + Q dy + R dz$$

en supposant le tems t constant, en cas que les forces P, Q, R , changent aussi avec le tems aux mêmes endroits; cette quantité S exprime ce que je nomme l'effort des forces sollicitantes, & qui est la somme des intégrales de chaque force multipliée par l'élément de sa direction, ou par le petit espace, par lequel elle traineroit un corps qui obéiroit à son action. Cette idée de l'effort est de la dernière importance dans toute la Théorie, tant de l'équilibre que du mouvement, ayant fait voir, que la somme de tous les efforts est toujours un *maximum* ou *minimum*. Cette belle propriété convient admirablement avec le beau principe de la moindre action; dont nous devons la découverte à notre Illustre Président, M. de *Mauvertuis*.

XXIII. Comme les équations que nous venons de trouver, renferment quatre variables x, y, z , & t , qui sont absolument indépendantes entr'elles, vû que la variabilité des trois premières s'étend sur

tous



tous les élémens du fluide, & de la dernière à tous les tems, il faut que les autres variables $u, v, w, p, \& q$, en soient de certaines fonctions, pour que les équations puissent subsister. Car, bien qu'une équation différentielle entre deux variables soit toujours possible, on fait qu'une équation différentielle, qui renferme trois ou plusieurs variables, n'est possible que sous certaines conditions, en vertu desquelles les termes de l'équation doivent tenir un certain rapport entr'eux. Il s'agit donc de savoir de quelle nature doivent être les fonctions de $x, y, z, \& t$, qui expriment les valeurs de $u, v, w, p, \& q$, afin que les équations soient possibles, avant qu'on puisse entreprendre la résolution de ces mêmes équations.

XXIV. Multiplions donc, des trois équations trouvées en dernier lieu, la première par dx , la seconde par dy , & la troisième par dz , & puisque $dx \left(\frac{df}{dx}\right) + dy \left(\frac{dp}{dy}\right) + dz \left(\frac{dp}{dz}\right)$, marque le différentiel de p en ne supposant que le tems t constant, nous obtiendrons :

$$\begin{aligned}
 & + dz \left(\frac{du}{dt}\right) + u dx \left(\frac{du}{dx}\right) + v dx \left(\frac{du}{dy}\right) + w dx \left(\frac{du}{dz}\right) \\
 dS - \frac{dp}{q} = & + dy \left(\frac{dv}{dt}\right) + u dy \left(\frac{dv}{dx}\right) + v dy \left(\frac{dv}{dy}\right) + w dy \left(\frac{dv}{dz}\right) \\
 & + dz \left(\frac{dw}{dt}\right) + u dz \left(\frac{dw}{dx}\right) + v dz \left(\frac{dw}{dy}\right) + w dz \left(\frac{dw}{dz}\right)
 \end{aligned}$$

Voilà donc une équation différentielle, où le tems est pris constant, & dont il s'agit de trouver l'intégrale. Or il faut remarquer que cette seule équation renferme tellement les trois dont elle composée, que, dès qu'on aura satisfait à celle-cy, les conditions de toutes les trois seront remplies. Car, si $dS - \frac{dp}{q}$ est égal aux trois lignes, en pre-

nant $x, y \& z$ variables, la partie de $dS - \frac{dp}{q}$ qui résulte de la variable



riabilité de la seule x , qui est $P dx - \frac{dx}{q} \left(\frac{dp}{dx} \right)$, doit nécessairement être égale à la première ligne, & ainsi des deux autres. Les membres $\left(\frac{du}{dt} \right)$, $\left(\frac{dv}{dt} \right)$, & $\left(\frac{dw}{dt} \right)$, qui ont été trouvés de la variabilité du tems t , puisqu'ils marquent des fonctions finies, n'empêchent pas, que le tems t ne puisse à présent être pris pour constant.

XXV. Concevons que cette équation soit déjà résolue, & on aura trouvé de certaines fonctions finies de x , y , z , & t pour les valeurs des quantités u , v , w , q , & p ; qui étant substituées dans l'équation différentielle, en supposant le tems t constant, produisent une équation identique. Or, puisque après cette substitution nous aurons trois sortes de termes, les uns affectés par dx , les autres par dy , & les troisièmes par dz , l'identification nous conduit à trois équations; d'où il est clair, que quoique nous ne considérions qu'une équation différentielle, elle a en effet la force de trois, & qu'elle nous détermine trois de nos inconnues. Ce qui est aussi clair de là, qu'une équation différentielle à trois variables, comme $Ldx + Mdy + Ndz = 0$ n'est possible, à moins qu'un certain rapport entre les quantités L , M , & N , n'ait lieu. Mais, comme on n'a encore que fort peu travaillé sur la résolution de telles équations différentielles à trois variables, nous ne saurions espérer une solution complète de notre équation, avant que les bornes de l'Analyse ne soient étendues considérablement plus loin.

XXVI. Le meilleur parti à prendre sera donc de bien peser les solutions particulières, que nous sommes en état de donner de notre équation différentielle; car de là nous pourrions juger de la route, qu'il faut prendre pour arriver à une solution complète. Or j'ai déjà remarqué que dans le cas, où la densité q est supposée constante, on peut donner une fort belle solution, lorsque les vitesses u , v , & w , sont telles, que la formule différentielle $u dx + v dy + w dz$ admet

l'intégration. Supposons donc que W soit cette intégrale, étant une fonction quelconque de x, y, z , & du tems t , & qu'en la différentiant, si l'on prend aussi t pour variable, on ait :

$$dW = u dx + v dy + w dz + \Pi dt.$$

Cela posé, les quantités u, v, w , & Π , auront tels rapports entr'elles qu'il sera :

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) ; \left(\frac{du}{dz}\right) = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) ; \left(\frac{du}{dt}\right) = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) ; \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right) ; \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right).$$

XXVII. Par ces égalités notre équation différentielle pourra être réduite à la forme suivante :

$$\begin{aligned} & + dx \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right) + u dx \left(\frac{du}{dx}\right) + v dx \left(\frac{dv}{dx}\right) + w dx \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ dS - \frac{dp}{q} = & + dy \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right) + u dy \left(\frac{du}{dy}\right) + v dy \left(\frac{dv}{dy}\right) + w dy \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ & + dz \left(\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right) + u dz \left(\frac{du}{dz}\right) + v dz \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) + w dz \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) \end{aligned}$$

Or puisque ici le tems t est supposé constant, nous aurons pour cette même hypothèse :

$$dx \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right) + dy \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right) + dz \left(\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right) = d\Pi$$

$$dx \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + dy \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + dz \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = du$$

&c.

donc

donc notre équation se changera en celle - cy :

$$dS - \frac{dp}{q} = d\Pi + u du + v dv + w dw,$$

ou $dp = q (dS - d\Pi - u du - v dv - w dw).$

Et partant, si la densité du fluide étoit partout la même, ou $q = g$ on auroit en intégrant :

$$p = g (C + S - \Pi - \frac{1}{2}uu - \frac{1}{2}vv - \frac{1}{2}ww).$$

XXVIII. Posons pour abrégé :

$$C + S - \Pi - \frac{1}{2}uu - \frac{1}{2}vv - \frac{1}{2}ww = V,$$

où il faut remarquer que la constante C peut bien renfermer le tems t , vù qu'il est regardé comme constant dans cette intégration, & ayant $dp = q dV$, il est clair que l'hypothese :

$$dW = u dx + v dy + w dz + \Pi dt,$$

rend aussi notre équation différentielle possible, lorsque l'élasticité p dépend d'une maniere quelconque de la seule densité q , ou que q est une fonction quelconque de p . Elle devient encore possible, quand le fluide n'est pas compressible, mais la densité q tellement variable qu'elle est une fonction quelconque de la quantité V. Et en général, si l'élasticité p dépend en partie de la densité q , & d'une autre qualité comprise dans la lettre r , cette hypothese peut aussi satisfaire, pourvù que r soit une fonction de V. Or dans tous ces cas, pour que le mouvement puisse subsister avec cette hypothese, il faut outre cela que cette condition ait lieu :

$$\left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{d.qu}{dx}\right) + \left(\frac{d.qv}{dy}\right) + \left(\frac{d.qw}{dz}\right) = 0.$$

