Quelques problèmes relatifs à la dynamique des points vortex dans les équations d'Euler et de Ginzburg-Landau complexe

Evelyne Miot
Thèse effectuée sous la direction de Didier Smets

Laboratoire Jacques-Louis Lions

4 décembre 2009

Le cadre général : pourquoi ce titre ?

Deux équations étudiées, essentiellement en dimension 2 d'espace.

- Pour les fluides incompressibles non visqueux, les équations d'Euler incompressibles

$$\begin{aligned} &\partial_t v + (v \cdot \nabla) v = -\nabla p, \quad \operatorname{div} v = 0, \quad v : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \text{ou} \quad &\partial_t v + \operatorname{div}(v \otimes v) = -\nabla p, \quad \operatorname{div} v = 0. \end{aligned} \tag{E}$$

- Pour les superfluides, une équation de Ginzburg-Landau complexe

$$\kappa \partial_t u + i \partial_t u = \Delta u + \frac{1}{\varepsilon^2} u (1 - |u|^2), \quad u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}, \tag{C_ε}$$

  où
  - $0 < \varepsilon < 1$ petit paramètre et $0 < \kappa < 1$.
  - Lorsque $\kappa = 0$: équation de Gross-Pitaevskii

$$i \partial_t u = \Delta u + \frac{1}{\varepsilon^2} u (1 - |u|^2), \quad u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}. \tag{GP}$$

Le cadre général : pourquoi ce titre ?

Deux équations étudiées, essentiellement en dimension 2 d'espace.

- Pour les fluides incompressibles non visqueux, les équations d'Euler incompressibles

$$\begin{aligned} &\partial_t v + (v\cdot\nabla)v = -\nabla p, \quad \operatorname{div} v = 0, \quad v : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \text{ou } \ &\partial_t v + \operatorname{div}(v\otimes v) = -\nabla p, \quad \operatorname{div} v = 0. \end{aligned} \tag{E}$$

- Pour les superfluides, une équation de Ginzburg-Landau complexe

$$\kappa\partial_t u + i\partial_t u = \Delta u + \frac{1}{\varepsilon^2}u(1-|u|^2), \quad u : \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}, \tag{C_ε}$$

où

- $0<\varepsilon<1$ petit paramètre et $0<\kappa<1$.
- Lorsque $\kappa = 0$: équation de Gross-Pitaevskii

$$i\partial_t u = \Delta u + \frac{1}{\varepsilon^2}u(1-|u|^2), \quad u : \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}. \tag{GP}$$

Lien entre les équations : la transformation de Madelung

- (E) et (GP) présentent des analogies au moins formelles.
  Si $u \neq 0$, on écrit $u = \rho \exp(i\varphi)$ et on pose $v = -2\nabla\varphi$:

$$\begin{cases} \partial_t \rho^2 + \mathrm{div}\,(\rho^2 v) = 0 \\ \partial_t v + v \cdot \nabla v + \nabla \left(\dfrac{\rho^2 - 1}{\varepsilon^2} \right) = 2\nabla \left(\dfrac{\Delta\rho}{\rho} \right). \end{cases}$$

Lien entre les équations : la transformation de Madelung

- (E) et (GP) présentent des analogies au moins formelles.
  Si $u \neq 0$, on écrit $u = \rho \exp(i\varphi)$ et on pose $v = -2\nabla\varphi$:

$$\begin{cases} \partial_t \rho^2 + \mathrm{div}\,(\rho^2 v) = 0 \\ \partial_t v + v \cdot \nabla v + \nabla\left(\dfrac{\rho^2 - 1}{\varepsilon^2}\right) = 2\nabla\left(\dfrac{\Delta\rho}{\rho}\right). \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ (E) apparaît comme une limite incompressible $\rho \equiv 1$ de (GP).

Lien entre les équations : la transformation de Madelung

- (E) et (GP) présentent des analogies au moins formelles.
  Si $u \neq 0$, on écrit $u = \rho \exp(i\varphi)$ et on pose $v = -2\nabla\varphi$:

$$\begin{cases} \partial_t \rho^2 + \mathrm{div}\,(\rho^2 v) = 0 \\ \partial_t v + v \cdot \nabla v + \nabla \left(\dfrac{\rho^2 - 1}{\varepsilon^2} \right) = 2\nabla \left(\dfrac{\Delta\rho}{\rho} \right). \end{cases}$$

  $\rightsquigarrow$ (E) apparaît comme une limite incompressible $\rho \equiv 1$ de (GP).

- Pour (C_ε) on étudiera notamment le cas $\kappa = \kappa_\varepsilon = o_\varepsilon(1)$ de sorte que l'analogie se poursuit lorsque $\rho_\varepsilon \simeq 1$. On étudiera aussi un cas où l'analogie se révèle fausse.

Lien entre les équations : la transformation de Madelung

- (E) et (GP) présentent des analogies au moins formelles.
  Si $u \neq 0$, on écrit $u = \rho \exp(i\varphi)$ et on pose $v = -2\nabla\varphi$:

$$\begin{cases} \partial_t \rho^2 + \mathrm{div}\,(\rho^2 v) = 0 \\ \partial_t v + v \cdot \nabla v + \nabla \left(\dfrac{\rho^2 - 1}{\varepsilon^2} \right) = 2\nabla \left(\dfrac{\Delta\rho}{\rho} \right). \end{cases}$$

  $\rightsquigarrow$ (E) apparaît comme une limite incompressible $\rho \equiv 1$ de (GP).

- Pour (C_ε) on étudiera notamment le cas $\kappa = \kappa_\varepsilon = o_\varepsilon(1)$ de sorte que l'analogie se poursuit lorsque $\rho_\varepsilon \simeq 1$. On étudiera aussi un cas où l'analogie se révèle fausse.

- Supercourant $j(u) = (iu, \nabla u)$, défini même lorsque $u = 0$.

  De plus $j(\rho e^{i\varphi}) = \rho^2 \nabla\varphi$. Donc $-2j(u) \simeq -2\nabla\varphi = v$ si $\rho^2 \simeq 1$.

Singularités ponctuelles dans les solutions : les vortex

- $\forall \varepsilon > 0$, $\forall d \in \mathbb{R}$, (E) admet une solution stationnaire, régulière :

$$v^*_{\varepsilon,d}(x) = \rho_E\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right)\frac{d}{2\pi}\frac{x^\perp}{|x|^2}, \quad 0 \leq \rho_E \leq 1, \quad \rho_E(0) = 0,\ \rho_E(+\infty) = 1.$$

- $\forall \varepsilon > 0$, $\forall d \in \mathbb{Z}$, (C_ε) admet une solution stationnaire, régulière :

$$u^*_{\varepsilon,d}(z) = \rho_d\left(\frac{|z|}{\varepsilon}\right)\left(\frac{z}{|z|}\right)^d, \quad 0 \leq \rho_d \leq 1, \quad \rho_d(0) = 0,\ \rho_d(+\infty) = 1.$$

Singularités ponctuelles dans les solutions : les vortex

- $\forall \varepsilon > 0$, $\forall d \in \mathbb{R}$, (E) admet une solution stationnaire, régulière :

$$v^*_{\varepsilon,d}(x) = \rho_E\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right)\frac{d}{2\pi}\frac{x^\perp}{|x|^2}, \quad 0 \leq \rho_E \leq 1, \quad \rho_E(0) = 0,\ \rho_E(+\infty) = 1.$$

- $\forall \varepsilon > 0$, $\forall d \in \mathbb{Z}$, (C_ε) admet une solution stationnaire, régulière :

$$u^*_{\varepsilon,d}(z) = \rho_d\left(\frac{|z|}{\varepsilon}\right)\left(\frac{z}{|z|}\right)^d, \quad 0 \leq \rho_d \leq 1, \quad \rho_d(0) = 0,\ \rho_d(+\infty) = 1.$$

$$j(u^*_{\varepsilon,d})(x) = \rho_d^2\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right) d\,\frac{x^\perp}{|x|^2}.$$

Singularités ponctuelles dans les solutions : les vortex

- $\forall \varepsilon > 0$, $\forall d \in \mathbb{R}$, (E) admet une solution stationnaire, régulière :

$$v^*_{\varepsilon,d}(x) = \rho_E\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right)\frac{d}{2\pi}\frac{x^\perp}{|x|^2}, \quad 0 \leq \rho_E \leq 1, \quad \rho_E(0) = 0,\ \rho_E(+\infty) = 1.$$

