

Nibouche Salim

UNE INTRODUCTION À LA GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

COMPLÉMENT

Ce document est un complément de l'exposé fait dans le cadre du séminaire de mathématiques de l'école polytechnique. L'objectif est de donner un rapide (très rapide!) aperçu de certaines notions de géométrie projective, dans la continuation de ce qui a été fait au séminaire, à l'intention de ceux qui veulent approfondir. Comme les démonstrations sont souvent les choses les plus difficiles à lire, je les ai laissées en exercice, par soucis de fluidité. On n'est pas obligé de voir les démonstrations pour comprendre le sens des théorèmes : on peut les sauter si on veut juste avoir un aperçu de la théorie. Mais bien entendu, le lecteur sagace est invité à tout démontrer, et c'est mieux ! Pour cela, des indications sont fournies.

Avant de commencer, je tiens à préciser que le livre [1] de Benoît Kloeckner est très facile à lire, ce que j'encourage à faire. Pour ceux qui veulent approfondir encore plus, il y a de bonnes références dans la bibliographie.

1 Repères projectifs

Je rappelle qu'on a montré comment associer des coordonnées homogènes $[x_0 : \dots : x_n]$ ($:= (x_0, \dots, x_n)$ à $\times \lambda$ près) aux points de l'espace projectif $P(E)$, en s'aidant d'une base (b_0, \dots, b_n) de E . Ensuite, j'ai vaguement parlé de repères projectifs, en disant qu'on peut associer, à toute telle base, un $(n+2)$ -uplet $(e_0, \dots, e_{n+1}) = (\langle b_0 \rangle, \dots, \langle b_n \rangle, \langle \sum b_i \rangle)$ de $P(E)$. On a de cette manière une certaine correspondance entre les bases de E et certains $(n+2)$ -uplets de $P(E)$, les repères projectifs : (exo ?) chacun de ces derniers correspond à une unique base de E à multiplication par un scalaire (non nul) près, et elles définissent toutes les mêmes coordonnées homogènes.

Mais cette caractérisation des repères projectifs nécessite de revenir à l'espace vectoriel de départ. Cela va à l'encontre de notre bonne volonté de travailler dans l'espace projectif, avec des techniques et outils projectifs ! Heureusement, on en a une jolie caractérisation en termes exclusivement projectifs :

$$(e_0, \dots, e_{n+1}) \text{ repère projectif} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{toute famille de } n+1 \text{ éléments distincts de} \\ \{e_0, \dots, e_{n+1}\} \text{ n'est pas contenue dans un} \\ \text{hyperplan projectif} \end{array}$$

Notons que cela équivaut à dire que toute telle famille de $n+1$ éléments engendre l'espace tout entier, où "espace engendré par une partie" désigne le plus petit espace projectif la contenant.

Ainsi, pour définir un repère dans un espace projectif, il nous faut un point de plus que dans un espace affine, et ce point doit être "assez générique".

Voici quelques illustrations :

— Les repères d'une droite projective sont les triplets constitués de points deux à deux distincts.

- Un repère d'un plan projectif est constitué de 4 points dont trois ne sont jamais alignés. On peut le voir comme un triangle défini par les intersections de trois droites distinctes, plus un point qui n'est contenu dans aucune d'elles. Au fait, combien de triangles définissent trois droites distinctes d'un plan projectif ?

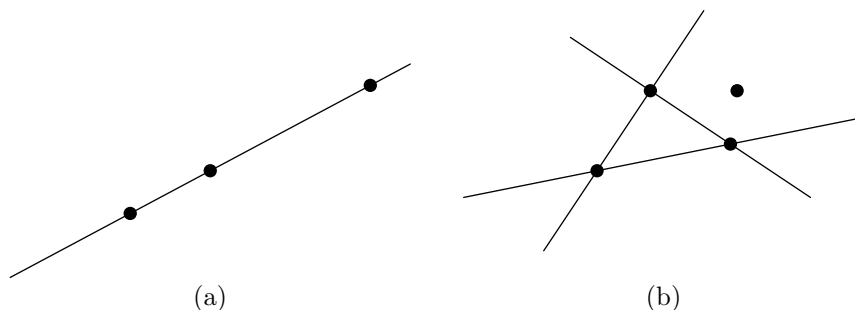


FIGURE 1 – Exemples de repères projectifs : (a) dans une droite projective ; (b) dans un plan projectif

Je rappelle que les repères projectifs ne servent pas seulement à avoir des coordonnées homogènes, mais ont aussi une propriété très importante : le groupe projectif (l'ensemble des transformations projectives de $P(E)$ dans lui-même) a une action simplement transitive sur l'ensemble des repères projectifs ((ie) pour tout couple de repères projectifs, il *existe* une *unique* transformation projective qui envoie l'un sur l'autre).

Notons que ceci est immédiatement issu de la simple transitivité du groupe linéaire sur les bases vectorielles.

Cette propriété de simple transitivité constitue un des outils les plus utiles en géométrie projective. Par exemple, pour montrer que deux applications projectives sont égales, il suffit de montrer qu'elles coïncident dans un repère projectif.

2 Structure d'incidence

Les espaces projectifs, tels qu'on les a définis, sont munis d'une structure, dite d'incidence : donné un point et une droite, on est capable de dire si le point appartient à la droite, auquel cas on dit qu'il lui est incident.

