

UN EXEMPLE D'APPROCHE ALGORITHMIQUE EN RECHERCHE MATHÉMATIQUE

Yann BRENIER
CNRS-Université de Nice-Sophia

FTFNTMP-X-ENS Novembre 2011

UN TEMOIGNAGE PERSONNEL DE GESTATION DE TRAVAUX MATHEMATIQUES

UN TEMOIGNAGE PERSONNEL DE GESTATION DE TRAVAUX MATHEMATIQUES A PARTIR D'UN "BRICOLAGE" (AU SENS DE LA "PENSEE SAUVAGE"), MELANT

**UN TEMOIGNAGE PERSONNEL DE GESTATION
DE TRAVAUX MATHEMATIQUES A PARTIR D'UN
"BRICOLAGE" (AU SENS DE LA "PENSEE
SAUVAGE"), MELANT 1) UNE REUNION DE
CONTRAT SUR UN PROBLEME TRES CONCRET,**

**UN TEMOIGNAGE PERSONNEL DE GESTATION
DE TRAVAUX MATHEMATIQUES A PARTIR D'UN
"BRICOLAGE" (AU SENS DE LA "PENSEE
SAUVAGE"), MELANT 1) UNE REUNION DE
CONTRAT SUR UN PROBLEME TRES CONCRET,
2) DES LECTURES D'ETUDIANT (LIVRES
D'ARNOLD ET D'ARNOLD ET AVEZ),**

**UN TEMOIGNAGE PERSONNEL DE GESTATION
DE TRAVAUX MATHEMATIQUES A PARTIR D'UN
"BRICOLAGE" (AU SENS DE LA "PENSEE
SAUVAGE"), MELANT 1) UNE REUNION DE
CONTRAT SUR UN PROBLEME TRES CONCRET,
2) DES LECTURES D'ETUDIANT (LIVRES
D'ARNOLD ET D'ARNOLD ET AVEZ), 3) UN
PASSAGE AU DISCRET A LA RECHERCHE
D'ALGORITHMES COMBINATOIRES,**

**UN TEMOIGNAGE PERSONNEL DE GESTATION
DE TRAVAUX MATHEMATIQUES A PARTIR D'UN
"BRICOLAGE" (AU SENS DE LA "PENSEE
SAUVAGE"), MELANT 1) UNE REUNION DE
CONTRAT SUR UN PROBLEME TRES CONCRET,
2) DES LECTURES D'ETUDIANT (LIVRES
D'ARNOLD ET D'ARNOLD ET AVEZ), 3) UN
PASSAGE AU DISCRET A LA RECHERCHE
D'ALGORITHMES COMBINATOIRES, 4) UN
RETOUR AU CONTINU OUVRANT DE NOUVELLES
PERSPECTIVES MATHEMATIQUES.**

**AU DEPART, EN 1985, UN PROJET DE CONTRAT
DE MECANIQUE DES FLUIDES NUMERIQUE
ENTRE LE CEA ET L'INRIA (P. JOLY ET Y.B.) SUR
LA SIMULATION NUMERIQUE DES TSUNAMIS...**

**AU DEPART, EN 1985, UN PROJET DE CONTRAT
DE MECANIQUE DES FLUIDES NUMERIQUE
ENTRE LE CEA ET L'INRIA (P. JOLY ET Y.B.) SUR
LA SIMULATION NUMERIQUE DES TSUNAMIS...
SUITE A LA SUBMERSION PARTIELLE DE
L'ATOLL DE MURUROA EN 1979.**

Underground explosions, especially on Mururoa's outer reef, resulted in serious problems of geological stability. This is the main reason for moving to test under the lagoon from 1981, following serious collapsing in the south east zone in 1978 and 1979