- $\forall \varepsilon > 0$, $\forall d \in \mathbb{Z}$, (C_ε) admet une solution stationnaire, régulière :

$$u^*_{\varepsilon,d}(z) = \rho_d\left(\frac{|z|}{\varepsilon}\right)\left(\frac{z}{|z|}\right)^d, \quad 0 \leq \rho_d \leq 1, \quad \rho_d(0) = 0,\ \rho_d(+\infty) = 1.$$

$$j(u^*_{\varepsilon,d})(x) = \rho_d^2\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right) d\,\frac{x^\perp}{|x|^2}.$$

- Superpositions de vortex centrés en des points $z_1, \ldots, z_l$

$$v^*_\varepsilon(z_i, d_i) = \sum_{i=1}^{l} v^*_{\varepsilon,d_i}(x - z_i), \quad u^*_\varepsilon(z_i, d_i) = \prod_{i=1}^{l} \rho_{d_i}\left(\frac{|z - z_i|}{\varepsilon}\right)\left(\frac{z - z_i}{|z - z_i|}\right)^{d_i}.$$

La vorticité

Afin de décrire les vortex, on introduit la notion de vorticité

Fluides (Euler)	**Superfluides (Gross-Pitaevskii)**
Tourbillon $\omega(v) = \mathrm{rot}\,(v)$	Jacobien $\omega(u) = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\,(j(u))$

La vorticité

Afin de décrire les vortex, on introduit la notion de vorticité

Fluides (Euler)	**Superfluides (Gross-Pitaevskii)**
Tourbillon $\omega(v) = \mathrm{rot}\,(v)$	Jacobien $\omega(u) = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\,(j(u))$
$\partial_t \omega + \mathrm{rot}\,\mathrm{div}\,(v \otimes v) = 0$	$\partial_t \omega + \mathrm{rot}\,\mathrm{div}\,(\nabla u \otimes \nabla u) = 0$
$\partial_t \omega + v \cdot \nabla \omega = 0$	$(\dots)$

La vorticité

Afin de décrire les vortex, on introduit la notion de vorticité

Fluides (Euler)	**Superfluides (Gross-Pitaevskii)**
Tourbillon $\omega(v) = \mathrm{rot}\,(v)$	Jacobien $\omega(u) = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\,(j(u))$
$\partial_t\omega + \mathrm{rot}\,\mathrm{div}\,(v \otimes v) = 0$	$\partial_t\omega + \mathrm{rot}\,\mathrm{div}\,(\nabla u \otimes \nabla u) = 0$
$\partial_t\omega + v \cdot \nabla\omega = 0$	$(\dots)$

La présence de points vortex dans le champ se traduit par la concentration de la vorticité en ces points : pour les superpositions de vortex,

$$\omega_\varepsilon^*(z_i, d_i) \rightharpoonup \alpha \sum_{i=1}^{l} d_i \delta_{z_i}, \quad \varepsilon \to 0, \quad \alpha = \begin{cases} 1 \text{ pour (E)}, \\ \pi \text{ pour (GP)}. \end{cases}$$

Dynamique des points vortex

Théorème (Équations d'Euler et de Gross-Pitaevskii)

$$\text{Si} \quad \omega_\varepsilon(0) \rightharpoonup \alpha \sum_{i=1}^{l} d_i \delta_{z_i^0} \quad \& \quad \text{« données préparées ».}$$

$$\text{Alors pour } t > 0, \quad \omega_\varepsilon(t,x) \rightharpoonup \alpha \sum_{i=1}^{l} d_i \delta_{z_i(t)},$$

où

$$\dot{z}_i(t) = \beta \sum_{j \neq i} d_j \frac{(z_i - z_j)^\perp}{|z_i - z_j|^2}, \quad z_i(0) = z_i^0, \quad i = 1, \ldots, l,$$

avec $\beta = \frac{1}{2\pi}$ *pour* (E) *et* $\beta = 2$ *pour* (GP).

[B. Turckington], [C. Marchioro & M. Pulvirenti], [J. E. Colliander & R. L. Jerrard], [F. Bethuel, R. Jerrard & D. Smets]...

Objectif général...et plan de l'exposé

Supposons que

$$\omega_{tot}(t,x) \simeq \sum_{i=1}^{l} d_i \delta_{z_i(t)} + \omega(t,x),$$

où ω est régulière (au moins non atomique).

Objectif général...et plan de l'exposé

Supposons que

$$\omega_{tot}(t,x) \simeq \sum_{i=1}^{l} d_i \delta_{z_i(t)} + \omega(t,x),$$

où ω est régulière (au moins non atomique).

Nous aborderons les questions suivantes :

1. Pour (E), étude du système limite pour les points vortex $z_i(t)$ et pour la partie régulière $\omega(t)$ en tant que tel.
2. Pour (C_ε), détermination du système limite pour les points vortex $z_i(t)$ lorsque $\omega = 0$, et étude de la convergence lorsque $\varepsilon \to 0$.

Plan de l'exposé

1. Interaction tourbillon borné et points vortex dans les équations d'Euler en dimension deux

2. Une équation de Ginzburg-Landau complexe

Les équations d'Euler en formulation tourbillon

- **[Yudovich]**. Existence et unicité globales de solutions faibles $\omega \in L^\infty(\mathbb{R}, L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2))$ à $\partial_t \omega + v \cdot \nabla \omega = 0$.

Les équations d'Euler en formulation tourbillon

- **[Yudovich].** Existence et unicité globales de solutions faibles $\omega \in L^\infty(\mathbb{R}, L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2))$ à $\partial_t \omega + v \cdot \nabla \omega = 0$.
- **Formule de Biot-Savart**. Grâce à $\operatorname{div} v = 0$ et $\operatorname{rot} v = \omega$,

$$v = K * \omega, \quad \text{où} \quad K(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{x^\perp}{|x|^2}.$$

Les équations d'Euler en formulation tourbillon

- **[Yudovich].** Existence et unicité globales de solutions faibles $\omega \in L^\infty(\mathbb{R}, L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2))$ à $\partial_t \omega + v \cdot \nabla \omega = 0$.
- **Formule de Biot-Savart**. Grâce à $\operatorname{div} v = 0$ et $\operatorname{rot} v = \omega$,

$$v = K * \omega, \quad \text{où} \quad K(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{x^\perp}{|x|^2}.$$

- **Régularité pour la vitesse** (estimations de potentiel).

$$\omega \in L^\infty(L^1 \cap L^\infty) \Rightarrow v \in L^\infty \cap L^\infty(QL)$$

$$\text{(i.e.} \quad \sup_t |v(t,x) - v(t,y)| \leq C|x-y|(1 + |\ln|x-y||), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2).$$

Les équations d'Euler en formulation tourbillon

- **[Yudovich].** Existence et unicité globales de solutions faibles $\omega \in L^\infty(\mathbb{R}, L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2))$ à $\partial_t \omega + v \cdot \nabla \omega = 0$.
- **Formule de Biot-Savart.** Grâce à div $v = 0$ et rot $v = \omega$,

$$v = K * \omega, \quad \text{où} \quad K(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{x^\perp}{|x|^2}.$$

- **Régularité pour la vitesse** (estimations de potentiel).

$$\omega \in L^\infty(L^1 \cap L^\infty) \Rightarrow v \in L^\infty \cap L^\infty(QL).$$

- **Méthode des caractéristiques** (équation de transport).

$$\omega(t, \phi_t(x)) \equiv \omega(0, x), \quad \text{où} \quad \frac{d}{dt}\phi_t(x) = v(t, \phi_t(x)), \quad \phi_0(x) = x.$$

Le système mixte Euler-points vortex

- Soient $\omega \in L^\infty(L^1 \cap L^\infty)$, $d_i \in \mathbb{R}$, $z_i \in \mathbb{R}^2$ et supposons que

$$\omega_{tot} = \sum_i d_i \delta_{z_i} + \omega \rightsquigarrow v_{tot} = \sum_i d_i \frac{(x - z_i)^\perp}{|x - z_i|^2} + K * \omega.$$