Notons qu'un espace vectoriel ou affine est également muni d'une telle structure. La différence, c'est que le premier contient un point incident à toutes les droites, et le second a le bon goût de vérifier l'existence et l'unicité d'une droite passant par deux points distincts quelconques. Mais en plus de tout cela, les espaces projectifs assurent également la propriété suivante : deux droites distinctes s'intersectent en un unique point.

Cette structure d'incidence est loin d'être aussi anodine qu'elle en a l'air. Il se trouve qu'elle offre une alternative pour définir les espaces projectifs ! En effet, étant donné un triplet (Π, Δ, R) , représentant un ensemble de points, un ensemble de droites, et une relation d'incidence, on peut résumer en quelques axiomes, dus à Veblen et Young, toute l'information de la structure projective en dimension > 1 :

- Par deux points distincts passe une droite et une seule.
- Si A, B, C, D sont 4 points distincts tels que les droites (AB) et (CD) soient sécantes, alors les droites (AC) et (BD) sont sécantes.
- Toute droite passe par au moins 3 points.

Pour le plan projectif, on peut les synthétiser ainsi :

- Par deux points distincts passe une droite et une seule.
- Deux droites distinctes se coupent en un et un seul point.
- Toute droite passe par au moins 3 points.
- Il existe au moins 3 points non alignés.

Notons que de même, le plan affine peut être défini avec des axiomes d'incidence.

Nous avons donc vu que la structure d'incidence permet de voir les espaces projectifs d'un autre angle, peut être plus intuitif. En réalité, elle offre même plus : les axiomes d'incidence définissent des espaces projectifs plus généraux (du moins pour la dimension 2) que ceux induits par les espaces vectoriels (plus précisément, les

corps). Il y a certains théorèmes vrais dans les plans projectifs induits par un corps, qui ne le sont plus dans le système d'axiomes d'incidence. Voici quelques exemples d'axiomatiques des plans projectifs :

- Plans projectifs généraux (axiomes d'incidence).
- Plans projectifs arguésiens (axiomes d'incidence + axiome de Desargues) : les plans projectifs vérifiant le théorème de Desargues sont exactement ceux induits par un corps.
- Plans projectifs de Pappus (axiomes d'incidence + axiome de Desargues + axiome de Pappus) : les plans projectifs vérifiant en plus le théorème de Pappus sont exactement ceux induits par un corps *commutatif*.

Théorème (Desargues). *Soit \mathcal{P} un \mathbb{K} -plan projectif. Soient abc et $a'b'c'$ sont deux triangles tels que $a \neq a'$, $b \neq b'$, $c \neq c'$, $(ab) \neq (a'b')$, $(ac) \neq (a'c')$ et $(bc) \neq (b'c')$. Notons $\alpha = (bc) \cap (b'c')$, $\beta = (ac) \cap (a'c')$ et $\gamma = (ab) \cap (a'b')$. Alors (aa') , (bb') et (cc') sont concourantes si et seulement si α , β , et γ sont alignés.*

Démonstration. La démonstration pour le plan projectif induit par un corps est un bon exercice : s'inspirer de la démonstration du théorème de Pappus. Indication : se placer dans une carte affine judicieuse.

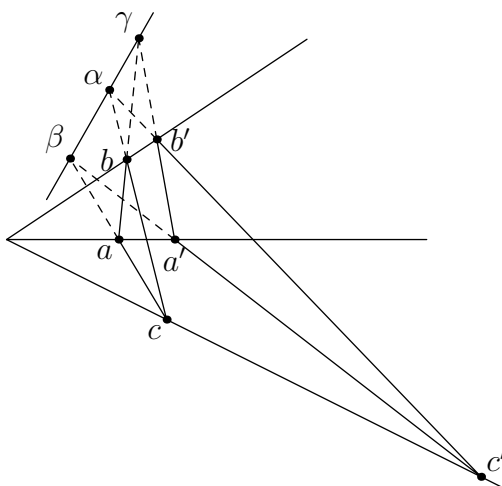


FIGURE 2 – Configuration de Desargues

En dimension ≥ 3 , cette distinction n'est plus vérifiée, car le théorème de Desargues est démontrable à partir des axiomes d'incidence.

En plus de généraliser la structure de plan projectif, la structure d'incidence a un autre atout : c'est de son point de vue que la dualité projective plane prend toute sa profondeur. La dualité se traduit sur la structure d'incidence par l'échange des deux ensembles Π et Δ , et en inversant le relation R : les points deviennent des droites, et les droites deviennent des points. Le fait qu'on puisse travailler de la même manière dans le dual, c'est à dire en échangeant la nature point/droite, traduit en réalité le fait que dans le plan projectif, il n'y a hormis notre point de vue aucune différence entre la nature des points, et la nature des droites. Comme l'a si bien remarqué Hilbert, la seule chose qui compte, c'est la relation entre les deux objets : étant donné deux objets a et b de nature différente, cela revient au même de considérer que a est un point contenu dans b en tant que droite, ou que a est une droite contenant b en tant que point. De même, cela revient au même de considérer que z est une droite passant par deux points x et y , ou que x et y sont deux droites qui se coupent en z .