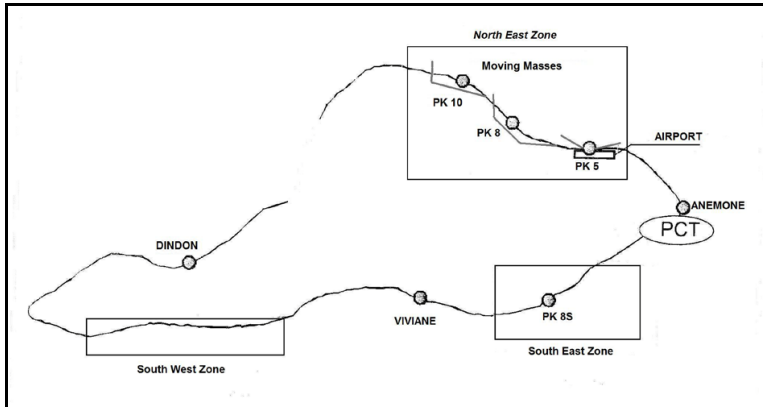


Figure 3 : Areas of Mururoa weakened by underground explosions (Ministry of Defence document)

Brenier (CNRS)

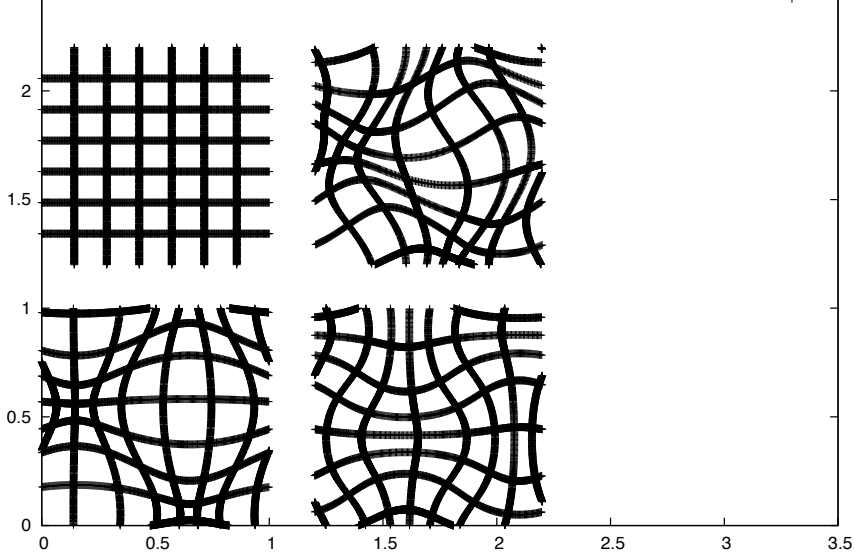
FTFNTMPM

3 / 21

**LES LOIS DU MOUVEMENT DES FLUIDES
INCOMPRESSIBLES (COMME L'OCEAN) ONT ETE
ETABLIES PAR L. EULER EN 1755-1757.**

LES LOIS DU MOUVEMENT DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES (COMME L'OCEAN) ONT ETE ETABLIES PAR L. EULER EN 1755-1757. ELLES DERIVENT DU "PRINCIPE DE MOINDRE ACTION", DEJA EVOQUE PAR EULER, COMME L'A ETABLI LE MATHEMATICIEN V.I. ARNOLD (1937-2010) EN 1966.

LES LOIS DU MOUVEMENT DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES (COMME L'OCEAN) ONT ETE ETABLIES PAR L. EULER EN 1755-1757. ELLES DERIVENT DU "PRINCIPE DE MOINDRE ACTION", DEJA EVOQUE PAR EULER, COMME L'A ETABLI LE MATHEMATICIEN V.I. ARNOLD (1937-2010) EN 1966. AINSI, UN TEL FLUIDE SE DEPLACE DE FACON A MINIMISER UN CERTAIN COUT (BIEN DEFINI) DE DEPLACEMENT ENTRE LES CONFIGURATIONS PAR LESQUELLES IL PASSE AU COURS DE SON MOUVEMENT.

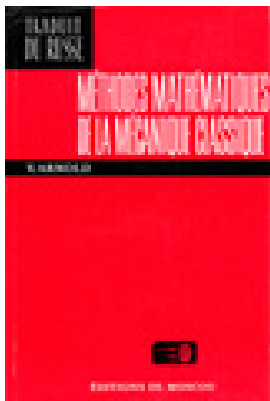


EN BAS A DROITE UNE TRANSFORMATION INCOMPRESSIBLE

qui obéiroit à son action. Cette idée de l'effort est de la dernière importance dans toute la Théorie, tant de l'équilibre que du mouvement, ayant fait voir, que la somme de tous les efforts est toujours un *maximum* ou *minimum*. Cette belle propriété convient admirablement avec le beau principe de la moindre action; dont nous devons la découverte à notre Illustre Président, M. de *Maupertuis*.