Le système mixte Euler-points vortex

- Soient $\omega \in L^\infty(L^1 \cap L^\infty)$, $d_i \in \mathbb{R}$, $z_i \in \mathbb{R}^2$ et supposons que

$$\omega_{tot} = \sum_i d_i \delta_{z_i} + \omega \rightsquigarrow v_{tot} = \sum_i d_i \frac{(x - z_i)^\perp}{|x - z_i|^2} + K * \omega.$$

- **[C. Marchioro & M. Pulvirenti]**. Découplage de l'équation pour ω_{tot} :

$$\begin{cases} \dot{z}_i = K * \omega(t, z_i) + \sum_{j \neq i} d_j K\,(z_i - z_j) \\ \partial_t \omega + (K * \omega_{tot}) \cdot \nabla \omega = 0. \end{cases} \tag{EDP}$$

Le système mixte Euler-points vortex

- Soient $\omega \in L^\infty(L^1 \cap L^\infty)$, $d_i \in \mathbb{R}$, $z_i \in \mathbb{R}^2$ et supposons que

$$\omega_{tot} = \sum_i d_i \delta_{z_i} + \omega \rightsquigarrow v_{tot} = \sum_i d_i \frac{(x - z_i)^\perp}{|x - z_i|^2} + K * \omega.$$

- **[C. Marchioro & M. Pulvirenti]**. Découplage de l'équation pour ω_{tot} :

$$\begin{cases} \dot{z}_i = K * \omega(t, z_i) + \sum_{j \neq i} d_j K\left(z_i - z_j\right) \\ \partial_t \omega + (K * \omega_{tot}) \cdot \nabla \omega = 0. \end{cases} \tag{EDP}$$

- Ou, en termes de caractéristiques,

$$\begin{cases} \dot{\phi}_t(x) = K * \omega(t, \phi_t(x)) + \sum_i d_i K(\phi_t(x) - z_i(t)) \\ \omega(t, \phi_t(x)) = \omega(0, x). \end{cases} \tag{EDO}$$

Le système mixte Euler-points vortex

- Soient $\omega \in L^\infty(L^1 \cap L^\infty)$, $d_i \in \mathbb{R}$, $z_i \in \mathbb{R}^2$ et supposons que

$$\omega_{tot} = \sum_i d_i \delta_{z_i} + \omega \rightsquigarrow v_{tot} = \sum_i d_i \frac{(x - z_i)^\perp}{|x - z_i|^2} + K * \omega.$$

- **[C. Marchioro & M. Pulvirenti]**. Découplage de l'équation pour ω_{tot} :

$$\begin{cases} \dot{z}_i = K * \omega(t, z_i) + \sum_{j \neq i} d_j K\left(z_i - z_j\right) \\ \partial_t \omega + (K * \omega_{tot}) \cdot \nabla \omega = 0. \end{cases} \qquad \text{(EDP)}$$

- Ou, en termes de caractéristiques,

$$\begin{cases} \dot{\phi}_t(x) = K * \omega(t, \phi_t(x)) + \sum_i d_i K(\phi_t(x) - z_i(t)) \\ \omega(t, \phi_t(x)) = \omega(0, x). \end{cases} \qquad \text{(EDO)}$$

- Existence globale avec $\phi(\cdot, x) \in C^1$, $z_i \in C^1$ lorsque tous les $d_i > 0$.

Lien entre les formulations (EDP) et (EDO)

Un seul point vortex $z(t)$ de masse $d = 1$. On pose $v = K * \omega$.

(1) (EDO) $\Rightarrow$ (EDP).

Proposition (C. Lacave & E. M.)

Si (ω, z, ϕ) *est solution de (EDO), alors* $\int \omega\varphi \in C^1(\mathbb{R}_+)$, $\forall \varphi \in C_c^1$, *et*

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^2} \omega\varphi = \int_{\mathbb{R}^2} \omega(\partial_t\varphi + (v + K(x-z)) \cdot \nabla\varphi)\, dx.$$

Lien entre les formulations (EDP) et (EDO)

Un seul point vortex $z(t)$ de masse $d = 1$. On pose $v = K * \omega$.

(1) (EDO) $\Rightarrow$ (EDP).

Proposition (C. Lacave & E. M.)

Si (ω, z, ϕ) est solution de (EDO), alors $\int \omega\varphi \in C^1(\mathbb{R}_+)$, $\forall \varphi \in C_c^1$, et

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^2} \omega\varphi = \int_{\mathbb{R}^2} \omega(\partial_t\varphi + (v + K(x-z)) \cdot \nabla\varphi)\, dx.$$

(2) (EDP) $\Rightarrow$ (EDO).

Lien entre les formulations (EDP) et (EDO)

Un seul point vortex $z(t)$ de masse $d = 1$. On pose $v = K * \omega$.

(1) (EDO) $\Rightarrow$ (EDP).

Proposition (C. Lacave & E. M.)

Si (ω, z, ϕ) est solution de (EDO), alors $\int \omega\varphi \in C^1(\mathbb{R}_+)$, $\forall \varphi \in C^1_c$, et

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^2} \omega\varphi = \int_{\mathbb{R}^2} \omega(\partial_t\varphi + (v + K(x-z))\cdot\nabla\varphi)\,dx.$$

(2) (EDP) $\Rightarrow$ (EDO).

- Soit $\omega \in L^\infty(L^1 \cap L^\infty)$ une solution eulérienne.
  Régularité de $v = K * \omega \rightsquigarrow$ il existe un unique flot
  $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \setminus \{z_0\} \to \mathbb{R}^2$ associé à $v + K(\cdot - z)$.

Lien entre les formulations (EDP) et (EDO)

Un seul point vortex $z(t)$ de masse $d = 1$. On pose $v = K * \omega$.

(1) (EDO) $\Rightarrow$ (EDP).

Proposition (C. Lacave & E. M.)

Si (ω, z, ϕ) est solution de (EDO), alors $\int \omega\varphi \in C^1(\mathbb{R}_+)$, $\forall \varphi \in C^1_c$, et

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^2} \omega\varphi = \int_{\mathbb{R}^2} \omega\big(\partial_t\varphi + (v + K(x-z))\cdot\nabla\varphi\big)\,dx.$$

(2) (EDP) $\Rightarrow$ (EDO).

- Soit $\omega \in L^\infty(L^1 \cap L^\infty)$ une solution eulérienne.
  Régularité de $v = K * \omega \rightsquigarrow$ il existe un unique flot $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \setminus \{z_0\} \to \mathbb{R}^2$ associé à $v + K(\cdot - z)$.
- Mais rien n'assure a priori que $\omega(t) = \omega_0 \circ \phi_t^{-1}$.

- Il suffit de montrer que l'équation de transport linéaire

$$\partial_t \mu + u \cdot \nabla \mu = 0, \quad u = v + K(\cdot - z),\ \mu \in L^\infty(L^1 \cap L^\infty), \qquad \text{(TL)}$$

  a une unique solution qui est alors nécessairement $\omega_0 \circ \phi_t^{-1}$.
- L'unicité a lieu dès que u a la propriété de renormalisation, i.e.
  μ est solution de (TL) $\Rightarrow \beta(\mu)$ est solution de (TL), $\quad \forall \beta \in C^1(\mathbb{R})$.

- Il suffit de montrer que l'équation de transport linéaire

$$\partial_t \mu + u \cdot \nabla \mu = 0, \quad u = v + K(\cdot - z),\ \mu \in L^\infty(L^1 \cap L^\infty), \qquad \text{(TL)}$$

  a une unique solution qui est alors nécessairement $\omega_0 \circ \phi_t^{-1}$.
- L'unicité a lieu dès que u a la propriété de renormalisation, i.e.

  μ est solution de (TL) $\Rightarrow \beta(\mu)$ est solution de (TL), $\quad \forall \beta \in C^1(\mathbb{R})$.

Théorème (R. J. DiPerna & P. L. Lions, sans point vortex)

Tout $u \in L^\infty(W^{1,1}_{\mathrm{loc}})$ à divergence nulle a la propriété de renormalisation.

- Il suffit de montrer que l'équation de transport linéaire

$$\partial_t \mu + u \cdot \nabla \mu = 0, \quad u = v + K(\cdot - z),\ \mu \in L^\infty(L^1 \cap L^\infty), \qquad \text{(TL)}$$

a une unique solution qui est alors nécessairement $\omega_0 \circ \phi_t^{-1}$.