XXIX. Cette hypothese est si générale, qu'il paroît, qu'il n'y ait aucun cas, qui n'y soit compris, & partant que la formule



mule $dp = q dV$, jointe aux autres équations, qui n'ont presque aucune difficulté, renferme généralement tous les fondemens de la Théorie du mouvement des fluides. Aussi me suis-je uniquement attaché à ce cas dans mon Mémoire latin sur les principes du mouvement des fluides, où j'ai uniquement considéré les fluides incompressibles; & j'ai fait voir que tous les cas, qu'on a traités jusqu'ici, où le fluide se meut par des tuyaux quelconques, sont renfermés dans cette supposition, & que les vitesses u , v , & w , y sont toujours telles, que la formule différentielle $u dx + v dy + w dz$ dévient intégrable. Cependant j'ai remarqué depuis, qu'il y a aussi des cas, même lorsque le fluide est incompressible & homogène partout, où cette condition n'a point lieu; ce qui suffit pour nous convaincre que la solution, que je viens de donner, n'est que particulière.

XXX. Pour donner un exemple d'un mouvement réel, qui soit parfaitement d'accord avec toutes les formules, que les principes de Mécanique ont fournies, sans cependant, que la formule $u dx + v dy + w dz$ soit intégrable; soit le fluide incompressible, & homogène partout, ou q une quantité constante $= g$, & qu'il n'y ait point de forces qui y agissent, de sorte que $P = 0$, $Q = 0$, & $R = 0$. Ensuite soit $w = 0$, $v = Zx$, & $u = -Zy$, où Z marque une fonction quelconque de $V(xx + yy)$, & il est évident que la formule $u dx + v dy + w dz$, qui se change en $-Zy dx + Zx dy$, n'est intégrable qu'au cas $Z = \frac{1}{xx + yy}$. Cependant ces valeurs satisfont à toutes nos formules, de sorte qu'on ne sauroit révoquer en doute la possibilité d'un tel mouvement. Puisque Z est fonction de $V(xx + yy)$, son différentiel aura telle forme $dZ = Lx dx + Ly dy$, où L sera encore une certaine fonction de $V(xx + yy)$.

XXXI. De ces valeurs de u , v , & w nous tirons :

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{dt}\right) &= 0; \quad \left(\frac{du}{dx}\right) = -Lxy; \quad \left(\frac{du}{dy}\right) = -Z-Lyy; \quad \left(\frac{du}{dz}\right) = 0 \\ \left(\frac{dv}{dt}\right) &= 0; \quad \left(\frac{dv}{dx}\right) = Z+Lxx; \quad \left(\frac{dv}{dy}\right) = +Lxy; \quad \left(\frac{dv}{dz}\right) = 0 \\ \left(\frac{dw}{dt}\right) &= 0; \quad \left(\frac{dw}{dx}\right) = 0; \quad \left(\frac{dw}{dy}\right) = 0; \quad \left(\frac{dw}{dz}\right) = 0 \end{aligned}$$

& à cause de $dS = 0$, nous aurons cette équation différentielle en posant le tems t constant :

$$-\frac{dp}{g} = \left\{ \begin{aligned} &+ LZxyydx - ZZxdx - LZxyydx \\ &- ZZydy - LZxxydy + LZxxxydy \end{aligned} \right\} = -ZZ(xdx + ydy).$$

Ayant donc $dp = gZZ(xdx + ydy)$, puisque Z est supposée fonction de $\sqrt{xx + yy}$, cette équation fera sans doute possible, & donnera pour intégrale $p = g fZZ(xdx + ydy)$. On voit que l'équation différentielle seroit devenuë possible, quand même le fluide auroit été sollicité par des forces quelconques P , Q , R , pourvu que $Pdx + Qdy + Rdz$, soit un différentiel possible $= dS$, car alors on auroit $p = gS + g fZZ(xdx + ydy)$.

XXXII. Comme ces valeurs $u = -Zy$, $v = Zx$, & $w = 0$, satisfont à notre équation différentielle, on verra qu'elles remplissent aussi la condition contenuë dans la formule :

$$\left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{d.qu}{dx}\right) + \left(\frac{d.qv}{dy}\right) + \left(\frac{d.qw}{dz}\right) = 0.$$

Car, à cause de $q = g$, elle sera changée en celle-cy :

$$-gLxy + gLxy = 0$$

qui étant identique satisfait aux conditions requises. Donc il est bien possible, qu'un fluide ait un tel mouvement, que les vitesses de chacun de ses élémens soient : $u = -Zy$, $v = Zx$, & $w = 0$,

quoiqu'il ne soit pas $u dx + v dy + w dz$ une formule différentielle possible; d'où l'on est assuré, qu'il y a des cas, où le mouvement d'un fluide est possible, sans que cette condition, qui paroît générale, ait lieu. Ainsi la supposition de la possibilité de la formule différentielle $u dx + v dy + w dz$, ne fournit qu'une solution particulière des formules que nous avons trouvées.

XXXIII. Il est évident, que le mouvement renfermé dans ce cas se réduit à un mouvement de rotation autour de l'axe OC; & puisque ce, qui est dit de l'axe OC, se peut appliquer à tout autre axe fixe, nous concluons qu'il est possible, qu'un fluide sollicité par des forces quelconques, dont l'effort est $= S$, ait un tel mouvement autour d'un axe fixe, que les vitesses de rotation soient proportionnelles à une fonction quelconque de la distance à cet axe. Ainsi posant s la distance de cet axe, & la vitesse de rotation à cette distance $= \vartheta$, à cause de $xx + yy = ss$, & $ZZ ss = \vartheta\vartheta$, la pression y sera exprimée par la hauteur $p = g S + g \int \frac{\vartheta\vartheta ds}{s}$. Un tel mouvement, qui représente celui d'un tourbillon, est donc également possible, que ceux qui sont contenus dans la formule $u dx + v dy + w dz$ entant qu'elle est intégrable. Sans doute y a-t-il encore une infinité d'autres mouvemens, qui satisfaisant à nos formules, sont aussi également possibles.

XXXIV. Retournons à nos formules générales, & puisqu'elles sont un peu trop compliquées, posons pour abréger :

$$\left(\frac{du}{dt}\right) + u \left(\frac{du}{dx}\right) + v \left(\frac{du}{dy}\right) + w \left(\frac{du}{dz}\right) = X$$

$$\left(\frac{dv}{dt}\right) + u \left(\frac{dv}{dx}\right) + v \left(\frac{dv}{dy}\right) + w \left(\frac{dv}{dz}\right) = Y$$

$$\left(\frac{dw}{dt}\right) + u \left(\frac{dw}{dx}\right) + v \left(\frac{dw}{dy}\right) + w \left(\frac{dw}{dz}\right) = Z$$



& de quelque nature que soient les trois forces accélératrices P, Q, & R, à cause de $dS = P dx + Q dy + R dz$, il faut que cette équation différentielle, où le tems t est supposé constant, soit possible :

$$\frac{dp}{q} = (P-X) dx + (Q-Y) dy + (R-Z) dz,$$

& outre cela la continuité du fluide exige, qu'il soit :

$$\left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{d \cdot qu}{dx}\right) + \left(\frac{d \cdot qu}{dy}\right) + \left(\frac{d \cdot dw}{dz}\right) = 0$$

De quelque maniere qu'on satisfasse à ces deux équations, on aura toujours un mouvement, qui pourra actuellement avoir lieu dans le fluide.