XXIII. Comme les équations que nous venons de trouver, renferment quatre variables x , y , z , & t , qui sont absolument indépendantes entr'elles, vû que la variabilité des trois premières s'étend sur
tous

LE PRINCIPE DE MOINDRE ACTION EVOQUE PAR EULER



LE LIVRE D'ARNOLD "METHODES MATHÉMATIQUES DE LA MECANIQUE CLASSIQUE" TRADUIT EN FRANCAIS DANS LA COLLECTION MIR...UNE LECTURE D'ETUDIANT VERS 1980

**EN VUE D'UN ALGORITHME DE CALCUL, ON A
CONSIDERE L'ANALOGUE DISCRET D'UN
MOUVEMENT INCOMPRESSIBLE A L'INTERIEUR
D'UN CARRE DE COTE UN (POUR FIXER LES
IDEES),**

**EN VUE D'UN ALGORITHME DE CALCUL, ON A
CONSIDERE L'ANALOGUE DISCRET D'UN
MOUVEMENT INCOMPRESSIBLE A L'INTERIEUR
D'UN CARRE DE COTE UN (POUR FIXER LES
IDEES), A SAVOIR LA PERMUTATION DE $N \times N$
PETITS CARRES DE COTE $1/N$.**

EN VUE D'UN ALGORITHME DE CALCUL, ON A CONSIDERE L'ANALOGUE DISCRET D'UN MOUVEMENT INCOMPRESSIBLE A L'INTERIEUR D'UN CARRE DE COTE UN (POUR FIXER LES IDEES), A SAVOIR LA PERMUTATION DE $N \times N$ PETITS CARRES DE COTE $1/N$. L'IDEE EST BIEN ILLUSTRÉE PAR LE JEU DE TAQUIN (VOIR PAGE SUIVANTE).

EN VUE D'UN ALGORITHME DE CALCUL, ON A CONSIDERE L'ANALOGUE DISCRET D'UN MOUVEMENT INCOMPRESSIBLE A L'INTERIEUR D'UN CARRE DE COTE UN (POUR FIXER LES IDEES), A SAVOIR LA PERMUTATION DE $N \times N$ PETITS CARRES DE COTE $1/N$. L'IDEE EST BIEN ILLUSTRÉE PAR LE JEU DE TAQUIN (VOIR PAGE SUIVANTE). CETTE "DISCRETISATION" EST BIEN CONNUE DES MATHÉMATIENS DES SYSTÈMES DYNAMIQUES ("THÉORIE ERGODIQUE") MAIS LARGEMENT IGNORÉE EN MÉCANIQUE DES FLUIDES.



COMMENT CHEMINER A MOINDRE COUT D'UNE CONFIGURATION A UNE AUTRE? UN EXEMPLE OU LES AXES VERTICAL ET HORIZONTAL CORRESPONDENT RESPECTIVEMENT AU TEMPS ET A L'ESPACE... ON SE PLACE EN UNE DIMENSION D'ESPACE POUR SIMPLIFIER

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

UNE TENTATIVE PAR ECHANGES ALTERNES DES VOISINS DEUX A DEUX...PREMIERS PAS VERS LA DESTINATION...

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	1	4	3	6	5	8	7	10	9	12	11
2	4	1	6	3	8	5	10	7	12	9	11
12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