- L'unicité a lieu dès que u a la propriété de renormalisation, i.e.

$$\mu \ \text{ est solution de (TL)} \Rightarrow \beta(\mu) \ \text{ est solution de (TL)}, \quad \forall \beta \in C^1(\mathbb{R}).$$

Théorème (R. J. DiPerna & P. L. Lions, sans point vortex)

Tout $u \in L^\infty(W^{1,1}_{\mathrm{loc}})$ à divergence nulle a la propriété de renormalisation.

- Dans le cadre du système mixte,

$$u = \underbrace{K * \omega}_{L^\infty(W^{1,1}_{\mathrm{loc}})} + \underbrace{K(\cdot - z).}_{\substack{\text{régulier en dehors de } \{z\}, \\ \text{forme explicite}}}$$

- Il suffit de montrer que l'équation de transport linéaire

$$\partial_t \mu + u \cdot \nabla \mu = 0, \quad u = v + K(\cdot - z),\ \mu \in L^\infty(L^1 \cap L^\infty), \quad \text{(TL)}$$

a une unique solution qui est alors nécessairement $\omega_0 \circ \phi_t^{-1}$.

- L'unicité a lieu dès que u a la propriété de renormalisation, i.e.

$$\mu \ \text{ est solution de (TL)} \Rightarrow \beta(\mu) \ \text{ est solution de (TL)}, \quad \forall \beta \in C^1(\mathbb{R}).$$

Théorème (R. J. DiPerna & P. L. Lions, sans point vortex)

Tout $u \in L^\infty(W^{1,1}_{\mathrm{loc}})$ à divergence nulle a la propriété de renormalisation.

- Dans le cadre du système mixte,

$$u = \underbrace{K * \omega}_{L^\infty(W^{1,1}_{\mathrm{loc}})} + \underbrace{K(\cdot - z).}_{\substack{\text{régulier en dehors de } \{z\}, \\ \text{forme explicite}}}$$

Théorème (C. Lacave & E. M. , avec point vortex)

$v + K(\cdot - z)$ a la propriété de renormalisation. Donc, si ω est solution eulérienne, on a $\omega(t) = \omega_0 \circ \phi_t^{-1}$.

Unicité pour le système mixte Euler-points vortex

Le cas général est un problème ouvert.

Unicité pour le système mixte Euler-points vortex

Le cas général est un problème ouvert.

- **Avec un seul point vortex $z(t)$.**

  Une observation fondamentale de **[C. Marchioro & M. Pulvirenti]**.

  $\omega_0 \equiv \alpha$ dans $B(z(0), R_0) \Rightarrow \omega(t) \equiv \alpha$ dans $B(z(t), R(t)) \quad \forall t \geq 0.$

  L'unicité découlera alors du fait que

$$K(\cdot - z) \cdot \nabla \omega = \underbrace{K_\varepsilon(\cdot - z)}_{\text{troncature régulière}} \cdot \nabla \omega.$$

Unicité pour le système mixte Euler-points vortex

Le cas général est un problème ouvert.

- **Avec un seul point vortex $z(t)$.**

  Une observation fondamentale de **[C. Marchioro & M. Pulvirenti]**.

  $$\omega_0 \equiv \alpha \text{ dans } B(z(0), R_0) \Rightarrow \omega(t) \equiv \alpha \text{ dans } B(z(t), R(t)) \quad \forall t \geq 0.$$

  L'unicité découlera alors du fait que

  $$K(\cdot - z) \cdot \nabla\omega = \underbrace{K_\varepsilon(\cdot - z)}_{\text{troncature régulière}} \cdot \nabla\omega.$$

- **Avec plusieurs points vortex.**

Théorème (C. Lacave & E. M.)

Si $\omega \in L^\infty$ est initialement à support compact et constant près de chaque point vortex, il existe une unique solution au système mixte avec cette donnée initiale.

Évolution de la taille du support du tourbillon

$(H) \quad \omega_{tot} = \omega + d\delta_z, \quad \omega \in L^\infty(L^1 \cap L^\infty),$ supp ω_0 compact.

Évolution de la taille du support du tourbillon

$(H)\quad \omega_{tot} = \omega + d\delta_z, \quad \omega \in L^\infty(L^1 \cap L^\infty),$ supp ω_0 compact.

Cadre classique où $d = 0$.

- Vitesse des trajectoires bornée $\rightsquigarrow$ taille de supp $\omega(t)$ est au plus $\mathcal{O}(t)$.
- **[C. Marchioro], [P. Gamblin, D. Iftimie & T. Sideris]**. Si de plus $\omega_0 \geq 0$, on a la borne $\mathcal{O}((t \ln t)^{1/4})$: grâce à la conservation du centre d'inertie et moment angulaire

$$\int x\omega(t,x)\,dx, \quad \int |x|^2\omega(t,x)\,dx.$$

Évolution de la taille du support du tourbillon

$(H) \quad \omega_{tot} = \omega + d\delta_z, \quad \omega \in L^\infty(L^1 \cap L^\infty),$ supp ω_0 compact.

Cadre classique où $d = 0$.

- Vitesse des trajectoires bornée $\rightsquigarrow$ taille de supp $\omega(t)$ est au plus $\mathcal{O}(t)$.
- **[C. Marchioro], [P. Gamblin, D. Iftimie & T. Sideris]**. Si de plus $\omega_0 \geq 0$, on a la borne $\mathcal{O}((t \ln t)^{1/4})$: grâce à la conservation du centre d'inertie et moment angulaire

$$\int x\omega(t,x)\,dx, \quad \int |x|^2\omega(t,x)\,dx.$$

Cas où $d \neq 0$ **et** $\omega_0 \geq 0$ **vérifient** $(i)\; d \geq 0$

Évolution de la taille du support du tourbillon

$(H)\quad \omega_{tot} = \omega + d\delta_z,\quad \omega \in L^\infty(L^1 \cap L^\infty),$ supp ω_0 compact.

Cadre classique où $d = 0$.

- Vitesse des trajectoires bornée $\rightsquigarrow$ taille de supp $\omega(t)$ est au plus $\mathcal{O}(t)$.
- **[C. Marchioro], [P. Gamblin, D. Iftimie** & **T. Sideris]**. Si de plus $\omega_0 \geq 0$, on a la borne $\mathcal{O}((t \ln t)^{1/4})$: grâce à la conservation du centre d'inertie et moment angulaire

$$\int x\omega(t,x)\,dx, \quad \int |x|^2\omega(t,x)\,dx.$$

Cas où $d \neq 0$ **et** $\omega_0 \geq 0$ **vérifient** $(i)\, d \geq 0$ **ou** $(ii)\, d < 0$ et $|d| > \int \omega_0$.

Évolution de la taille du support du tourbillon

$(H) \quad \omega_{tot} = \omega + d\delta_z, \quad \omega \in L^\infty(L^1 \cap L^\infty),$ supp ω_0 compact.

Cadre classique où $d = 0$.

- Vitesse des trajectoires bornée $\rightsquigarrow$ taille de supp $\omega(t)$ est au plus $\mathcal{O}(t)$.
- **[C. Marchioro], [P. Gamblin, D. Iftimie** & **T. Sideris]**. Si de plus $\omega_0 \geq 0$, on a la borne $\mathcal{O}((t \ln t)^{1/4})$: grâce à la conservation du centre d'inertie et moment angulaire

$$\int x\omega(t,x)\,dx, \quad \int |x|^2\omega(t,x)\,dx.$$

Cas où $d \neq 0$ **et** $\omega_0 \geq 0$ **vérifient** $(i)\, d \geq 0$ **ou** $(ii)\, d < 0$ et $|d| > \int \omega_0$.

Théorème (E. M.)

- *La trajectoire de* $z(t)$ *est bornée.*
- *La taille de supp* $\omega(t)$ *est contrôlée par* $\mathcal{O}(t^{1/4} \ln \ln t)$.

Nappe de tourbillon et point vortex

$$\omega_{tot}(t) = \omega(t) + d\delta_{z(t)}, \quad \omega(t) \in L^1 \cap \cancel{L^\infty}?$$

On ne peut définir la trajectoire $z(t)$ que si $\omega \in L^\infty(L^1 \cap L^p)$ avec $p > 2$.
En deça de cette régularité il faut revenir à l'équation pour ω_{tot}.