XXXV. Lorsque le fluide n'est pas compressible & homogène partout, ou la densité q constante $= g$, il est évident, que l'équation différentielle ne sauroit avoir lieu, à moins que le différentiel :

$$(P-X) dx + (Q-Y) dy + (R-Z) dz,$$

ne soit possible ou complet, c'est à dire, à moins qu'il ne résulte par la différentiation actuelle de quelque fonction finie des variables $x, y, & z$, laquelle peut bien renfermer le tems t , quoiqu'il soit supposé constant dans la différentiation. Il est de même évident, que cette formule différentielle doit être possible ou complète, lorsque le fluide est compressible, & que la densité q est exprimée par une fonction quelconque de l'élasticité p . Dans l'un & l'autre cas, si nous posons V pour la quantité finie, dont le différentiel soit :

$$dV = (P-X) dx + (Q-Y) dy + (R-Z) dz,$$

notre équation différentielle fournira, ou $\frac{p}{g} = V$, ou $\int \frac{dp}{q} = V$.

Or, pour que le mouvement soit possible, il faut outre cela que l'autre condition tirée de la continuité, soit remplie.

XXXVI. Si le fluide n'est pas compressible, mais que sa densité q soit variable, & exprimée par une fonction quelconque du lieu,
ou



ou des trois coordonnées x, y, z , & du tems t , il ne suffit pas que la formule :

$$(P-X)dx + (Q-Y)dy + (R-Z)dz = dV$$

soit intégrable, mais il faut outre cela que l'intégrale V soit une fonction de q ; car ayant $\frac{dp}{q} = dV$, ou $dp = qdV$, il est clair que la pression p ne sauroit avoir une valeur déterminée, à moins que la formule qdV ne soit intégrable. Mais je remarque de plus, qu'il n'est pas nécessaire dans ce cas, que la formule :

$$(P-X)dx + (Q-Y)dy + (R-Z)dz$$

soit intégrable, pourvu qu'elle soit telle, qu'étant multipliée par une certaine fonction U , elle devienne intégrable. Soit donc

$$U(P-X)dx + U(Q-Y)dy + U(R-Z)dz = dW,$$

& puisque nous avons $\frac{dp}{q} = \frac{dW}{U}$, ou $dp = \frac{qdW}{U}$, il suffit pour

la possibilité de cette équation, que W soit une fonction de $\frac{q}{U}$, ou que W soit une fonction de nulle dimension des quantités q & U .

XXXVII. Mais, en général de quelque manière que l'élasticité p dépende tant de la densité q , que d'une autre qualité exprimée par r , fonction quelconque des coordonnées x, y, z , qui pourroit encore renfermer le tems t , il est clair de notre équation $q = \frac{dp}{dV}$, que le différentiel dp doit toujours être divisible par dV , où dV marque non tant un différentiel réel, que cette formule :

$$(P-X)dx + (Q-Y)dy + (R-Z)dz,$$

& cela tellement, que par la division les différentiels $dx, dy, & dz$ sortent entièrement du calcul : car tant p que q doivent toujours être exprimés par des fonctions finies de $x, y, & z$, sans que leurs diffé-

différentiels y entrent. Or cela ne fauroit arriver, à moins qu'il n'y eut une fonction U , par laquelle la formule dV étant multipliée devienne intégrable: car posant cette intégrale $\int U dV = W$, il est clair que p doit être une fonction de W , pour que la formule $\frac{dp}{dV}$ obtienne une valeur déterminée, telle qu'il convient à la densité q .

XXXVIII. Puisque $U dV = dW$, nous aurons $q = \frac{U dp}{dW}$; donc, si nous prenons pour W une fonction quelconque des coordonnées $x, y, \& z$, renfermant le tems t parmi les quantités constantes, & que nous posions p égale à une fonction quelconque de W , favoir $p = \phi, W$, & $dp = dW \cdot \phi', W$, nous aurons $q = U \cdot \phi', W$; donc $U = \frac{q}{\phi', W}$. Et partant, de quelque maniere que la densité q soit donnée par l'élasticité p , & quelqu'autre fonction r des coordonnées $x, y, \& z$, nous en tirerons la valeur de $U = \frac{q}{\phi', W}$, & par conséquent celle de $dV = \frac{dW \cdot \phi', W}{q}$, qui nous fournit ensuite cette équation :

$$(P - X)dx + (Q - Y)dy + (R - Z)dz = \frac{dW \cdot \phi', W}{q} = \frac{dp}{q},$$

d'où l'on obtiendra les valeurs X, Y, Z , desquelles enfin il faut chercher les valeur des vitesses $u, v, \& w$: & quand celles-cy satisfont outre cela à la condition de la continuité, on aura un cas d'un mouvement possible du fluide.

XXXIX. Voilà donc à quoi se réduit la question sur la nature de la formule :

$$(P - X)dx + (Q - Y)dy + (R - Z)dz.$$



Lorsque la densité ρ est constante, où qu'elle dépend uniquement de l'élasticité p , il faut que cette formule soit absolument intégrable, & pour cet effet il s'agit de déterminer des valeurs convenables pour les trois vitesses u , v , & w . Or, lorsque la densité ρ dépend d'une fonction donnée du lieu & du tems, la formule doit être telle, qu'étant multipliée par une certaine fonction donnée U , elle devienne intégrable. Dans l'un & l'autre cas donc les vitesses u , v , & w , doivent être telles que cette équation :

$$(P - X)dx + (Q - Y)dy + (R - Z)dz = 0$$

devienne possible : or on fait les conditions, sous lesquelles une équation différentielle entre trois variables devient possible ; & ayant satisfait à cette condition, il faut encore satisfaire à celle que la continuité exige.

XL. Ce sont les conditions, par lesquelles doivent être limitées les fonctions qui expriment les trois vitesses u , v , & w , & toute la recherche sur le mouvement des fluides revient à ce qu'on détermine en général la nature de ces fonctions, par lesquelles les conditions de notre équation différentielle, & de la continuité soient remplies. Or puisque les quantités X , Y , & Z , dépendent non seulement des vitesses u , v , & w mêmes, mais aussi de leur variabilité par rapport à chacune des coordonnées, x , y , & z , & encore du tems t , cette recherche paroît la plus profonde, qui se puisse trouver dans l'Analyse : & s'il ne nous est pas permis de pénétrer à une connoissance complète sur le mouvement des fluides, ce n'est pas à la Mécanique, & à l'insuffisance des principes connus du mouvement, qu'il en faut attribuer la cause ; mais l'Analyse même nous abandonne ici, attendu que toute la théorie du mouvement des fluides vient d'être réduite à la résolution des formules analytiques.