Remarquons que cette dualité n'est plus possible dans les espaces affines, dans lesquels deux points distincts définissent une unique droite, alors que deux droites distinctes ne s'intersectent pas toujours en un unique point. Les espaces projectifs sont de ce point de vue une continuation naturelle de la complétion :

$$\text{espaces vectoriels} \xrightarrow[\text{les points}]{\text{+ droites reliant}} \text{espaces affines} \xrightarrow[\text{des droites}]{\text{+ pts d'inters}} \text{espaces projectifs}$$

qui donne vie à la dualité.

Notons enfin que la dualité est également présente en dimension > 2 : on s'intéresse toujours à la relation d'incidence entre les sous-espaces projectifs, et on échange les points avec les hyperplans, et plus généralement, les sous-espaces de dimension k avec les sous-espaces de codimension k .

Par la suite, on ne considérera que les espaces projectifs induits par un corps, et on continuera à les manipuler à partir de la construction vectorielle : pourquoi se priver d'une théorie aussi puissante que celle des espaces vectoriels ? Mais on gardera à l'esprit le point de vue "structure d'incidence", qui peut enrichir l'intuition, surtout celle concernant la dualité.

Pour plus de détails sur la structure d'incidence, consulter les articles Wikipédia : Plan projectif (structure d'incidence), Théorème de Desargues, et Plan projectif arguésien.

3 Plan projectif

Notons $\mathcal{P} = P(E)$ un plan projectif sur un corps \mathbb{K} .

3.1 Homographies entre deux droites d'un plan projectif

Les droites du plan projectif sont naturellement munies d'une structure de droite projective. Mais ce qui est remarquable, c'est que si on se donne deux droites distinctes de ce plan, les homographies (= applications projectives) de l'une vers l'autre ont un "comportement" dans le plan ambiant.

Notons $D_1 \neq D_2$ deux droites de \mathcal{P} , et $s = D_1 \cap D_2$. Commençons par un exemple :

Définition (perspective). Soit $p \in \mathcal{P} \setminus (D_1 \cup D_2)$. On appelle perspective de D_1 dans D_2 de centre p l'application projective :

$$\pi_p : \begin{array}{ccc} D_1 & \rightarrow & D_2 \\ m & \mapsto & (pm) \cap D_2 \end{array}$$

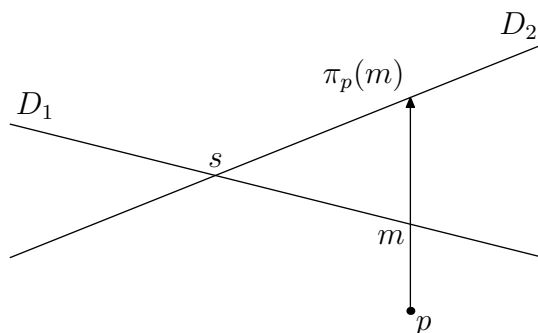


FIGURE 3 – Perspective

Démonstration. exo :). Indication : considérer une carte affine adaptée, et montrer que π_p est la restriction à D_1 d'une transformation projective de \mathcal{P} .

En réalité, cet exemple n'est pas si particulier que ça : les perspectives constituent une large classe parmi les homographies entre deux droites de \mathcal{P} .

Théorème. Une homographie $f : D_1 \rightarrow D_2$ fixe $s = D_1 \cap D_2$ si et seulement si c'est une perspective.

Démonstration. exo. Indication : choisir un repère projectif de D_1 et utiliser l'unicité de l'homographie restreinte à ce repère.

Cet exemple fondamental d'isomorphisme projectif entre D_1 et D_2 montre bien qu'il y a un lien entre ces deux droites et leur plan ambiant, puisqu'on arrive à définir des applications projectives entre elles en utilisant les objets "extérieurs" du plan. Mais ceci n'est pas très étonnant. Ce qui l'est (au début), c'est qu'inversement,

les homographies $D_1 \rightarrow D_2$ ont un "comportement" dans \mathcal{P} , au sens où les images et leurs antécédents vérifient des propriétés palpables uniquement dans \mathcal{P} !

Théorème. Si $f : D_1 \rightarrow D_2$ est une homographie, alors il existe une droite Δ (différente de D_1 et D_2) telle que :

$$\forall x, y \in D_1, (xf(y)) \cap (f(x)y) \in \Delta$$

On dit que Δ est l'axe de l'homographie f . On a de plus :

- Si f est une perspective (ie fixe s), Δ passe par s .
- Sinon, $\Delta = (f^{-1}(s), f(s))$.

Démonstration. exo. :D Indication : démonstration différente pour chaque cas :

- Montrer que pour tout $x, y, z \in D_1$ distincts, $(xf(y)) \cap (f(x)y)$ et $(yf(z)) \cap (f(y)z)$ sont alignés avec s . (super indication : appliquer le théorème de Desargues à deux triangles bien choisis)
- Considérer $\Delta = (f^{-1}(s), f(s))$ et $x \in D_1 \setminus \{s, f^{-1}(s)\}$, ainsi que les perspectives $\pi_1 := \pi_{f(x)}^{D_1 \rightarrow \Delta}$ et $\pi_2 := \pi_x^{\Delta \rightarrow D_2}$. Que vérifie $\pi_2 \circ \pi_1$?