Nappe de tourbillon et point vortex

$$\omega_{tot}(t) = \omega(t) + d\delta_{z(t)}, \quad \omega(t) \in L^1 \cap \cancel{L^\infty}?$$

On ne peut définir la trajectoire $z(t)$ que si $\omega \in L^\infty(L^1 \cap L^p)$ avec $p > 2$.
En deça de cette régularité il faut revenir à l'équation pour ω_{tot}.

Formulation généralisée des équations d'Euler ([J. M. Delort], [S. Schochet], [R. J. DiPerna & A. Majda], [F. Poupaud]...)

On pose

$$\int v\cdot\nabla\varphi\omega_{tot}(x)\,dx = \frac{1}{2}\iint (\nabla\varphi(x)-\nabla\varphi(y))\cdot\widehat{K}(x-y)\omega_{tot}(x)\omega_{tot}(y)\,dx\,dy,$$

où $\widehat{K}(x) = \chi_{x\neq 0}K(x)$, quantité finie dès que $\omega_{tot} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ et consistante avec la formule de Biot-Savart.

- **[J. M. Delort]** Existence globale pour $\omega_{tot} \in H^{-1}(\mathbb{R}^2) \cap \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$, à support compact et positive.

- **[J. M. Delort]** Existence globale pour $\omega_{tot} \in H^{-1}(\mathbb{R}^2) \cap \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$, à support compact et positive.
- **[F. Poupaud]** Existence globale d'une solution généralisée pour $\omega_{tot} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ positive. Fait apparaître une mesure de défaut concentrée sur le support atomique de ω_{tot}.

- **[J. M. Delort]** Existence globale pour $\omega_{tot} \in H^{-1}(\mathbb{R}^2) \cap \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$, à support compact et positive.
- **[F. Poupaud]** Existence globale d'une solution généralisée pour $\omega_{tot} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ positive. Fait apparaître une mesure de défaut concentrée sur le support atomique de ω_{tot}.

Théorème (E. M.)

Soient $\omega_0 \geq 0$ appartenant à $H_c^{-1} \cap \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$, $d \geq 0$ et $z_0 \in \mathbb{R}^2$ n'appartenant pas au support de ω_0. Il existe une solution globale $\omega_{tot} = \omega + d\delta_z$ aux équations d'Euler généralisées, sans mesure de défaut, avec $\omega \in L^\infty(H^{-1})$ et $z \in C^{1/2}$, telle que $\omega_{tot}(0) = \omega_0 + d\delta_{z_0}$.

Remarque

On ne sait pas si supp $(\omega) \cap \{z(t)\} = \emptyset$ à $t > 0$.

Plan de l'exposé

1. Interaction vorticité et points vortex dans les équations d'Euler en dimension deux
2. Une équation de Ginzburg-Landau complexe

Énergie de Ginzburg-Landau ($N \geq 2$)

$$\kappa\partial_t u + i\partial_t u = \Delta u + \frac{1}{\varepsilon^2}u(1-|u|^2), \quad u : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}.$$

Gross-Pitaevskii	**Ginzburg-Landau Parabolique**
$i\partial_t u = \Delta u + \frac{1}{\varepsilon^2}u(1-|u|^2) \quad \text{(GP)}$	$\kappa\partial_t u = \Delta u + \frac{1}{\varepsilon^2}u(1-|u|^2) \quad \text{(P)}.$

Énergie de Ginzburg-Landau ($N \geq 2$)

$$\kappa\partial_t u + i\partial_t u = \Delta u + \frac{1}{\varepsilon^2}u(1-|u|^2), \quad u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}.$$

Gross-Pitaevskii

$$i\partial_t u = \Delta u + \frac{1}{\varepsilon^2}u(1-|u|^2) \quad \text{(GP)}$$

Ginzburg-Landau Parabolique

$$\kappa\partial_t u = \Delta u + \frac{1}{\varepsilon^2}u(1-|u|^2) \quad \text{(P)}.$$

Énergie de Ginzburg-Landau

$$E_\varepsilon(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{|\nabla u|^2}{2} + \frac{(1-|u|^2)^2}{4\varepsilon^2}\right] dx = \int_{\mathbb{R}^N} e_\varepsilon(u)\, dx.$$

$$\frac{d}{dt}E_\varepsilon(u(t)) = 0$$

$$\frac{d}{dt}E_\varepsilon(u(t)) = -\kappa \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_t u|^2 \leq 0.$$

Problème de Cauchy dans l'espace d'énergie finie $\mathcal{E}$

- **Petites dimensions** $2 \leq N \leq 4$. **[P. Gérard]** pour (GP).

$$\mathcal{E} \subset X^1(\mathbb{R}^N) + H^1(\mathbb{R}^N), \quad X^1 = \{u \in L^\infty \text{ t.q. } \nabla u \in L^2\}.$$

$\rightsquigarrow$ Distance sur $\mathcal{E}$, problème de Cauchy globalement bien posé (pour petites données si $N = 4$).

Problème de Cauchy dans l'espace d'énergie finie $\mathcal{E}$

- **Petites dimensions** $2 \leq N \leq 4$**. [P. Gérard]** pour (GP).

$$\mathcal{E} \subset X^1(\mathbb{R}^N) + H^1(\mathbb{R}^N), \quad X^1 = \{u \in L^\infty \text{ t.q. } \nabla u \in L^2\}.$$

  $\rightsquigarrow$ Distance sur $\mathcal{E}$, problème de Cauchy globalement bien posé (pour petites données si $N = 4$).

- **Dimension** N **quelconque. [J. Ginibre & G. Velo]**.
  Pour équations de Ginzburg-Landau complexes générales (non variationnelles), existence globale d'une solution dans $C(\mathbb{R}_+, H^1_{\mathrm{loc}} \cap L^4_{\mathrm{loc}})$. Pas d'unicité.

Problème de Cauchy dans l'espace d'énergie finie $\mathcal{E}$

- **Petites dimensions** $2 \leq N \leq 4$. **[P. Gérard]** pour (GP).

$$\mathcal{E} \subset X^1(\mathbb{R}^N) + H^1(\mathbb{R}^N), \quad X^1 = \{u \in L^\infty \text{ t.q. } \nabla u \in L^2\}.$$

$\rightsquigarrow$ Distance sur $\mathcal{E}$, problème de Cauchy globalement bien posé (pour petites données si $N = 4$).

- **Dimension** N **quelconque. [J. Ginibre & G. Velo]**.
  Pour équations de Ginzburg-Landau complexes générales (non variationnelles), existence globale d'une solution dans $C(\mathbb{R}_+, H^1_{\mathrm{loc}} \cap L^4_{\mathrm{loc}})$. Pas d'unicité.

Théorème (E. M.)

Soient $N \geq 1$ et $u_0 \in \mathcal{E}$. Il existe une solution $u \in C(\mathbb{R}_+, H^1_{\mathrm{loc}})$ à (C_ε), dont l'énergie est finie et décroissante, telle que $u(0) = u_0$.

Convergence de (C_ε) - Dynamique des points vortex en dimension deux

- Rappel sur les superpositions de vortex $(z_i, d_i), i = 1, \dots, l$

$$u_\varepsilon^*(z_i, d_i)(z) := \prod_{i=1}^{l} \rho_{d_i}\left(\frac{|z - z_i|}{\varepsilon}\right)\left(\frac{z - z_i}{|z - z_i|}\right)^{d_i} \to \prod_{i=1}^{l}\left(\frac{z - z_i}{|z - z_i|}\right)^{d_i},$$

où

$$\rho_{d_i} : \mathbb{R}_+ \to [0,1), \quad \rho_{d_i}(0) = 0, \quad \rho_{d_i}(+\infty) = 1.$$

- La vorticité vérifie

$$\omega(u_\varepsilon^*(z_i, d_i)) \rightharpoonup \pi \sum_{i=1}^{l} d_i \delta_{z_i}.$$

$$E_\varepsilon\big(u_\varepsilon^*(z_i,d_i),B_R\big)=\pi\sum_{i=1}^{l}d_i^2|\ln\varepsilon|+W(z_i,d_i)+\pi d^2\ln R+C_{d_i,N}+o_\varepsilon(1),$$

où $d=\sum d_i$ et

$$W=W(z_i,d_i)=-\pi\sum_{k\neq l}d_k d_l\ln|z_k-z_l|,$$

est « essentiellement » minimisante si $d_i=\pm1$.

$$E_\varepsilon\left(u_\varepsilon^*(z_i,d_i),B_R\right)=\pi\sum_{i=1}^{l}d_i^2|\ln\varepsilon|+W(z_i,d_i)+\pi d^2\ln R+C_{d_i,N}+o_\varepsilon(1),$$

où $d=\sum d_i$ et

$$W=W(z_i,d_i)=-\pi\sum_{k\neq l}d_kd_l\ln|z_k-z_l|,$$

est « essentiellement » minimisante si $d_i=\pm1$.