XLI. Comme une solution générale doit être jugée impossible par le défaut de l'Analyse, nous devons nous contenter de la connoissance de quelques cas particuliers, & cela d'autant plus, puisque le
dève-



développement de plusieurs cas semble l'unique moyen de nous conduire enfin à une plus parfaite connoissance. Or le cas le plus simple qu'on puisse imaginer, est sans doute lorsqu'on met les trois vitesses u , v , & w égales à zero, ce qui est le cas, où le fluide demeure dans un parfait repos & que j'ai traité dans mon Mémoire précédent. Or nos formules trouvées pour le mouvement en général renferment aussi le cas d'équilibre: car puisque $X = 0$, $Y = 0$, & $Z = 0$, nous aurons :
$$\frac{dp}{q} = P dx + Q dy + R dz, \text{ \& } \left(\frac{dq}{dt}\right) = 0,$$
 d'où nous voyons d'abord que la densité q ne sauroit dépendre du tems t , ou qu'elle doit demeurer toujours la même au même endroit. Ensuite les forces P , Q , R , doivent être telles que la formule différentielle $P dx + Q dy + R dz$ devienne, ou intégrable, lorsque q est constante, ou dépendante uniquement de l'élasticité p ; ou telle qu'étant multipliée par une certaine fonction elle devienne intégrable.

XLII. Dans mon Mémoire sur l'équilibre des fluides, je n'avois considéré que les cas des forces sollicitantes P , Q , R , où la formule différentielle $P dx + Q dy + R dz$ devient intégrable, puisque ce cas paroïssoit le seul qui pût avoir lieu dans la Nature. En effet si la densité q est, ou constante, ou qu'elle dépende uniquement de la pression p , le fluide ne sauroit jamais être en équilibre, à moins que cette condition des forces sollicitantes n'ait lieu. Mais, en cas qu'il fut possible que les forces sollicitantes tinssent une autre loi, il pourroit y avoir un équilibre, pourvû qu'elles fussent telles, qu'il y eût une fonction U , qui étant multipliée par la formule $P dx + Q dy + R dz$ la rende intégrable, ou bien que l'équation différentielle $P dx + Q dy + R dz = 0$ devienne possible; car alors, si la densité q est exprimée par cette fonction U , ou par un produit de cette fonction U par une fonction quelconque de l'élasticité p , l'équilibre pourra également avoir lieu. Or, comme tels cas ne sont peut-être pas possibles, je ne m'arrête pas à les développer plus amplement.



XLIII. Après le cas d'équilibre l'état le plus simple, qui sauroit subsister dans le fluide, est celui où le fluide tout entier est porté d'un mouvement uniforme suivant la même direction. Voyons donc comment cet état est contenu dans nos deux formules. Or dans ce cas les trois vitesses étant constantes, posons: $u = a$; $v = b$; & $w = c$; & nous aurons: $X = 0$; $Y = 0$; & $Z = 0$; d'où nos deux équations se changeront dans les suivantes :

$$\frac{dp}{q} = P dx + Q dy + R dz,$$

$$\& \left(\frac{dq}{dt}\right) + a\left(\frac{dq}{dx}\right) + b\left(\frac{dq}{dy}\right) + c\left(\frac{dq}{dz}\right) = 0,$$

où il est clair que, si la densité q étoit constante, la condition de la dernière équation seroit remplie; mais que la première ne sauroit subsister, à moins que la formule $P dx + Q dy + R dz$ n'admit l'intégration, tout comme si le fluide étoit en repos: & il est naturel qu'un tel mouvement ne sauroit rien changer dans la pression.

XLIV. Mais si la densité q n'est pas constante, voyons d'abord quelle fonction de x , y , z , & t elle doit être, pour que la seconde équation soit satisfaite. Voilà donc une question analytique bien curieuse, par laquelle on demande quelle fonction de x , y , z , & t , doit être prise pour q , afin qu'il devienne :

$$\left(\frac{dq}{dt}\right) + a\left(\frac{dq}{dx}\right) + b\left(\frac{dq}{dy}\right) + c\left(\frac{dq}{dz}\right) = 0,$$

& la solution de cette question paroît bien difficile étant prise dans toute son étendue possible. Mais, puisque dans le cas de $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, la quantité q seroit une fonction quelconque de x , y , & z , sans renfermer le tems t , si nous ramenons ce cas à celui de repos en imprimant à l'espace un mouvement égal & contraire, il est évident qu'après le tems t les coordonnées x , y , & z , seront transformées par le changement en $x - at$, $y - bt$, $z - ct$, d'où nous concluons qu'on satisfera à notre équation en prenant pour q une fonction quel-

con-

conque des trois quantités $x-at$; $y-bt$; $z-ct$. Et en effet on s'assure aisément, qu'une telle fonction satisfait, puisqu'il y aura :

$$dq = L(dx - a dt) + M(dy - b dt) + N(dz - c dt),$$

& partant :

$$\left(\frac{dq}{dt}\right) = -aL - bM - cN; \quad \left(\frac{dq}{dx}\right) = L; \quad \left(\frac{dq}{dy}\right) = M; \quad \& \quad \left(\frac{dq}{dz}\right) = N.$$

XLV. Or, pour satisfaire à la première équation, il faut, comme j'ai déjà remarqué, que la formule différentielle $Pdx + Qdy + Rdz$ soit telle, qu'étant multipliée par une certaine fonction U elle devienne intégrable. Soit donc $\int U(Pdx + Qdy + Rdz) = W$, où la constante qui entre par l'intégration renferme aussi d'une manière quelconque le tems t , & il est clair que la formule $Pdx + Qdy + Rdz$ admettra aussi l'intégration, étant multipliée par Uf, W , où U & W sont des fonctions connues, puisque les forces sollicitantes sont supposées connues. Donc, si q ne dépend point de p , il faut qu'il y ait $q = Uf, W$, d'où l'on doit déterminer la fonction des trois quantités $x-at$; $y-bt$; & $z-ct$; afin qu'elle soit réductible à la forme Uf, W . Or si q dépend uniquement de p , il faut que la formule $Pdx + Qdy + Rdz$, soit absolument intégrable, ou bien $U = 1$, & alors, puisque p sera trouvée égale à une fonction de W , la densité q en fera aussi fonction; qui devant aussi être fonction des quantités $x-at$; $y-bt$; $z-ct$; on en déduira la nature de cette fonction.

XLVI. Mais on voit qu'en général la pression p doit toujours être une fonction de W , puisque d'ailleurs la densité q , ne sauroit être une fonction finie. Soit donc $p = f, W$, & $dp = dW.f', W$, d'où à cause de $Pdx + Qdy + Rdz = \frac{dW}{U}$, on aura $q = Uf', W$.

Ce cas ne sauroit donc subsister, à moins que la densité q ne soit proportionnelle au produit de la quantité U par une fonction de la pression p , ou bien au produit d'une telle quantité $U\phi, W$, par une

fonction quelconque de p , prenant ϕ, W , pour marquer une fonction donnée de W . Soit par exemple $q = ppU\phi, W$, & on aura $f', W = \frac{d(f, W)}{dW} = (f, W).^2 \phi, W$, d'où l'on trouvera que la fonction inconnue f, W est composée de W : car dans cet exemple on aura $\frac{1}{f, W} = -f dW, \phi W = \frac{1}{p}$: & de là on exprimera p par W , & partant aussi la valeur de q sera connue. Laquelle, quand elle sera réductible à la forme d'une fonction des quantités $x - at, y - bt, z - ct$, l'état supposé du fluide sera possible, & on en connoitra la pression & la densité pour tout tems & à chaque endroit.