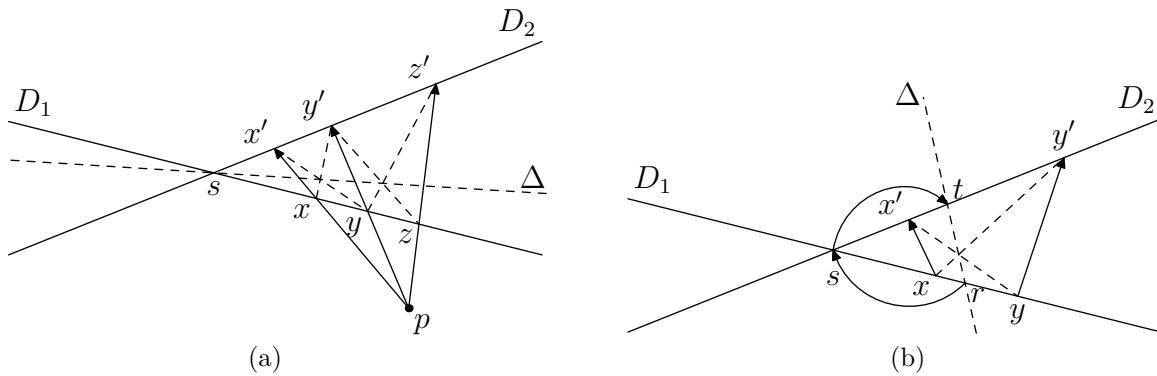


FIGURE 4 – Axe d'une homographie : (a) une perspective ; (b) une qui ne l'est pas

On a ainsi une information sur tout homographies $D_1 \rightarrow D_2$: sont axe. Mais cette information n'est pas complète. En effet, deux telles homographies de même axe ne sont pas forcément égales.

On a également fait la moitié du travail de caractérisation des homographies $D_1 \rightarrow D_2$: on sait que celles dont l'axe passe par s (ou de manière équivalente, celles qui fixent s) sont les perspectives. Mais on ne sait pas vraiment à quoi ressemblent les autres (bien qu'on sache grâce au théorème ci-dessus, à partir de l'axe et de l'image d'un point donné, reconstruire les images de tous les autres points).

Remarquons enfin qu'on a le résultat suivant (démontré en passant dans le théorème ci-dessus) : toute homographie $D_1 \rightarrow D_2$ est la composée d'au plus deux perspectives.

3.2 Faisceaux de droites

Rappel : Birapport. Étant donné une droite projective D sur un corps \mathbb{K} , et quatre points $x, y, z \in D$ deux à deux distincts ((ie) qui forment une base de D), on définit le birapport $[x, y, z, \cdot]$ comme étant l'unique homographie :

$$\begin{aligned} D &\rightarrow \hat{\mathbb{K}} \\ x &\mapsto \infty \\ y &\mapsto 0 \\ z &\mapsto 1 \end{aligned}$$

où $\hat{\mathbb{K}} = \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ est la \mathbb{K} -droite projective canonique (et où $(\infty, 0, 1)$ est son repère projectif canonique). Je rappelle la convention de notation des coordonnées homogènes dans $\hat{\mathbb{K}}$: $z := [z : 1]$ et $\infty := [1 : 0]$. On peut interpréter $[x, y, z, w]$ comme la coordonnée homogène de w dans le repère projectif (x, y, z) . Mais il ne faut surtout pas confondre coordonnées homogènes dans un repère (de la forme $[\cdot : \cdot]$) et birapport (de la forme $[\cdot, \cdot, \cdot, \cdot]$).

La formule du birapport dans $\hat{\mathbb{K}}$ est : $[x, y, z, w] = \frac{w-y}{z-y} \cdot \frac{z-x}{z-x}$. On y voit immédiatement les formules :

$$[x, y, z, w] = [x, y, w, z]^{-1} = [y, x, w, z]^{-1} = 1 - [x, z, y, w].$$

Dernier rappel et le plus important : le birapport est invariant par homographie, et même plus, on a équivalence pour une bijection entre être une homographie et préserver le birapport.

Étant donné un point $p \in \mathcal{P}$, on appelle faisceau de droites basé en p l'ensemble \mathcal{D}_p des droites qui passent par p .

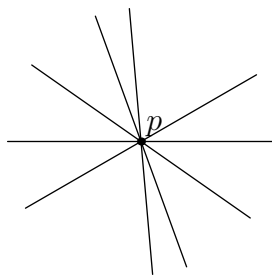


FIGURE 5 – \mathcal{D}_p

Or on remarque que la définition des faisceaux de droites ressemble à la définition vectorielle de la droite projective : c'est un faisceau de droites, mais dans un plan *vectoriel*. On se doute bien qu'on peut donc également munir le faisceau \mathcal{D}_p de \mathcal{P} d'une structure de droite projective, ce qui permettrait de jouir de toute la richesse de la théorie du birapport. Pour cela, on s'aidera d'une bijection entre \mathcal{D}_p et une droite projective, ce qui transférera la structure de cette dernière à \mathcal{D}_p (tout comme on peut transférer une structure d'un groupe ou toute autre structure grâce à une bijection, dont le sens est "identification").