Définition (données très bien préparées)

Lorsque $d_i=\pm1$, on dit que la famille $(u_\varepsilon)\in H^1_{\mathrm{loc}}$ est très bien préparée par rapport à (z_i,d_i) si

$$\textit{(i)}\ \omega(u_\varepsilon)\rightharpoonup\pi\sum_i d_i\delta_{z_i},\quad \textit{(ii)}\ E_\varepsilon(u_\varepsilon)-E_\varepsilon(u_\varepsilon^*(z_i,d_i))=o_\varepsilon(1).$$

$$E_\varepsilon\big(u_\varepsilon^*(z_i,d_i),B_R\big)=\pi\sum_{i=1}^{l}d_i^2|\ln\varepsilon|+W(z_i,d_i)+\pi d^2\ln R+C_{d_i,N}+o_\varepsilon(1),$$

où $d=\sum d_i$ et

$$W=W(z_i,d_i)=-\pi\sum_{k\neq l}d_kd_l\ln|z_k-z_l|,$$

est « essentiellement » minimisante si $d_i=\pm1$.

Définition (données très bien préparées)

Lorsque $d_i=\pm1$, on dit que la famille $(u_\varepsilon)\in H^1_{\mathrm{loc}}$ est très bien préparée par rapport à (z_i,d_i) si

$$(i)\ \omega(u_\varepsilon)\rightharpoonup\pi\sum_i d_i\delta_{z_i},\quad (ii)\ E_\varepsilon(u_\varepsilon)-E_\varepsilon(u_\varepsilon^*(z_i,d_i))=o_\varepsilon(1).$$

$$(i)\&(ii)\Rightarrow\frac{e_\varepsilon(u_\varepsilon)}{|\ln\varepsilon|}\rightharpoonup\pi\sum_i\delta_{z_i}.$$

Dynamique des points vortex

On pose $\kappa = \kappa_\varepsilon = \alpha |\ln \varepsilon|^{-1}$, où $\alpha > 0$.

Théorème (**E. M.** dans $\mathbb{R}^2$)

Si $u_\varepsilon(0)$ est très bien préparée par rapport à (z_i^0, d_i), la solution $u_\varepsilon(t)$ de l'équation de Ginzburg-Landau complexe est très bien préparée par rapport à $(z_i(t), d_i)$, où

$$\begin{cases} \pi(1+\alpha^2) d_i \dot{z}_i(t) = \nabla^\perp{}_{z_i} W - \alpha d_i \nabla_{z_i} W, \\ z_i(0) = z_i^0, \end{cases}$$

et

$$W(z_i, d_i) = -\pi \sum_{k \neq l} d_k d_l \ln |z_k - z_l|.$$

La convergence a lieu tant que la solution à ce système existe.

[M. Kurzke, C. Melcher, R. Moser & D. Spirn] dans les domaines bornés

Lien avec les équations purement hamiltonienne et dissipative

- Dynamique pour l'équation de Gross-Pitaevskii ($\alpha = 0$)
  [J. C. Colliander & R. L. Jerrard], [F. H. Lin & J. X. Xin], [F. Bethuel, R. L. Jerrard & D. Smets]

$$\begin{cases} \pi d_i \dot{z}_i(t) = \nabla_{z_i}^{\perp} W, \\ z_i(0) = z_i^0. \end{cases}$$

- Dynamique pour l'équation parabolique
  [R. L. Jerrard & M. Soner], [F. Bethuel, G. Orlandi & D. Smets], [S. Serfaty]

$$\begin{cases} \pi \alpha^2 d_i \dot{z}_i(t) = -\alpha d_i \nabla_{z_i} W, \\ z_i(0) = z_i^0. \end{cases}$$

Améliorations : données plus générales & convergence au delà des temps de collision...uniquement pour le cas purement dissipatif.

Idée de preuve : une formule d'évolution pour deux quantités distinctes

- Soit

$$f = \Delta u + \frac{1}{\varepsilon^2} u(1 - |u|^2), \quad \partial_t u = \beta_\varepsilon f, \quad \beta_\varepsilon = (\kappa_\varepsilon + i)^{-1}.$$

Alors

- $\partial_t e_\varepsilon(u_\varepsilon) = -\partial_t u_\varepsilon \cdot f + \mathrm{div}(\beta_\varepsilon f, \nabla u_\varepsilon)$
- $\partial_t \omega(u_\varepsilon) = \mathrm{rot}(i\beta_\varepsilon f, \nabla u_\varepsilon)$.

Idée de preuve : une formule d'évolution pour deux quantités distinctes

- Soit

$$f = \Delta u + \frac{1}{\varepsilon^2} u(1 - |u|^2), \quad \partial_t u = \beta_\varepsilon f, \quad \beta_\varepsilon = (\kappa_\varepsilon + i)^{-1}.$$

Alors

- $\partial_t e_\varepsilon(u_\varepsilon) = -\partial_t u_\varepsilon \cdot f + \mathrm{div}(\beta_\varepsilon f, \nabla u_\varepsilon)$
- $\partial_t \omega(u_\varepsilon) = \mathrm{rot}(i\beta_\varepsilon f, \nabla u_\varepsilon).$

- **Identité de Pohozaev** :

$$(f, \nabla u) = \mathrm{div}\,(\nabla u \otimes \nabla u) - \nabla e_\varepsilon(u), \quad \forall u.$$

Idée de preuve : une formule d'évolution pour deux quantités distinctes

- Soit

$$f = \Delta u + \frac{1}{\varepsilon^2} u(1 - |u|^2), \quad \partial_t u = \beta_\varepsilon f, \quad \beta_\varepsilon = (\kappa_\varepsilon + i)^{-1}.$$

Alors

- $\partial_t e_\varepsilon(u_\varepsilon) = -\partial_t u_\varepsilon \cdot f + \mathrm{div}(\beta_\varepsilon f, \nabla u_\varepsilon)$ (P)
- $\partial_t \omega(u_\varepsilon) = \mathrm{rot}(i\beta_\varepsilon f, \nabla u_\varepsilon).$ (GP)

- **Identité de Pohozaev** :

$$(f, \nabla u) = \mathrm{div}\,(\nabla u \otimes \nabla u) - \nabla e_\varepsilon(u), \quad \forall u.$$

Idée de preuve : une formule d'évolution pour deux quantités distinctes

- Soit

$$f = \Delta u + \frac{1}{\varepsilon^2} u(1 - |u|^2), \quad \partial_t u = \beta_\varepsilon f, \quad \beta_\varepsilon = (\kappa_\varepsilon + i)^{-1}.$$

Alors

  - $\partial_t e_\varepsilon(u_\varepsilon) = -\partial_t u_\varepsilon \cdot f + \operatorname{div}(\beta_\varepsilon f, \nabla u_\varepsilon)$
  - $\partial_t \omega(u_\varepsilon) = \operatorname{rot}(i\beta_\varepsilon f, \nabla u_\varepsilon)$.

- **Identité de Pohozaev** :

$$(f, \nabla u) = \operatorname{div}(\nabla u \otimes \nabla u) - \nabla e_\varepsilon(u), \quad \forall u.$$

- Si $\nabla \varphi = i \nabla \chi \quad \langle \operatorname{rot}(if, \nabla u), \chi \rangle = \langle \operatorname{div}(if, \nabla u), \varphi \rangle$.

Idée de preuve : une formule d'évolution pour deux quantités distinctes

- Soit

$$f = \Delta u + \frac{1}{\varepsilon^2} u(1 - |u|^2), \quad \partial_t u = \beta_\varepsilon f, \quad \beta_\varepsilon = (\kappa_\varepsilon + i)^{-1}.$$

Alors

- $\partial_t e_\varepsilon(u_\varepsilon) = -\partial_t u_\varepsilon \cdot f + \mathrm{div}(\beta_\varepsilon f, \nabla u_\varepsilon)$
- $\partial_t \omega(u_\varepsilon) = \mathrm{rot}(i\beta_\varepsilon f, \nabla u_\varepsilon)$.