XLVII. Un exemple éclaircira mieux ces opérations, lesquelles, puisque nous n'y sommes pas encore assez accoutumés, pourroient paroître trop obscures. Soit donc $P = y, Q = -x, \& R = 0$, & ayant $\frac{dp}{q} = ydx - xdy$, nous aurons $U = \frac{1}{yy}$, & $W = \frac{x}{y} + T$, où T marque une fonction quelconque du tems t . Soit de plus $q = \frac{pp}{yy}$, & puisque $\frac{dp}{pp} = \frac{ydx - xdy}{yy}$, nous obtiendrons $\frac{1}{p} = \Theta - \frac{x}{y}$, & $p = \frac{y}{\Theta y - x}$, où la constante Θ renferme aussi le tems t . Nous aurons donc $q = \frac{1}{(\Theta y - x)^2}$, qui devant être fonction de $x - at$, & $y - bt$, puisque z n'y entre pas, cela ne fauroit arriver autrement, que prenant $\Theta = \frac{a}{b}$; & alors nous aurons $q = \frac{bb}{(ay - bx)^2}$, & $p = \frac{by}{ay - bx}$. Donc, ni la pression, ni la densité, ne dépendent point du tems, & seront au même endroit constamment les mêmes. Cet exemple fait voir, comment en d'autres cas qu'on voudra imaginer, le calcul doit être manié.



XLVIII. Ayant expédié ce cas, où les trois vitesses sont constantes, supposons maintenant, que deux vitesses v & w évanouissent, ce qui donnera le cas, où toutes les particules du fluide se meuvent suivant la direction de l'axe OA , de sorte que le chemin décrit par chacune soit une ligne droite parallèle à l'axe OA ; ce cas diffère du précédent, puisque nous considérons la vitesse u , comme variable, tant par rapport au lieu qu'au tems. Ayant donc

$$X = \left(\frac{du}{dt}\right) + u\left(\frac{du}{dx}\right); \quad Y = 0; \quad Z = 0;$$

nos deux équations seront :

$$\frac{dp}{q} = Pdx + Qdy + Rdz - dx\left(\frac{du}{dt}\right) - udx\left(\frac{du}{dx}\right),$$

$$\& \quad \left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{d.qu}{dx}\right) = 0.$$

Cette dernière équation nous donne d'abord à connoître, que cette formule $qdx - qudt$ doit être intégrable : or, par rapport à cette intégration les quantités y & z , sont regardées comme constantes : il faut donc que q multiplié par $dx - udt$ devienne une formule différentielle complète, ou intégrable.

XLIX. Si la densité du fluide est partout & toujours la même ou q une quantité constante $= g$, puisqu'alors $\left(\frac{du}{dx}\right) = 0$, il est clair que la vitesse u , doit être indépendante de la variable x . Soit donc u une fonction quelconque des deux autres coordonnées y, z , & du tems t , & notre équation différentielle fera :

$$\frac{dp}{q} = Pdx + Qdy + Rdz - dx\left(\frac{du}{dt}\right),$$

où le tems t est supposé constant : il faut donc que cette formule soit intégrable. Donc, si la formule tirée des forces sollicitantes $Pdx + Qdy + Rdz$ est intégrable d'elle même, il faut que

dx



$dx \left(\frac{du}{dt} \right)$ le soit aussi. Or puisque $\left(\frac{du}{dt} \right)$ ne renferme pas x , s'il y avoit des y , & z , la formule $dx \left(\frac{du}{dt} \right)$ ne fauroit être intégrable : il faut donc que $\left(\frac{du}{dt} \right)$ ne renferme point y & z . Que Z soit une fonction quelconque de y & z , & T une du seul tems t , & la valeur $u = Z + T$ satisfera à cette condition, d'où l'on tirera à cause de $Pdx + Qdy + Rdz = dV$ & $\left(\frac{du}{dt} \right) = \left(\frac{dT}{dt} \right)$, cette équation intégrale $\frac{p}{q} = V - x \left(\frac{dT}{dt} \right) + \text{Const.}$

L. Pour développer mieux ce cas, il faut remarquer que chaque particule du fluide Z , n'a d'autre mouvement que selon la direction ZP parallele à l'axe ZA , & partant chaque élément du fluide décrira par son mouvement une ligne droite parallele à cet axe, de sorte que pour le même élément les deux coordonnées y & z ne changent point de valeur. Donc, ou le mouvement de chaque particule sera uniforme, ou changera avec le tems d'une telle maniere, que toutes les particules subissent à chaque instant des changemens égaux dans leurs mouvemens, ce qui est évident par la formule $u = Z + T$. Or pour l'état de pression ayant cette formule $p = gV - gx \left(\frac{dT}{dt} \right) + \text{Const.}$ où la constante peut renfermer le tems t d'une maniere quelconque, elle dépend, outre de l'effort des forces V , encore de ce changement de vitesse, que chaque élément du fluide subit; & outre cela elle peut varier avec le tems d'une maniere quelconque.

LI. Ce cas me fournit l'occasion d'éclaircir quelques doutes, qui doivent se présenter naturellement, & dont l'explication sera très importante dans la théorie, tant de l'équilibre que du mouvement des
flui-



fluides. D'abord on sera surpris, qu'un changement dans la vitesse du fluide puisse avoir lieu, sans que les forces sollicitantes $P, Q, R,$ concourent à le produire; puisqu'on voit que ce changement supposé pourroit subsister, quand même les forces sollicitantes évanouïroient, & on demandera avec raison par quelle cause ce changement est produit. Ensuite il semble aussi paradoxé, que la pression puisse varier à chaque instant d'une manière quelconque, & cela indépendamment du dit changement, auquel le mouvement est assujetti. Cette dernière difficulté subsiste même dans l'état d'équilibre: car en faisant évanouïr les trois vitesses $u, v, w,$ on a pour les fluides incompressibles cette équation intégrale $\frac{p}{g} = V + \text{Const.}$ où la constante peut renfermer le tems t d'une manière quelconque.

LII. Pour mieux comprendre cela, on n'a qu'à concevoir une masse déterminée, & renfermée dans un vaisseau; & il est clair que l'état de pression ne dépend pas seulement des forces sollicitantes, mais aussi des forces étrangères, qui peuvent agir sur le vaisseau. Car, quand même il n'y auroit point de forces sollicitantes, par le moyen d'un piston dont on agiroit sur le fluide, on pourroit produire successivement tous les états possibles de pression sans que l'équilibre en fût troublé: or c'est ce que notre formule, qui devient dans ce cas, $\frac{p}{g} =$ fonction du tems $t,$ nous donne à connoître; d'où nous voyons, que l'état de pression peut varier à chaque instant, & cela indépendamment de l'équilibre. Mais, connoissant pour chaque instant la pression à un endroit quelconque, les pressions en tous les autres endroits en seroit déterminées; & puisqu'il pourroit arriver, que le piston fut poussé tantôt avec plus, tantôt avec moins de forces, il faut que le calcul montre tous ces changemens possibles: & la même variabilité doit aussi avoir lieu, quand le fluide est sollicité par des forces accélératrices quelconques, de sorte qu'à chaque instant l'état de pression est indéterminé, & dépend de la force qui agit alors sur le piston.



LIII. Voilà donc une différence très essentielle entre les forces accélératrices, qui agissent sur tous les élémens du fluide, & entre la force d'un piston, dont le fluide est poussé: ce ne sont que les forces accélératrices, qui entrent dans notre équation différentielle, & la force du piston n'entre dans le calcul, qu'après qu'on aura intégré, & n'affecte que la constante, que l'intégration entraîne; qu'il faut par conséquent en chaque cas déterminer en sorte, qu'à l'endroit du piston la pression devienne précisément égale à la force, dont le piston est poussé à chaque moment: & c'est à cause de cela, que ladite constante renferme le tems, pour qu'on la puisse varier avec le tems à volonté, selon que les circonstances l'exigent. Cette variabilité peut toujours être représentée par l'action d'un piston; car de quelque nature que puisse être un cas proposé, pour qu'il soit déterminé, il faut toujours supposer, que du moins à un endroit du fluide la pression soit connue à chaque instant: & c'est de cette circonstance, qu'il faut tirer la détermination de la constante introduite dans le calcul par l'intégration de notre équation différentielle.