Mais si on utilise deux bijections f et g avec deux droites projectives D_1 et D_2 , comment peut-on savoir si la structure induite est la même ? Avant de se poser cette question, il faut définir ce que l'on entend par "structure de droite projective". On peut la définir par la donnée d'un birapport, mais aussi par un couple (f, D) . Dans tous les cas, les deux structures induites par (f, D_1) et (g, D_2) sont les mêmes si $g \circ f^{-1} : D_1 \rightarrow D_2$ est une homographie.

Commençons par un premier exemple : si on observe le faisceau \mathcal{D}_p dans le dual (induit par le dual vectoriel) de \mathcal{P} , on remarque qu'il correspond aux points de la droite p^* . On a ainsi une bijection naturelle $\delta : \mathcal{D}_p \rightarrow p^*$, qui induit une structure de droite projective sur \mathcal{D}_p .

On peut également transférer la structure d'une droite D (ne contenant pas p) de \mathcal{P} à \mathcal{D}_p via la bijection :

$$\phi_p^D : \mathcal{D}_p \rightarrow D \\ A \mapsto A \cap D$$

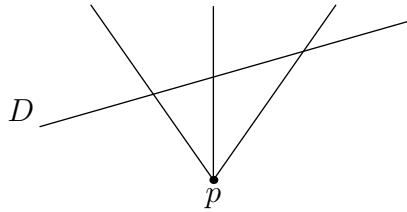


FIGURE 6 – ϕ_p^D

Remarquons que la structure induite par ϕ_p^D ne dépend pas du choix de D : c'est le caractère homographique des perspectives centrées en p .

Mais la question que l'on peut se poser est : les structures induites par ϕ_p^D et δ sont elles les mêmes ? La réponse est oui. La démonstration est en exo (indication : on est un peu obligé de revenir à l'espace vectoriel de départ, car c'est à partir de sa dualité qu'a été définie la dualité projective : considérer un repère projectif sur \mathcal{P} et définir, en revenant à une base de E et en considérant la base duale, le "repère projectif dual" sur \mathcal{P}).

Remarquons qu'il existe un équivalent pour les faisceaux de l'axe d'une homographie entre deux droites de \mathcal{P} . Soit f une homographie entre \mathcal{D}_p et \mathcal{D}_q . En passant au dual (ou f devient une homographie entre deux droites de \mathcal{P}), on montre qu'il existe un point c , appelé centre de f , tel que :

$$((f(D_1) \cap D_2)(D_1 \cap f(D_2))) \ni c$$

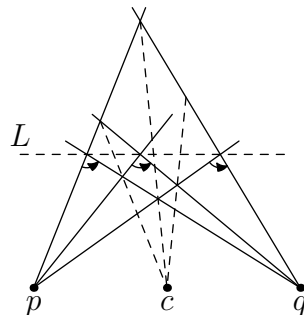


FIGURE 7 – Homographie $\mathcal{D}_p \rightarrow \mathcal{D}_q$ équivalente à une perspective, et son centre

Observons enfin l'équivalent dual pour les faisceaux d'une perspective : elle est par rapport à une droite L , et son centre appartient à (pq) :

$$\pi_L^{\mathcal{D}_p \rightarrow \mathcal{D}_q} : \begin{array}{l} \mathcal{D}_p \rightarrow \mathcal{D}_q \\ D \rightarrow ((q)(D \cap L)) \end{array}$$

3.3 Coniques

Je rappelle qu'on a défini les coniques comme étant les ensembles de la forme :

$$C = \{[x : y : z], q(x, y, z) = 0\}$$

Où q est une forme quadratique. Je rappelle aussi que les coniques propres sont les coniques non dégénérées (q non dégénérée) et non vides. On a vu qu'ils étaient tous les mêmes à transformation projective près.

On peut également démontrer que par cinq points distincts dont trois ne sont jamais alignés passe une unique conique, et elle est propre (exo. Indication : choisir un repère projectif adapté).

3.3.1 Polarité

Dans la théorie des espaces vectoriels, on arrive en dimension finie, à identifier E à E^* , si l'on se donne une forme bilinéaire non dégénérée.

L'équivalent pour le plan projectif des formes bilinéaires, ce sont les coniques propres. On va donc s'aider des coniques pour définir une nouvelle dualité, qu'on appelle polarité, qui identifie le dual de \mathcal{P} avec lui-même, au sens suivant : la droite duale d'un point de \mathcal{P} est une droite de \mathcal{P} , et inversement.

Soit C une conique propre définie par une forme quadratique q et sa forme bilinéaire φ associée (uniques à multiplication près). Tout comme on avait défini la dualité en utilisant "l'orthogonal" pour le crochet de dualité, on définit la polarité de la manière suivante (on note F^\perp l'orthogonal du sous-espace vectoriel F de E par rapport à φ) :

- Si $p = P(F) \in \mathcal{P}$, on appelle droite polaire de p la droite $p^\circ := P(F^\perp)$ de \mathcal{P} .
- Si $D = P(F) \in \mathcal{P}$, on appelle point polaire de D le point $D^\circ := P(F^\perp)$ de \mathcal{P} .