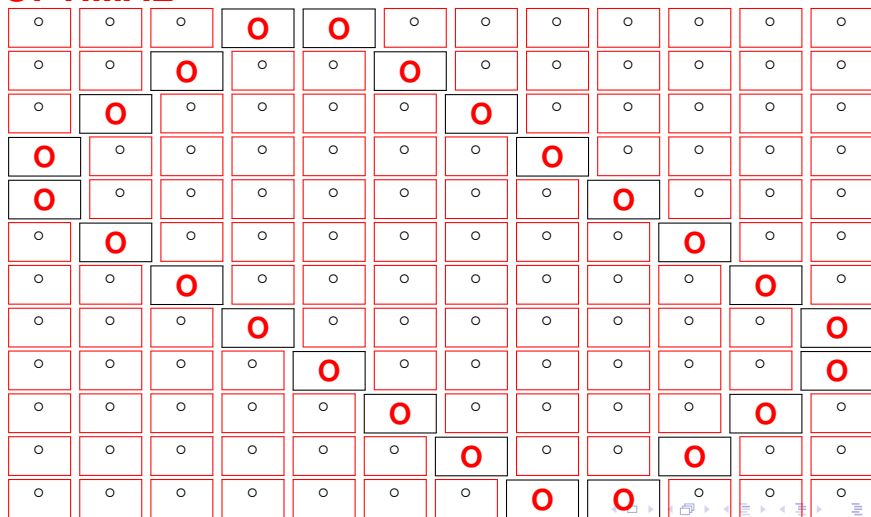
ENFIN ARRIVES A DESTINATION EN 12 ETAPES!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	1	4	3	6	5	8	7	10	9	12	11
2	4	1	6	3	8	5	10	7	12	9	11
4	2	6	1	8	3	10	5	12	7	11	9
4	6	2	8	1	10	3	12	5	11	7	9
6	4	8	2	10	1	12	3	11	5	9	7
6	8	4	10	2	12	1	11	3	9	5	7
8	6	10	4	12	2	11	1	9	3	7	5
8	10	6	12	4	11	2	9	1	7	3	5
10	8	12	6	11	4	9	2	7	1	5	3
10	12	8	11	6	9	4	7	2	5	1	3
12	10	11	8	9	6	7	4	5	2	3	1
12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

SUIVONS LA TRAJECTOIRE DE DEUX VOISINS, LE 4 ET LE 5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	1	4	3	6	5	8	7	10	9	12	11
2	4	1	6	3	8	5	10	7	12	9	11
4	2	6	1	8	3	10	5	12	7	11	9
4	6	2	8	1	10	3	12	5	11	7	9
6	4	8	2	10	1	12	3	11	5	9	7
6	8	4	10	2	12	1	11	3	9	5	7
8	6	10	4	12	2	11	1	9	3	7	5
8	10	6	12	4	11	2	9	1	7	3	5
10	8	12	6	11	4	9	2	7	1	5	3
10	12	8	11	6	9	4	7	2	5	1	3
12	10	11	8	9	6	7	4	5	2	3	1

EN REPASSANT AU CONTINU, ON OBSERVE UN "ECOULEMENT GENERALISE" QUI SEMBLE OPTIMAL



**POUR CE FLOT "GENERALISE", PAR UN POINT
DONNE, PLUSIEURS TRAJECTOIRES PEUVENT
PASSER.**

**POUR CE FLOT "GENERALISE", PAR UN POINT
DONNE, PLUSIEURS TRAJECTOIRES PEUVENT
PASSER. CETTE VIOLATION D'UN AXIOME DE LA
MECANIQUE CLASSIQUE N'A RIEN A VOIR AVEC
LA MECANIQUE QUANTIQUE.**

**POUR CE FLOT "GENERALISE", PAR UN POINT
DONNE, PLUSIEURS TRAJECTOIRES PEUVENT
PASSER. CETTE VIOLATION D'UN AXIOME DE LA
MECANIQUE CLASSIQUE N'A RIEN A VOIR AVEC
LA MECANIQUE QUANTIQUE. IL S'AGIT PLUTOT
D'UNE "COMPLETION" MATHEMATIQUE (CELLE
DE L'ESPACE DES FLOTS INCOMPRESSIBLES,
POUR LA METRIQUE ASSOCIEE A L'ACTION).**