LIV. Mais pour notre cas du mouvement expliqué §. 49. supposons aussi les forces accélératrices évanouissantes, ou $V = 0$, & pour rendre le cas tout à fait déterminé, supposons $u = a + ay + \xi t$, & nous aurons pour ce cas cette équation qui détermine la pression $\frac{p}{g} = \text{Const.} - \xi x$. Supposons de plus cette constante $= \gamma + \delta t$,

de sorte que $\frac{p}{g} = \gamma + \delta t - \xi x$, & voyons sous quelles conditions

ce mouvement puisse avoir lieu. Puisque chaque élément du fluide se meut selon la direction de l'axe OA, ce mouvement ne fauroit avoir lieu, que dans un tuyau cylindrique couché selon la même direction.

Fig. 4. Soit ABIO ce tuyau, & qu'au commencement, où $t = 0$, le fluide en ait rempli la portion ABCD, terminée par les sections AB, & CD, perpendiculaires au tuyau. Comptons les abscisses x depuis le point A, sur la droite AI, & sur la base AB la pression étoit partout

$p =$

$p = \gamma g$: & sur l'autre base $CD = g\gamma - \mathcal{E}g.AC$; mais au dedans du fluide, à un endroit quelconque Z , posant $AP = x$; $PZ = y$; la pression étoit $= \gamma g - \mathcal{E}g x$. On ne sauroit donc concevoir le fluide dans le tuyau plus étendu que jusqu'en CD , prenant $AC = \frac{\gamma}{\mathcal{E}}$, afin que la pression en CD ne devienne négative.

LV. Posons pour cette masse déterminée de fluide la longueur $AC = b$, la largeur $AB = CD = c$, la hauteur n'entrant pas en considération, puisque, ni les vitesses, ni les pressions, ne dépendent point de la troisième coordonnée z , & prenant $\gamma = \mathcal{E}b$, dans l'état initial $ABCD$, la pression sur la base AB étoit $= \mathcal{E}bg$, sur la base $CD = 0$, & à un point quelconque $Z = \mathcal{E}g(b-x) = \mathcal{E}g.CP$. Or dans cet état nous supposons, que le fluide ait un tel mouvement selon la direction du tuyau, que la vitesse sur la ligne AC soit $= a$, sur la ligne $BD = a + \alpha c$, & sur une ligne quelconque QR parallèle à la direction du tuyau $= a + \alpha y$, posant $AQ = CR = y$. Nous concevons donc, que par une cause quelconque ait été imprimé au fluide ce mouvement, & qu'il soit poussé au premier instant sur la surface AB par le moyen d'un piston, par la force indiquée $\mathcal{E}bg$, l'autre base CD n'étant assujettie à aucune pression. Mais dans les instans suivans les forces qui agissent sur les faces extrêmes pourroient varier à volonté: or cette variabilité est déterminée par les hypothèses, que nous venons d'établir; voyons donc comment en vertu de ces hypothèses le mouvement du fluide fera continué.

LVI. Après un tems écoulé $= t$, tous les élémens du fluide, qui se trouvent sur la ligne QR , auront une vitesse selon cette même direction $= a + \alpha y + \mathcal{E}t$, par laquelle ils parcourront dans l'instant dt l'espace $(a + \alpha y + \mathcal{E}t)dt$; ils auront donc parcouru depuis le commencement l'espace $= at + \alpha yt + \frac{1}{2}\mathcal{E}tt$; & partant la filée du fluide qui étoit au commencement en QR , se trouvera à présent avancée en qr , ayant parcouru l'espace $Qq = at + \alpha yt + \frac{1}{2}\mathcal{E}tt$.

Donc le fil AC fera parvenu en ac , ayant parcouru l'espace $Aa = at + \frac{1}{2} \mathcal{C}tt$, & le fil BD en bd , ayant parcouru l'espace $Bb = at + act + \frac{1}{2} \mathcal{C}tt$; de sorte que la masse fluide sera maintenant terminée par les faces ab & cd , droites, mais obliques à la direction du tuyau. Or il faut qu'à présent la pression sur la face ab en q soit $= g(\mathcal{C} + \delta t - \mathcal{C}.Qq) = g(\mathcal{C}b + \delta t - \mathcal{C}at - \alpha \mathcal{C}yt - \frac{1}{2} \mathcal{C}\mathcal{C}tt)$,
& sur la face cd en

$$r = g(\mathcal{C}b + \delta t - \mathcal{C}.Qr) = g(\delta t - \mathcal{C}at - \alpha \mathcal{C}yt - \frac{1}{2} \mathcal{C}\mathcal{C}tt).$$

Il faut donc concevoir des pistons, qui agissent avec ces forces sur les deux extrémités ab & cd , & puisque ces pressions ne sont pas les mêmes par toute l'étendue de ces faces, il faut concevoir des pistons flexibles & pliables, par le moyen desquels ces pressions puissent être exécutées.

LVII. Ce mouvement demeureroit le même, si dans l'intégration de la pression p , nous eussions pris au lieu de δt une fonction quelconque de t ; mais alors l'état de pression dans la masse fluide deviendrait différent à chaque instant, sans que le mouvement supposé même du fluide en souffrit quelque altération. Posons donc $\delta t = \mathcal{C}at + \alpha \mathcal{C}ct + \frac{1}{2} \mathcal{C}\mathcal{C}tt$, & après le tems t la pression à un point quelconque q de la face ab , sera $= g[\mathcal{C}b + \alpha \mathcal{C}(c-y)t]$, & dans un point quelconque z , sur la ligne qr , la pression sera $g[\mathcal{C}b + \alpha \mathcal{C}(c-y)t - \mathcal{C}.qz]$, d'où la pression à l'autre extrémité r sera $= \alpha \mathcal{C}g(c-y)t$. Donc, sur la face ab , la pression sera en $a = \mathcal{C}g(b + act)$; & en $b = \mathcal{C}gb$: mais sur l'autre face cd , la pression sera en $c = \alpha \mathcal{C}gct$, & en $d = 0$. Au reste chaque fil QR se mouvra selon sa propre direction d'un mouvement uniformément accéléré, ou recevra en tems égaux des accroissemens égaux de vitesse. Le développement de ce cas particulier peut servir pour éclaircir le calcul qu'on aura à faire pour tous les autres cas.

LVIII. Arrêtons-nous encore au cas proposé (§. 48.), & supposons la densité g constante $= g$: mais prenons les forces P, Q, R, telles,



telles, que le fluide ne sauroit jamais être à l'équilibre. Soit pour cet effet $P = 0$, $Q = -\frac{x}{a}$, & $R = -\frac{x}{a}$, & posons $z = b + \frac{(y+z)t}{a}$, pour avoir $\left(\frac{du}{dx}\right) = 0$, & $\frac{dp}{g} = -\frac{xdy - xdz}{a} - \frac{ydx - zdx}{a}$, d'où nous tirons en intégrant $\frac{p}{g} = \text{Const.} - \frac{xy - xz}{a}$, où la constante peut renfermer le tems d'une manière quelconque. Il n'est donc pas possible, que toute la masse du fluide demeure jamais en repos; car, quoique nous posions $b = 0$, pour avoir le fluide en repos au commencement $t = 0$, aussi-tôt après le premier instant il sera agité, & il n'y aura que les élémens, où $y = 0$, ou $z = 0$, ou $y + z = 0$, qui demeureront en repos: tous les autres recevront un mouvement, ou en avant, ou en arrière, selon que $y + z$, aura une valeur positive, ou négative. On déterminera aussi aisément les pressions requises pour maintenir ce mouvement supposé.