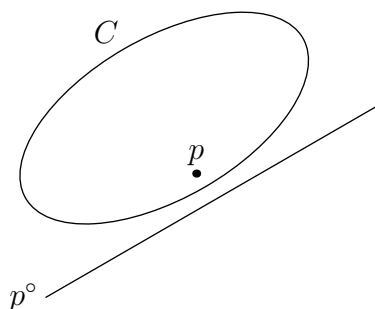


FIGURE 8 – Polarité

On vérifie facilement que la polarité ainsi définie vérifie les mêmes propriétés que la dualité. De plus, cette fois, on a réellement $p^{\circ\circ} = p$ et $D^{\circ\circ} = D$. On a aussi la propriété suivante :

$$p \in p^\circ \Leftrightarrow p \in C \Leftrightarrow p^\circ \text{ est tangent à } C$$

Cela permet d'avoir en particulier la configuration suivante :

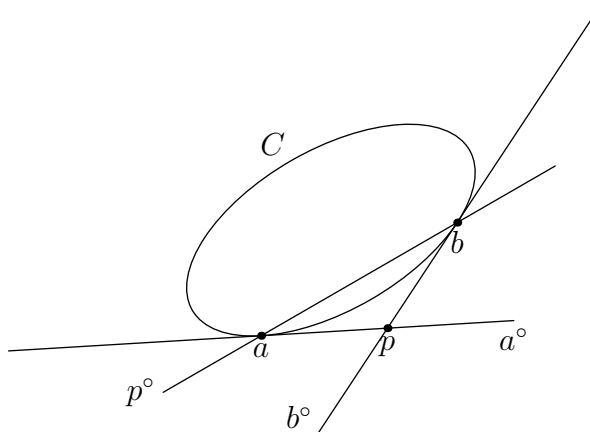


FIGURE 9 – Intersection de deux droites polaires tangentes à C

En effet, $p = a^\circ \cap b^\circ \Leftrightarrow p^\circ = (ab)$.

Pour ceux qui veulent approfondir la polarité, le document [2] la généralise au triangle, et également aux corps convexes. Il peut facilement être trouvé sur internet en version libre.

3.3.2 Quadrilatère inscrit et polarité

Intéressons nous maintenant à la configuration suivante : un quadrilatère $abcd$ non aplati (trois sommets ne sont jamais alignés) inscrit dans une conique C .

Il est clair que le quadrilatère polaire (par rapport à C) $\alpha\beta\gamma\delta$ de $abcd$ est un quadrilatère circonscrit à C , ayant comme points de tangences a, b, c et d . Ce qui est moins clair, c'est que (ad) (resp. (ab)), (bc) (resp. (dc)) et $(\alpha\gamma)$ (resp. $(\delta\gamma)$) sont concourantes, que les diagonales de $abcd$ et de $\alpha\beta\gamma\delta$ sont également concourantes, et que les points $p := (ab) \cap (dc)$, $q := (ad) \cap (bc)$, $r := (\delta\alpha) \cap (\gamma\beta)$, et $s := (\alpha\beta) \cap (\delta\gamma)$ sont alignés.

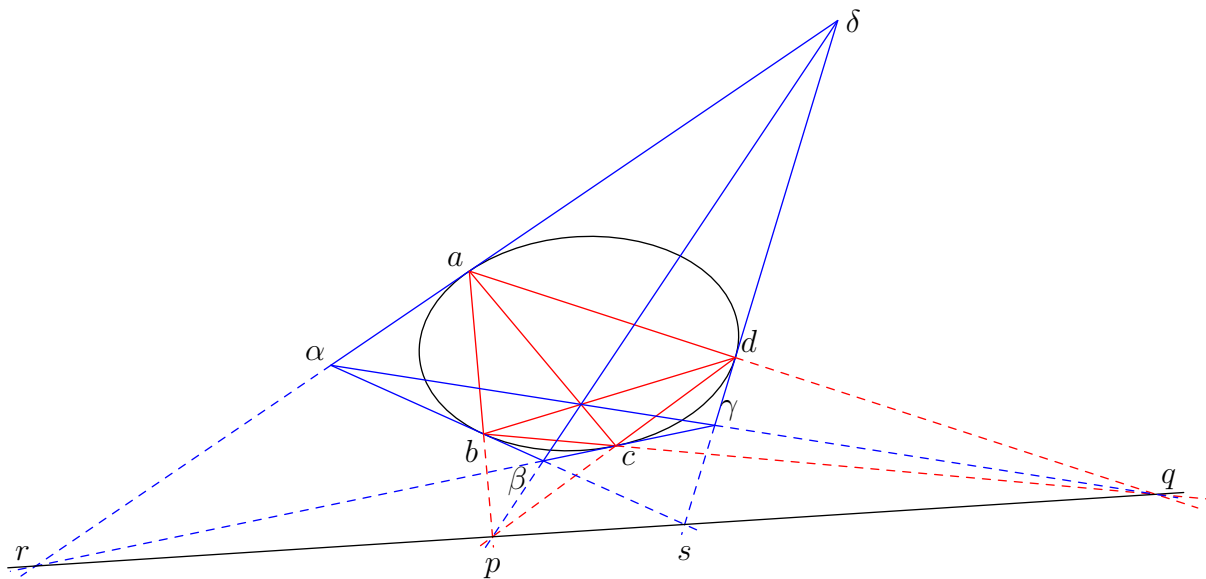


FIGURE 10 – Quadrilatère inscrit et son polaire

Commençons par observer que ces deux dernières propriétés sont en fait polaires l'une de l'autre. Pour cela, identifions certaines relations de polarité :

- Les polaires de a, b, c , et d sont respectivement $(\alpha\delta)$, $(\alpha\beta)$, $(\beta\gamma)$ et $(\gamma\delta)$.
- Les polaires de α, β, γ , et δ sont respectivement (ab) , (bc) , (cd) et (ad) (Cf. figure 9).
- De même, les polaires de r et s sont respectivement (ac) et (bd) .
- $p^\circ = ((ab) \cap (cd))^\circ = ((ab)^\circ (cd)^\circ) = (\alpha\gamma)$. De même, $q^\circ = (\beta\delta)$.