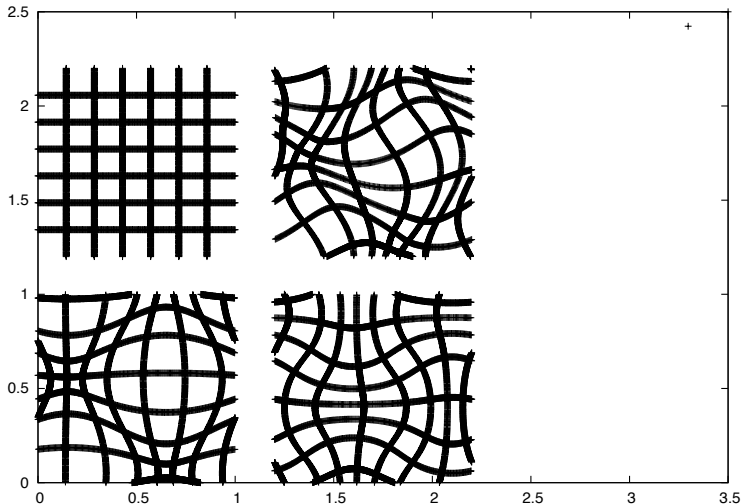
**POUR CE FLOT "GENERALISE", PAR UN POINT
DONNE, PLUSIEURS TRAJECTOIRES PEUVENT
PASSER. CETTE VIOLATION D'UN AXIOME DE LA
MECANIQUE CLASSIQUE N'A RIEN A VOIR AVEC
LA MECANIQUE QUANTIQUE. IL S'AGIT PLUTOT
D'UNE "COMPLETION" MATHEMATIQUE (CELLE
DE L'ESPACE DES FLOTS INCOMPRESSIBLES,
POUR LA METRIQUE ASSOCIEE A L'ACTION).
AINSI, LES FLOTS "GENERALISES" SONT AUSSI
NATURELS EN ANALYSE DES FLUIDES QUE LES
NOMBRES REELS LE SONT EN ANALYSE
CLASSIQUE PAR RAPPORT AUX NOMBRES
RATIONNELS.**

**CETTE EXPERIENCE DE PENSEE A SUGGERE
UN NOUVEAU CADRE POUR L'ETUDE DES
FLUIDES INCOMPRESSIBLES ET DE PROBLEMES
MATHEMATIQUES ASSOCIES.**

**CETTE EXPERIENCE DE PENSEE A SUGGERE
UN NOUVEAU CADRE POUR L'ETUDE DES
FLUIDES INCOMPRESSIBLES ET DE PROBLEMES
MATHEMATIQUES ASSOCIES. AINSI, ON A PU,
ETABLIR EN 1993/99 L'UNICITE (SURPRENANTE)
DU CHAMP DE PRESSION NECESSAIRE A
DEPLACER OPTIMALEMENT UN FLUIDE
INCOMPRESSIBLE D'UNE CONFIGURATION A
UNE AUTRE...**

**CETTE EXPERIENCE DE PENSEE A SUGGERE
UN NOUVEAU CADRE POUR L'ETUDE DES
FLUIDES INCOMPRESSIBLES ET DE PROBLEMES
MATHEMATIQUES ASSOCIES. AINSI, ON A PU,
ETABLIR EN 1993/99 L'UNICITE (SURPRENANTE)
DU CHAMP DE PRESSION NECESSAIRE A
DEPLACER OPTIMALEMENT UN FLUIDE
INCOMPRESSIBLE D'UNE CONFIGURATION A
UNE AUTRE... ET, AU PREALABLE, ON A
IMAGINE (ET DEMONTRE) EN 1987/1991 UN
THEOREME DE GEOMETRIE DIFFERENTIELLE:
LA FACTORISATION POLAIRE DES
DIFFEOMORPHISMES.**

THEOREME: TOUT DIFFEOMORPHISME SE DECOMPOSE DE FACON UNIQUE EN UN DIFFEOMORPHISME INCOMPRESSIBLE (I.E. A DETERMINANT JACOBIEN PARTOUT EGAL A UN) ET UN DIFFEOMORPHISME A MATRICE JACOBIEENNE PARTOUT SYMETRIQUE DEFINIE POSITIVE.



