Le problème de Minkowski dans le cas des polytopes

Si on se donne des vecteurs $\vec{n_i}$ pondérés par des longueurs a_i vérifiant la relation:

$$
\sum_{i}a_i \vec{n_i}=0 \
$$

peut-on construire un polygone avec les $\vec{n_i}$ comme vecteurs normaux aux côtés et a_i leurs longueurs d'arêtes? Et auquel cas, ce polygone est-il unique ? La réponse à cette question est positive et provient de la solution du problème de Minkowski en dimension 2. On peut donc généraliser ce problème à une dimension n quelconque en généralisant la notion du polygone au polytope et en introduisant la notion du volume mixte, ainsi qu'on peut considérer les $\vec{n_i}$ dans $\mathbb{R}^n$ comme les vecteurs normaux aux faces du polytope et interpréter les a_i par l'air des hypersurfaces des faces. Cet outil puissant du volume mixte sera primordial dans la résolution du problème de Minkowski et donnera des résultats géométriques intéressants.