Ainsi, dire que les diagonales (ac) , (bd) , $(\alpha\gamma)$ et $(\beta\delta)$ sont concourante revient au même que de dire que leurs points polaires r, s, p et q sont alignés.

Lemma. Si C est une conique propre, et D une droite la coupant en x et y . Alors pour tout $z, w \in D \setminus \{x, y\}$, $z \in w^\circ$ (on dit en fait que z et w sont conjugués par rapport à C) si et seulement si $[x, y, z, w] = -1$ (on dit en fait que (x, y, z, w) sont en division harmonique).

Démonstration. Exo. Indication : si $D = P(F)$ avec F un plan de E , et si φ est une forme bilinéaire représentant C , considérer φ restreinte à F , et choisir un bon repère de D .

Passons maintenant à la démonstration.

Notons o l'intersection des diagonales de $abcd$, $y = (op) \cap (bc)$ et $z = (op) \cap (ad)$. En considérant les perspectives $\pi_p^{(bq) \rightarrow (aq)}$ et $\pi_o^{(aq) \rightarrow (bq)}$, et en utilisant la conservation du birapport de leur composée $((b, c, q, y) \mapsto (c, b, q, y))$, on obtient :

$$[b, c, q, y] = [c, b, q, y] (= [b, c, q, y]^{-1})$$

Donc $[b, c, q, y] = \pm 1$. Mais la valeur 1 implique que $y = q$, ce qui n'est pas possible. En effet, comme $abcd$ est non aplati, ses sommets forment un repère de \mathcal{P} : on peut l'envoyer par une application projective sur un parallélogramme d'une carte affine, où l'impossibilité est claire.

Remarquons que nous jouissons ici d'une méthode qui n'est pas valable en géométrie affine : on ne peut pas toujours envoyer quatre points donnés sur quatre autres par une application affine. La supériorité de la géométrie projective dans ce cas réside dans le groupe projectif : il est plus gros que le groupe des applications affines, et permet donc de faire plus de choses !

Mais où étions-nous déjà ??! Ah, oui, c'est vrai : on a montré que (b, c, q, y) sont en division harmonique, et donc que $y \in q^\circ$. Exactement de la même manière on montre que, $z \in q^\circ$. Ainsi, $(\beta\delta) = q^\circ = (y, z) = (op)$. De même, en utilisant $\pi_q^{(dp) \rightarrow (ap)}$ et $\pi_o^{(ap) \rightarrow (dp)}$, on montre que $(\alpha\gamma) = (oq)$.

On a ainsi montré à la fois que $q \in (\alpha\gamma)$, $p \in (\beta\delta)$, et que les diagonales de $abcd$ et $\alpha\beta\gamma\delta$ sont concurrentes.

3.3.3 Structure de droite projective

Eh oui, même les coniques (propres) peuvent être munies d'une structure de droite projective ! On peut le faire en choisissant un point $a \in C$ et en construisant une bijection avec \mathcal{D}_a :

$$\gamma_a^C : \begin{cases} C & \rightarrow \mathcal{D}_a \\ x \neq a & \mapsto (ax) \\ a & \mapsto a^\circ \end{cases}$$

La structure définie ainsi ne dépend pas de a . La démonstration est le théorème de Chasles-Steiner.

Théorème (Chasles-Steiner). $\kappa_C^{\mathcal{D}_a \rightarrow \mathcal{D}_b} := \gamma_b^C \circ (\gamma_a^C)^{-1} : \mathcal{D}_a \rightarrow \mathcal{D}_b$ est une homographie de centre $a^\circ \cap b^\circ$.

Démonstration. Soient $D_1, D_2 \in \mathcal{D}_a$ distinctes. Notons $c = D_1 \cap C$ et $d = D_2 \cap C$. En construisant le quadrilatère $abcd$, on voit bien dans la configuration de la section 4.1.2. que $f := \kappa_C^{\mathcal{D}_a \rightarrow \mathcal{D}_b}$ vérifie la condition :

$$((f(D_1) \cap D_2)(D_1 \cap f(D_2))) \ni \alpha = a^\circ \cap b^\circ \quad \dots (1)$$

où $f(D_1) \cap D_2$ est l'intersection des diagonales de $abcd$, et $D_1 \cap f(D_2)$ est l'équivalent de q dans la figure 10.

La relation (1) est certes une condition nécessaire pour que f soit un homographie de centre α . Mais on remarque que si on se donne l'image $D' = f(D)$ d'un élément $D \in \mathcal{D}_a$ différent de (ab) et de a° , on arrive à reconstruire toutes les images de f . Ainsi, on sait que f est égale à l'unique homographie (forcément de centre $a^\circ \cap b^\circ$: (ab) n'est pas un point fixe) envoyant le repère $(a^\circ, (ab), D)$ sur le repère $((ab), b^\circ, D')$, car elles ont les mêmes images (reconstruites grâce à (1), relation vérifiée pour les deux).