- **Identité de Pohozaev** :

$$(f, \nabla u) = \mathrm{div}\,(\nabla u \otimes \nabla u) - \nabla e_\varepsilon(u), \quad \forall u.$$

- Si $\nabla \varphi = i \nabla \chi$ près de chaque $z_i(t)$,

$$\frac{d}{dt}(\langle \omega(u_\varepsilon), \chi \rangle + \kappa_\varepsilon \langle e_\varepsilon(u_\varepsilon), \varphi \rangle) = \langle \mathrm{rot}\,\mathrm{div}\,(\nabla u_\varepsilon \otimes \nabla u_\varepsilon), \chi \rangle + o_\varepsilon(1).$$

Idée de preuve : une formule d'évolution pour deux quantités distinctes

- Soit

$$f = \Delta u + \frac{1}{\varepsilon^2} u(1-|u|^2), \quad \partial_t u = \beta_\varepsilon f, \quad \beta_\varepsilon = (\kappa_\varepsilon + i)^{-1}.$$

  Alors

  - $\partial_t e_\varepsilon(u_\varepsilon) = -\partial_t u_\varepsilon \cdot f + \mathrm{div}(\beta_\varepsilon f, \nabla u_\varepsilon)$
  - $\partial_t \omega(u_\varepsilon) = \mathrm{rot}(i\beta_\varepsilon f, \nabla u_\varepsilon)$.

- **Identité de Pohozaev** :

$$(f, \nabla u) = \mathrm{div}\,(\nabla u \otimes \nabla u) - \nabla e_\varepsilon(u), \quad \forall u.$$

- Si $\nabla \varphi = i \nabla \chi$ près de chaque $z_i(t)$,

$$\frac{d}{dt}\big(\langle \omega(u_\varepsilon), \chi\rangle + \kappa_\varepsilon \langle e_\varepsilon(u_\varepsilon), \varphi\rangle\big) = \langle \mathrm{rot}\,\mathrm{div}\,(\nabla u_\varepsilon \otimes \nabla u_\varepsilon), \chi\rangle + o_\varepsilon(1).$$

- Formellement, $u_\varepsilon = u_\varepsilon^*(z_i(t), d_i)$ et χ affine près des $z_i(t)$ $\rightsquigarrow$ EDO.

Données moins bien préparées : des perspectives ?

Données initiales bien préparées :

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon(0)) = E_\varepsilon(u_\varepsilon^*(z_i^0, d_i)) + \cancel{o_\varepsilon(1)}\mathcal{O}_\varepsilon(1).$$

Dans quelle mesure l'excès d'énergie se disperse-t-il et modifie-t-il le mouvement des vortex ?

- Pour l'équation parabolique, très rapide dissipation de l'énergie, donc pas d'interaction (**[S. Serfaty]**,**[F. Bethuel, G. Orlandi** & **D. Smets]**).
- Pour les équations de Gross-Pitaevskii et (C_ε), problème ouvert.

Un exemple : $u_\varepsilon = u_\varepsilon^*(z_i, d_i)\exp(i\varphi)$, alors

$$\omega(u_\varepsilon) \simeq \pi \sum_i d_i \delta_{z_i} + \frac{1}{2}\mathrm{rot}\,(|u_\varepsilon^*|^2 \nabla\varphi),$$

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon) = E_\varepsilon(u_\varepsilon^*(z_i, d_i)) + \mathcal{O}_\varepsilon\left(\|\nabla\varphi\|_{L^2}^2\right).$$

Dynamique pour $\nabla\varphi$?

Dynamique des ondes amorties pour (C_ε) $(N \geq 2)$

Régime sans vortex : $u_\varepsilon = \rho_\varepsilon \exp(i\varphi_\varepsilon) \neq 0$ dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$,

$$\text{où} \quad \begin{cases} \rho_\varepsilon^2(t,x) = 1 + \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}} b_\varepsilon(t,x) \\ -2\nabla\varphi_\varepsilon(t,x) = v_\varepsilon(t,x). \end{cases}$$

Dynamique des ondes amorties pour (C_ε) $(N \geq 2)$

Régime sans vortex : $u_\varepsilon = \rho_\varepsilon \exp(i\varphi_\varepsilon) \neq 0$ dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$,

$$\text{où} \quad \begin{cases} \rho_\varepsilon^2(t,x) = 1 + \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}} b_\varepsilon(t,x) \\ -2\nabla\varphi_\varepsilon(t,x) = v_\varepsilon(t,x). \end{cases}$$

- $(b_\varepsilon, v_\varepsilon) \in C(H^{s+1} \times H^s(\mathbb{R}^N))$, $s > N/2$, « pas trop grande »,
- $\kappa = \kappa_\varepsilon \to 0, \quad 0 < \varepsilon \leq \kappa_\varepsilon < 1.$
- Énergie $E_\varepsilon(u_\varepsilon) \simeq C\Big(\|b_\varepsilon\|_{L^2}^2 + \varepsilon^2\|\nabla b_\varepsilon\|_{L^2}^2 + \|v_\varepsilon\|_{L^2}^2\Big)$.

Dynamique des ondes amorties pour (C_ε) ($N \geq 2$)

Régime sans vortex : $u_\varepsilon = \rho_\varepsilon \exp(i\varphi_\varepsilon) \neq 0$ dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$,

$$\text{où} \quad \begin{cases} \rho_\varepsilon^2(t,x) = 1 + \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}} b_\varepsilon(t,x) \\ -2\nabla\varphi_\varepsilon(t,x) = v_\varepsilon(t,x). \end{cases}$$

- $(b_\varepsilon, v_\varepsilon) \in C(H^{s+1} \times H^s(\mathbb{R}^N))$, $s > N/2$, « pas trop grande »,
- $\kappa = \kappa_\varepsilon \to 0, \quad 0 < \varepsilon \leq \kappa_\varepsilon < 1.$
- Énergie $E_\varepsilon(u_\varepsilon) \simeq C\Big(\|b_\varepsilon\|_{L^2}^2 + \varepsilon^2 \|\nabla b_\varepsilon\|_{L^2}^2 + \|v_\varepsilon\|_{L^2}^2\Big).$

Comportement (et dissipation) de $(b_\varepsilon, v_\varepsilon)$ **?**

Dynamique des ondes amorties pour (C_ε) $(N \geq 2)$

Régime sans vortex : $u_\varepsilon = \rho_\varepsilon \exp(i\varphi_\varepsilon) \neq 0$ dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$,

$$\text{où} \quad \begin{cases} \rho_\varepsilon^2(t,x) = 1 + \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}} b_\varepsilon(t,x) \\ -2\nabla\varphi_\varepsilon(t,x) = v_\varepsilon(t,x). \end{cases}$$

- $(b_\varepsilon, v_\varepsilon) \in C(H^{s+1} \times H^s(\mathbb{R}^N))$, $s > N/2$, « pas trop grande »,
- $\kappa = \kappa_\varepsilon \to 0, \quad 0 < \varepsilon \leq \kappa_\varepsilon < 1.$
- Énergie $E_\varepsilon(u_\varepsilon) \simeq C\Big(\|b_\varepsilon\|_{L^2}^2 + \varepsilon^2\|\nabla b_\varepsilon\|_{L^2}^2 + \|v_\varepsilon\|_{L^2}^2\Big)$.

Comportement (et dissipation) de $(b_\varepsilon, v_\varepsilon)$ **?**

$$\begin{cases} \partial_t b_\varepsilon + \dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon} \operatorname{div} v_\varepsilon + \dfrac{2\kappa_\varepsilon}{\varepsilon^2} b_\varepsilon - \kappa_\varepsilon \Delta b_\varepsilon = f_\varepsilon(b_\varepsilon, v_\varepsilon). \\ \partial_t v_\varepsilon + \dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon} \nabla b_\varepsilon - \kappa_\varepsilon \Delta v_\varepsilon = g_\varepsilon(b_\varepsilon, v_\varepsilon). \end{cases}$$

Dynamique des ondes amorties pour (C_ε) $(N \geq 2)$

Régime sans vortex : $u_\varepsilon = \rho_\varepsilon \exp(i\varphi_\varepsilon) \neq 0$ dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$,

$$\text{où} \quad \begin{cases} \rho_\varepsilon^2(t,x) = 1 + \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}} b_\varepsilon(t,x) \\ -2\nabla\varphi_\varepsilon(t,x) = v_\varepsilon(t,x). \end{cases}$$

- $(b_\varepsilon, v_\varepsilon) \in C(H^{s+1} \times H^s(\mathbb{R}^N))$, $s > N/2$, « pas trop grande »,
- $\kappa = \kappa_\varepsilon \to 0, \quad 0 < \varepsilon \leq \kappa_\varepsilon < 1.$
- Énergie $E_\varepsilon(u_\varepsilon) \simeq C\Big(\|b_\varepsilon\|_{L^2}^2 + \varepsilon^2 \|\nabla b_\varepsilon\|_{L^2}^2 + \|v_\varepsilon\|_{L^2}^2\Big)$.