EN BAS, A GAUCHE, UN DIFFEO A JACOBIENNE PARTOUT
 SYMETRIQUE. >0 , A DROITE, UN DIFFEO INCOMPRESSIBLE

**PLUS LARGEMENT, ON A VU, DANS LE MEME
ESPRIT ET SOUS D'AUTRES INFLUENCES, SE
DEVELOPPER AU COURS DES 20 DERNIERES
ANNEES, DE NOUVELLES APPROCHES
MATHEMATIQUES (DITES DE "TRANSPORT
OPTIMAL")**

PLUS LARGEMENT, ON A VU, DANS LE MEME ESPRIT ET SOUS D'AUTRES INFLUENCES, SE DEVELOPPER AU COURS DES 20 DERNIERES ANNEES, DE NOUVELLES APPROCHES MATHEMATIQUES (DITES DE "TRANSPORT OPTIMAL") EN GEOMETRIE DIFFERENTIELLE, EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES ET EN ANALYSE FONCTIONNELLE (QU'ON POURRA DECOUVRIR DANS LES DEUX TRAITES DE C.VILLANI, PAR EXEMPLE).

**EN RESUME, ON A TENTE DE PRESENTER LA
GESTATION DE RESULTATS ET CONCEPTS
MATHEMATIQUES EN PLUSIEURS ETAPES:
MELANT**

**EN RESUME, ON A TENTE DE PRESENTER LA
GESTATION DE RESULTATS ET CONCEPTS
MATHEMATIQUES EN PLUSIEURS ETAPES:
MELANT 1) UNE REUNION DE CONTRAT SUR UN
PROBLEME TRES CONCRET,**

**EN RESUME, ON A TENTE DE PRESENTER LA
GESTATION DE RESULTATS ET CONCEPTS
MATHEMATIQUES EN PLUSIEURS ETAPES:
MELANT 1) UNE REUNION DE CONTRAT SUR UN
PROBLEME TRES CONCRET, 2) DES LECTURES
D'ETUDIANT (LIVRES D'ARNOLD ET D'ARNOLD
ET AVEZ),**

**EN RESUME, ON A TENTE DE PRESENTER LA
GESTATION DE RESULTATS ET CONCEPTS
MATHEMATIQUES EN PLUSIEURS ETAPES:
MELANT 1) UNE REUNION DE CONTRAT SUR UN
PROBLEME TRES CONCRET, 2) DES LECTURES
D'ETUDIANT (LIVRES D'ARNOLD ET D'ARNOLD
ET AVEZ), 3) UN PASSAGE AU DISCRET A LA
RECHERCHE D'ALGORITHMES COMBINATOIRES,**

**EN RESUME, ON A TENTE DE PRESENTER LA
GESTATION DE RESULTATS ET CONCEPTS
MATHEMATIQUES EN PLUSIEURS ETAPES:
MELANT 1) UNE REUNION DE CONTRAT SUR UN
PROBLEME TRES CONCRET, 2) DES LECTURES
D'ETUDIANT (LIVRES D'ARNOLD ET D'ARNOLD
ET AVEZ), 3) UN PASSAGE AU DISCRET A LA
RECHERCHE D'ALGORITHMES COMBINATOIRES,
4) UN RETOUR AU CONTINU OUVRANT DE
NOUVELLES PERSPECTIVES MATHEMATIQUES.**

"MORALE" DE L'HISTOIRE:

"MORALE" DE L'HISTOIRE:

.

**1) LE PROBLEME CONCRET POSE AU DEPART A
ETE RESOLU PAR D'AUTRES.**

"MORALE" DE L'HISTOIRE:

.

**1) LE PROBLEME CONCRET POSE AU DEPART A
ETE RESOLU PAR D'AUTRES. 2) L'IMPACT SUR
LES MATHEMATIQUES PURES ETAIT INESPERE.**

"MORALE" DE L'HISTOIRE:

- 1) LE PROBLEME CONCRET POSE AU DEPART A ETE RESOLU PAR D'AUTRES.
- 2) L'IMPACT SUR LES MATHEMATIQUES PURES ETAIT INESPERE.
- 3) LA DESCRIPTION DISCRETE EN TERMES DE PERMUTATIONS A COMPLETEMENT DISPARU DES ENONCES MATHEMATIQUES FINAUX

"MORALE" DE L'HISTOIRE:

- 1) LE PROBLEME CONCRET POSE AU DEPART A ETE RESOLU PAR D'AUTRES.
- 2) L'IMPACT SUR LES MATHEMATIQUES PURES ETAIT INESPERE.
- 3) LA DESCRIPTION DISCRETE EN TERMES DE PERMUTATIONS A COMPLETEMENT DISPARU DES ENONCES MATHEMATIQUES FINAUX (C'EST POURQUOI J'AI PRIS LA LIBERTE DE LA RAPPORTER ICI).