Notons enfin que la réciproque du théorème de Chasles-Steiner est également vraie :

Théorème (Chasles-Steiner - réciproque). Si $g : \mathcal{D}_a \rightarrow \mathcal{D}_b$ est une homographie ne fixant pas (ab) (c'est à dire qui ne correspond pas à une perspective dans le dual), alors il existe une unique conique propre C telle que $g = \kappa_C^{\mathcal{D}_a \rightarrow \mathcal{D}_b}$.

Démonstration. La démonstration est essentiellement celle de l'autre sens, sauf que la donnée n'est plus (C, a, b) (et donc f), mais plutôt $(a^\circ, (ab), D) \mapsto ((ab), b^\circ, D')$.

Ceci termine notre quête de la caractérisation des homographies entre les droites de \mathcal{P} (ou par dualité, entre les faisceaux de \mathcal{P}) : on sait grâce au théorème de Chasles-Steiner quelles sont les homographies qui ne sont pas des perspectives. On peut même en donner une interprétation géométrique (grâce à la polarité) :

Théorème. Si D_1 et D_2 sont deux droites de \mathcal{P} se coupant en s , et $f : D_1 \rightarrow D_2$ une homographie qui n'est pas une perspective, alors il existe une conique propre C tangente à D_1 et D_2 en $a := f^{-1}(s)$ et $b := f(s)$, telle que :

$$f = \kappa_C^{D_1 \rightarrow D_2} := \begin{cases} D_1 & \rightarrow D_2 \\ x \neq s & \mapsto T(x) \cap D_2 \\ s & \mapsto b \end{cases} \quad \text{où } T : \begin{cases} D_1 \setminus \{s\} & \rightarrow \{ \text{droites de } \mathcal{P} \text{ tangentes à } C \\ & \Leftrightarrow \text{intersection avec } C = \text{singleton} \} \\ x \neq a & \mapsto \text{tangente à } C \text{ en } x \text{ différente de } D_1 \\ a & \mapsto D_1 \end{cases}$$

3.3.4 Théorème de Pascal

Théorème. *Un hexagone (non aplati) $abcdef$ est inscrit dans une conique propre si et seulement si $(ab) \cap (de)$, $(bc) \cap (ef)$ et $(cd) \cap (af)$ sont alignés.*

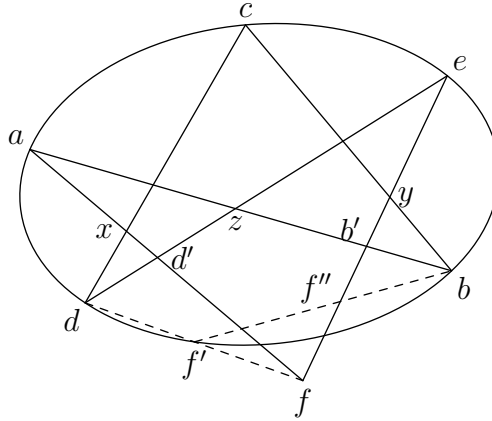


FIGURE 11 – théorème de Pascal

Démonstration. (inspirée de celle de Benoît Kloeckner)

Notons C l'unique conique (propre) passant par a, b, c, d , et e . Considérons la perspective $\pi := \pi_z^{(af) \rightarrow (ef)}$ et l'application projective $\varphi := \phi_b^{(ef)} \circ \kappa_C^{\mathcal{D}_a \rightarrow \mathcal{D}_b} \circ (\phi_d^{(af)})^{-1} : (af) \rightarrow (ef)$. En gros, l'image de $w \in (af)$ par φ s'obtient par l'application une succession d'opérations :

droite passant par $d \rightarrow$ intersection avec $C \rightarrow$ droite passant par $b \rightarrow$ intersection avec (ef)

On a :

$$\pi : \begin{cases} d' \mapsto e \\ a \mapsto b \\ f \mapsto f \end{cases} \quad \varphi : \begin{cases} d' \mapsto e \\ a \mapsto b \\ x \mapsto y \end{cases}$$

Remarquons que (d', a, f) et (d', a, x) sont des repères projectifs de (af) (car $abcdef$ est non aplati). On voit donc bien que :

$$x, y, z \text{ alignés} \Leftrightarrow \pi = \varphi \Leftrightarrow f \in C$$

Les deux implications de la première équivalence sont claires. Pour la seconde, \Leftarrow est claire, alors que \Rightarrow nécessite un peu plus de réflexion. Notons $f' = (df) \cap C$ et $f'' = (f'b) \cap (ef) = \varphi(f)$. Ainsi, si $f'' = \varphi(f) = f$ et $f \neq f'$, alors $(df) = (f'f) = (f'f'') = (f''b) = (fb)$, ce qui n'est pas permis ! Ainsi, $\varphi(f) = f \Rightarrow f = f' \in C$.

Bibliographie

- [1] Benoît Kloeckner. Un bref aperçu de géométrie projective. Calvage & Mounet, 2012.
- [2] Benoît Kloeckner. Polarités définies par un triangle. Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Grenoble), 2013, 29, p.51-71.