Comportement (et dissipation) de $(b_\varepsilon, v_\varepsilon)$ **?**

$$(\mathrm{A}) - (\mathrm{AP}) \begin{cases} \partial_t b_\varepsilon + \dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon} \operatorname{div} v_\varepsilon + \dfrac{2\kappa_\varepsilon}{\varepsilon^2} b_\varepsilon - \kappa_\varepsilon \Delta b_\varepsilon = \cancel{f_\varepsilon(b_\varepsilon, v_\varepsilon)}\, 0. \\ \partial_t v_\varepsilon + \dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon} \nabla b_\varepsilon - \kappa_\varepsilon \Delta v_\varepsilon = \cancel{g_\varepsilon(b_\varepsilon, v_\varepsilon)}\, 0. \end{cases}$$

Théorème (E. M.)

Soit $s > 1 + N/2$. *Il existe* K_1, K_2 *et* $\varepsilon_0 > 0$ *tels que si* $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ *et*

$$X_0 := \|(b_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0)\|_{H^s} + \varepsilon\|b_\varepsilon^0\|_{H^{s+1}} + \|\varphi_\varepsilon^0\|_{L^2} \leq K_1^{-1}\min(\varepsilon^{-1}\kappa_\varepsilon, \kappa_\varepsilon^{-1}),$$

- *il existe un unique* $(b_\varepsilon, v_\varepsilon) \in C(\mathbb{R}_+, H^{s+1} \times H^s)$ *avec cette donnée initiale, et*

$$\|(b_\varepsilon(t), v_\varepsilon(t))\|_{H^s} \leq K_2 X_0 \quad \text{et} \quad \||u_\varepsilon(t)|^2 - 1\|_\infty \leq 1/2, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

- *Si* $(b_L, v_L) \in C(\mathbb{R}_+, H^{s+1} \times H^s)$ *est la solution de (A) (resp. (AP)) avec même donnée initiale,*

$$\|(b_\varepsilon - b_L, v_\varepsilon - v_L)(t)\|_{H^{s-2}} \leq K_2 t^{\frac{1}{2}}(\kappa_\varepsilon^{\frac{1}{2}} X_0^2 + \varepsilon\kappa_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} X_0),$$

$$\text{resp. } \|(b_\varepsilon - b_L, v_\varepsilon - v_L)(t)\|_{H^{s-2}} \leq K_2 \max(\kappa_\varepsilon, \varepsilon\kappa_\varepsilon^{-1})(X_0^2 + X_0).$$

[F. Bethuel, R. Danchin & D. Smets] pour l'équation de Gross-Pitaevskii

Esquisse de démonstration

Tant que u_ε ne s'annule pas, disons sur $[0, T_\varepsilon)$ maximal.

- Système augmenté pour les variables $(b_\varepsilon, z_\varepsilon)$, où

$$z_\varepsilon = v_\varepsilon - i\nabla \ln(\rho_\varepsilon^2) = \nabla(2\varphi_\varepsilon - i\ln(\rho_\varepsilon^2)) \in \mathbb{C}^N.$$

- Estimations d'énergie pour les semi-normes $\Gamma^k(b_\varepsilon, z_\varepsilon)$, $k = 0, \ldots, s$

$$\Gamma^k(b_\varepsilon, z_\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}^N} |D^k b_\varepsilon|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} (1+\varepsilon b_\varepsilon/\sqrt{2})|D^k z_\varepsilon|^2, \quad \Gamma^0(b_\varepsilon, z_\varepsilon) = 8E_\varepsilon(u_\varepsilon).$$

$\rightsquigarrow$ Estimation de $\|(b_\varepsilon, z_\varepsilon)\|_{L^\infty(H^s)}$ en termes de $\|(b_\varepsilon, z_\varepsilon)\|_{L^2(H^s)}$ et $\|b_\varepsilon\|_{L^2(H^s)}$.

Esquisse de démonstration

Tant que u_ε ne s'annule pas, disons sur $[0, T_\varepsilon)$ maximal.

- Système augmenté pour les variables $(b_\varepsilon, z_\varepsilon)$, où

$$z_\varepsilon = v_\varepsilon - i\nabla \ln(\rho_\varepsilon^2) = \nabla(2\varphi_\varepsilon - i\ln(\rho_\varepsilon^2)) \in \mathbb{C}^N.$$

- Estimations d'énergie pour les semi-normes $\Gamma^k(b_\varepsilon, z_\varepsilon)$, $k = 0, \ldots, s$

$$\Gamma^k(b_\varepsilon, z_\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}^N} |D^k b_\varepsilon|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} (1+\varepsilon b_\varepsilon/\sqrt{2})|D^k z_\varepsilon|^2, \quad \Gamma^0(b_\varepsilon, z_\varepsilon) = 8E_\varepsilon(u_\varepsilon).$$

  $\rightsquigarrow$ Estimation de $\|(b_\varepsilon, z_\varepsilon)\|_{L^\infty(H^s)}$ en termes de $\|(b_\varepsilon, z_\varepsilon)\|_{L^2(H^s)}$ et $\|b_\varepsilon\|_{L^2(H^s)}$.

- Estimation de $\|(b_\varepsilon, z_\varepsilon)\|_{L^2(H^s)}$ et $\|b_\varepsilon\|_{L^2(H^s)}$.
  Par analyse de Fourier pour le semi-groupe de (AP) : estimations de type parabolique.

Esquisse de démonstration

Tant que u_ε ne s'annule pas, disons sur $[0, T_\varepsilon)$ maximal.

- Système augmenté pour les variables $(b_\varepsilon, z_\varepsilon)$, où

$$z_\varepsilon = v_\varepsilon - i\nabla \ln(\rho_\varepsilon^2) = \nabla(2\varphi_\varepsilon - i\ln(\rho_\varepsilon^2)) \in \mathbb{C}^N.$$

- Estimations d'énergie pour les semi-normes $\Gamma^k(b_\varepsilon, z_\varepsilon)$, $k = 0, \ldots, s$

$$\Gamma^k(b_\varepsilon, z_\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}^N} |D^k b_\varepsilon|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} (1+\varepsilon b_\varepsilon/\sqrt{2})|D^k z_\varepsilon|^2, \quad \Gamma^0(b_\varepsilon, z_\varepsilon) = 8E_\varepsilon(u_\varepsilon).$$

  $\leadsto$ Estimation de $\|(b_\varepsilon, z_\varepsilon)\|_{L^\infty(H^s)}$ en termes de $\|(b_\varepsilon, z_\varepsilon)\|_{L^2(H^s)}$ et $\|b_\varepsilon\|_{L^2(H^s)}$.

- Estimation de $\|(b_\varepsilon, z_\varepsilon)\|_{L^2(H^s)}$ et $\|b_\varepsilon\|_{L^2(H^s)}$.
  Par analyse de Fourier pour le semi-groupe de (AP) : estimations de type parabolique.

- Contrôle de $\|(b_\varepsilon, z_\varepsilon)(t)\|_{H^s}$ sur $[0, T_\varepsilon)$ et injection de Sobolev
  $\leadsto$ $T_\varepsilon = +\infty$.

Quelques perspectives

- Pour les équations d'Euler, étudier l'évolution du support du tourbillon lorsque la vitesse correspondante n'est pas uniformément bornée.
- Pour le régime de la dynamique des ondes amorties, étendre les résultats de convergence au cas d'une perturbation moins régulière.
- Étudier d'autres types d'interaction onde régulière - points vortex, dans des équations différentes.