LIX. Mais que la densité ne soit plus constante, mais variable, ou le fluide compressible, & pour que $q dx - q u dt$ devienne un différentiel complet, on peut prendre pour u une fonction quelconque des variables x, y, z , & t ; car puisque ici on ne regarde que les deux x & t comme variables, & les deux autres y & z comme constantes, on pourra toujours assigner une quantité s , telle que $s(dx - u dt)$ devienne intégrable. Soit S cette intégrale, & cette condition sera remplie, lorsqu'on prend $q = sf : S$, supposant $S = \int s(dx - u dt)$. Maintenant il faut de plus, que cette équation différentielle soit intégrable :

$$\frac{dp}{q} = P dx + Q dy + R dz - dx \left(\frac{du}{dt}\right) - u dx \left(\frac{du}{dx}\right),$$

où je remarque que si les forces P, Q, R , étoient évanouissantes, la pression p deviendrait fonction de x & de t , & partant cette

quantité $q \left(\left(\frac{du}{dt} \right) + u \left(\frac{du}{dx} \right) \right)$, ne devrait renfermer que les deux variables x & t , d'où la nature de la fonction u , tant qu'elle peut renfermer y & z , doit être déterminée.

LX. Quoique j'aye supposé ici $v = 0$ & $w = 0$, ces formules renferment tous les cas, où le mouvement de toutes les particules du fluide fuit toujours la même direction; car on n'aura qu'à prendre l'axe OA sur cette même direction. Or de là nous pourrons réciproquement résoudre nos formules, lorsque la direction du mouvement est oblique à la position des trois axes, ce qui ne manquera pas de nous fournir quelques éclaircissements dans cette Analyse. Pour cet effet considérons la vitesse vraie d'une particule quelconque Z du fluide qui soit $= x$, & puisque sa direction est donnée à l'égard des trois axes, les vitesses dérivées y tiennent des rapports donnés. Soit donc :

$$u = \alpha x; \quad v = \epsilon x; \quad \& \quad w = \gamma x;$$

& posant $dx = K dt + L dx + M dy + N dz$, nous aurons :

$$X = \alpha K + \alpha L + \alpha \epsilon M + \alpha \gamma N$$

$$Y = \epsilon K + \alpha \epsilon L + \epsilon \epsilon M + \epsilon \gamma N$$

$$Z = \gamma K + \alpha \gamma L + \epsilon \gamma M + \gamma \gamma N.$$

Donc, si nous posons pour abrégier $K + \alpha L + \epsilon M + \gamma N = O$, ayant $X = \alpha O$, $Y = \epsilon O$, $Z = \gamma O$, nos équations seront :

$$\frac{dp}{q} = P dx + Q dy + R dz - O (\alpha dx + \epsilon dy + \gamma dz).$$

$$\left(\frac{dq}{dt} \right) + \alpha \left(\frac{d.qx}{dx} \right) + \epsilon \left(\frac{d.qx}{dy} \right) + \gamma \left(\frac{d.qx}{dz} \right) = 0.$$

LXI. Soit d'abord la densité $q = g$, & pour satisfaire à cette égalité $\alpha \left(\frac{dx}{dx} \right) + \epsilon \left(\frac{dx}{dy} \right) + \gamma \left(\frac{dx}{dz} \right) = 0$, nous avons vû dans le §. 44. que la quantité x doit être une fonction quelconque des quantités

tités

tités $\alpha y - \xi x$ & $\alpha z - \gamma x$, ou $\xi z - \gamma y$, & qui puisse outre cela renfermer le tems t d'une maniere quelconque. Soit donc \mathfrak{v} une fonction quelconque des quantités $\alpha y - \xi x$, $\alpha z - \gamma x$, & t , puisque la formule $\xi z - \gamma y$ est déjà formée des deux autres, & on comprend aisément de là, que dans chaque instant la vitesse des particules qui se trouvent dans une même ligne droite, parallele à la direction du mouvement, est par tout la même, tout comme la nature de l'hypothese exige. Donc le différentiel de \mathfrak{v} aura une telle forme :

$$d\mathfrak{v} = F dt + G(\alpha dy - \xi dx) + H(\alpha dz - \gamma dx),$$

de sorte que :

$$K = F; L = -\xi G - \gamma H; M = \alpha G; \& N = \alpha H;$$

& partant $O = F$ fonction de $\alpha y - \xi x$, $\alpha z - \gamma x$, & de t : d'où l'équation différentielle qui reste à résoudre, fera :

$$\frac{dp}{q} = P dx + Q dy + R dz - F(\alpha dx + \xi dy + \gamma dz).$$

LXII. Le tems t étant ici supposé constant, si la formule $P dx + Q dy + R dz = dV$, & intégrable d'elle-même, il faut que l'autre partie $F(\alpha dx + \xi dy + \gamma dz)$ le soit aussi; ce qui ne sauroit arriver, à moins que F ne soit une fonction de $\alpha x + \xi y + \gamma z$, & du tems t . Mais il faut de plus que F soit aussi une fonction des quantités $\alpha y - \xi x$, $\alpha z - \gamma x$, & du tems t : donc puisque la formule $\alpha x + \xi y + \gamma z$, n'est pas composée des formules $\alpha y - \xi x$, & $\alpha z - \gamma x$, il est évident que la quantité F doit être fonction du seul tems t . Par conséquent la vitesse \mathfrak{v} sera en sorte $\mathfrak{v} = Z + T$, où Z marque une fonction quelconque des deux quantités $\alpha y - \xi x$, & $\alpha z - \gamma x$, sans renfermer le tems t , & T est une fonction quelconque du seul tems t , de sorte que $dT = F dt$. D'où l'intégrale de notre équation différentielle sera $\frac{p}{g} = V - F(\alpha x + \xi y + \gamma z) + \text{Const.}$

où la constante peut renfermer le tems t d'une maniere quelconque. Cette équation intégrale jointe à $\mathfrak{v} = Z + T$ contient tout ce qui regarde le mouvement du cas proposé.



LXIII. Mais si la densité q n'est pas constante, il fera important de découvrir la résolution de cette formule :

$$\left(\frac{dq}{dt}\right) + \alpha \left(\frac{d.q\vartheta}{dx}\right) + \epsilon \left(\frac{d.q\vartheta}{dy}\right) + \gamma \left(\frac{d.q\vartheta}{dz}\right) = 0.$$

Or, quelque difficile que cela puisse paroître, la réduction au cas précédent nous montre, que la vitesse ϑ peut être une fonction quelconque des quatre variables $x, y, z,$ & t , mais que la valeur de q doit être déterminée de la manière suivante. Qu'on considère en général une telle formule :

$$s(l dx + m dy + n dz - \vartheta dt) = dS,$$

qui étant par s multipliée est devenue intégrable, & soit $q = sf : S$; donc posant $d.f : S = dS.f' : S$, notre formule deviendra :

$$\begin{aligned} f : S \left(\frac{ds}{dt}\right) - sf' : S.s\vartheta + \alpha sf : S \left(\frac{d\vartheta}{dx}\right) + \alpha \vartheta f : S \left(\frac{ds}{dx}\right) + \alpha \vartheta sf' : S.l s \\ + \epsilon sf : S \left(\frac{d\vartheta}{dy}\right) + \epsilon \vartheta f : S \left(\frac{ds}{dy}\right) + \epsilon \vartheta sf' : S.m s \\ + \gamma sf : S \left(\frac{d\vartheta}{dz}\right) + \gamma \vartheta f : S \left(\frac{ds}{dz}\right) + \gamma \vartheta sf' : S.n s \end{aligned}$$

qui doit être égale à zero :