"MORALE" DE L'HISTOIRE:

- 1) LE PROBLEME CONCRET POSE AU DEPART A ETE RESOLU PAR D'AUTRES.
- 2) L'IMPACT SUR LES MATHEMATIQUES PURES ETAIT INESPERE.
- 3) LA DESCRIPTION DISCRETE EN TERMES DE PERMUTATIONS A COMPLETEMENT DISPARU DES ENONCES MATHEMATIQUES FINAUX (C'EST POURQUOI J'AI PRIS LA LIBERTE DE LA RAPPORTER ICI).
- 4) LA SOLUTION IMAGINEE PAR JEU DE TAQUIN N'ETAIT MEME PAS OPTIMALE!

Si le fluide n'étoit pas compressible, la densité ρ seroit la même en Z , & en Z' , & pour ce cas on auroit cette équation :

$$\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{dw}{dz}\right) = 0.$$

qui est aussi celle sur laquelle j'ai établi mon Mémoire latin allégué ci-dessus.

XVIII. Cette formule ayant été fournie par la considération de la continuité du fluide, renferme déjà un certain rapport qui doit régner entre les quantités u , v , w , & ρ . Les autres déterminations doivent être tirées de la considération des forces, auxquelles chaque particule du fluide est assujettie : or, outre les forces accélératrices P , Q , R , qui agissent sur le fluide en Z , il est aussi sollicité par la pression qui agit de toutes parts sur l'élément du fluide contenu en Z . De la combinaison de ces doubles forces on tirera trois forces accélératrices selon la direction des trois axes ; & puisqu'on peut assigner les accélérations mêmes par la considération des vitesses u , v , & w , nous tirerons de là trois équations, qui jointes à celle que nous venons de trouver, renfermeront tout ce qui regarde le mouvement des fluides, de sorte que nous aurons alors des principes généraux & complets de toute la science du mouvement des fluides.

XIX.

XXI. Nous n'avons donc qu'à évaluer ces forces accélératrices avec les accélérations actuelles que nous venons de trouver, & nous obtiendrons les trois équations suivantes :

$$P - \frac{1}{q} \left(\frac{dp}{dx} \right) = \left(\frac{du}{dt} \right) + u \left(\frac{du}{dx} \right) + v \left(\frac{du}{dy} \right) + w \left(\frac{du}{dz} \right)$$

$$Q - \frac{1}{q} \left(\frac{dp}{dy} \right) = \left(\frac{dv}{dt} \right) + u \left(\frac{dv}{dx} \right) + v \left(\frac{dv}{dy} \right) + w \left(\frac{dv}{dz} \right)$$

$$R - \frac{1}{q} \left(\frac{dp}{dz} \right) = \left(\frac{dw}{dt} \right) + u \left(\frac{dw}{dx} \right) + v \left(\frac{dw}{dy} \right) + w \left(\frac{dw}{dz} \right)$$

Si nous ajoutons à ces trois équations premièrement celle, que nous a fournie la considération de la continuité du fluide :

$$\left(\frac{dq}{dt} \right)$$

mouvement des fluides, & que ce que je viens d'expliquer, n'en contient qu'un foible commencement. Cependant tout ce que la Théorie des fluides renferme, est contenu dans les deux équations rapportées cy-dessus (§. XXXIV.), de sorte que ce ne sont pas les principes de Méchanique qui nous manquent dans la poursuite de ces recherches, mais uniquement l'Analyse, qui n'est pas encore assez cultivée, pour ce dessein : & partant on voit clairement, quelles découvertes nous restent encore à faire dans cette Science, avant que nous puissions arriver à une Théorie plus parfaite du mouvement des fluides.



CON-

MERCI DE VOTRE PATIENCE

**MERCI DE VOTRE PATIENCE ET, SURTOUT,
MERCI AUX ORGANISATEURS DE CES
JOURNEES.**