LXIV. Faisons d'abord évanouir les termes affectés par $f' : S$, & nous en obtiendrons $1 = \alpha l + \epsilon m + \gamma n$, & le reste étant divisé par $f : S$ donne :

$$\left(\frac{ds}{dt}\right) + \alpha \left(\frac{d.s\vartheta}{dx}\right) + \epsilon \left(\frac{d.s\vartheta}{dy}\right) + \gamma \left(\frac{d.s\vartheta}{dz}\right) = 0,$$

qui est bien semblable à la proposée, mais il faut remarquer que l'intégrabilité de la valeur dS renferme ces conditions :

$$\left(\frac{d.s\vartheta}{dx}\right) = -\left(\frac{d.l s}{dt}\right); \quad \left(\frac{d.s\vartheta}{dy}\right) = -\left(\frac{d.m s}{dt}\right); \quad \left(\frac{d.s\vartheta}{dz}\right) = -\left(\frac{d.n s}{dt}\right);$$

d'où



d'où nous tirons : $\left(\frac{ds}{dt}\right) (1 - \alpha l - \xi m - \gamma n)$; ce qui est d'accord avec la condition précédente. Donc, pourvû qu'il soit $\alpha l + \xi m + \gamma n = 1$, & s une telle fonction qui rende $s(ldx + mdy + ndz - \nu dt) = dS$, ou intégrable, on satisfera à notre formule, lorsqu'on prend $q = sf : S$, ou $\frac{q}{s}$ égal à une fonction quelconque de S . Il n'est pas nécessaire que les quantités l , m , & n , soient constantes, mais alors il faut qu'il soit

$$\alpha \left(\frac{dl}{dt}\right) + \xi \left(\frac{dm}{dt}\right) + \gamma \left(\frac{dn}{dt}\right) = 0,$$

or cette condition est déjà renfermée dans l'équation $1 = \alpha l + \xi m + \gamma n$.

LXV. Or il faut de plus que l , m , & n , soient de telles fonctions, que l'équation différentielle $ldx + mdy + ndz - \nu dt = 0$ devienne possible ; car sans cette condition il seroit impossible de trouver un multiplicateur s , qui rendit cette formule intégrable. Or, ayant pris à volonté une valeur pour l , celles de m & n en feront déjà déterminées, & nous nous pourrons dispenser de les chercher, en posant

$\alpha l = 1$ où $l = \frac{1}{\alpha}$, car alors il faut qu'il soit $\xi m + \gamma n = 0$;

& on n'aura qu'à chercher un tel facteur s , que cette formule

$s \left(\frac{dx}{\alpha} - \nu dt\right)$ devienne intégrable, où l'on regardera les deux

quantités y & z comme constantes. Soit donc $S = fs \left(\frac{dx}{\alpha} - \nu dt\right)$,

de sorte que S renferme y & z comme des constantes, & on pourra prendre $q = sf : S$: ce qui nous fournit la même solution, que si nous eussions tellement changé la position des trois axes, que l'un convint avec la direction du mouvement de tous les élémens du fluide. D'où nous voyons que cette restriction apparente n'affoiblit point la généralité de la solution.



LXVI. De la même manière on pourroit développer plusieurs autres cas particuliers, qui auront, tantôt une plus grande, tantôt une plus petite étendue ; mais on n'en trouvera point, qui soit plus général que celui, où les trois vitesses u , v , & w , sont telles, que la formule $u dx + v dy + w dz$ devienne intégrable. Soit S l'intégrale, qui contenant encore le tems t soit son différentiel complet : $dS = u dx + v dy + w dz + \Pi dt$, & puisque

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = \left(\frac{d\Pi}{dx}\right) ; \left(\frac{dv}{dt}\right) = \left(\frac{d\Pi}{dy}\right) ; \left(\frac{dw}{dt}\right) = \left(\frac{d\Pi}{dz}\right)$$

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = \left(\frac{dv}{dx}\right) ; \left(\frac{du}{dz}\right) = \left(\frac{dw}{dx}\right) ; \left(\frac{dv}{dz}\right) = \left(\frac{dw}{dy}\right),$$

nous aurons :

$$X = \left(\frac{d\Pi}{dx}\right) + u \left(\frac{du}{dx}\right) + v \left(\frac{dv}{dx}\right) + w \left(\frac{dw}{dx}\right)$$

$$Y = \left(\frac{d\Pi}{dy}\right) + u \left(\frac{du}{dy}\right) + v \left(\frac{dv}{dy}\right) + w \left(\frac{dw}{dy}\right)$$

$$Z = \left(\frac{d\Pi}{dz}\right) + u \left(\frac{du}{dz}\right) + v \left(\frac{dv}{dz}\right) + w \left(\frac{dw}{dz}\right)$$

& notre équation différentielle deviendra :

$$\frac{dp}{q} = P dx + Q dy + R dz - d\Pi - u du - v dv - w dw$$

(dont le dernier membre est absolument intégrable),

& l'autre équation demeure :

$$\left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{d.qu}{dx}\right) + \left(\frac{d.qv}{dy}\right) + \left(\frac{d.qw}{dz}\right) = 0.$$

LXVII. Tout se réduit donc à trouver des valeurs convenables pour les trois vitesses u , v , & w , qui satisfassent à nos deux équations, qui renferment tout ce qui regarde notre connoissance sur le mouvement des fluides. Car ayant ces trois vitesses, on pourra dé-



terminer le chemin, que chaque élément du fluide parcourt par son mouvement. Considérons la particule qui se trouve à présent en Z, & pour trouver le chemin, qu'elle a déjà parcouru, & qu'elle parcourra encore, puisque les trois vitesses u , v , & w , sont supposées connues, nous aurons pour son lieu à l'instant suivant, $dx = u dt$; $dy = v dt$ & $dz = w dt$. Qu'on élimine de ces trois égalités le tems t , & on aura encore deux équations entre les trois coordonnées x , y & z , qui détermineront le chemin cherché de l'élément du fluide, qui se trouve actuellement en Z, & en général on en connoitra la route, que chaque particule a décrite, & décrira encore.

LXVIII. La détermination de ces routes est de la dernière importance, & doit servir pour appliquer la Théorie à chaque cas proposé. Car si la figure du vaisseau, dans lequel le fluide se meut, est donnée, les particules du fluide, qui touchent à la surface du vaisseau, en doivent suivre nécessairement la direction : & partant les vitesses u , v , & w , doivent être telles, que les routes qui en seront déduites, tombent dans la surface même. Or nous voyons par là suffisamment, combien nous sommes encore éloignés de la connoissance complète du mouvement des fluides, & que ce que je viens d'expliquer, n'en contient qu'un foible commencement. Cependant tout ce que la Théorie des fluides renferme, est contenu dans les deux équations rapportées cy-dessus (§. XXXIV.), de sorte que ce ne sont pas les principes de Méchanique qui nous manquent dans la poursuite de ces recherches, mais uniquement l'Analyse, qui n'est pas encore assez cultivée, pour ce dessein : & partant on voit clairement, quelles découvertes nous restent encore à faire dans cette Science, avant que nous puissions arriver à une Théorie plus parfaite du mouvement des fluides.

